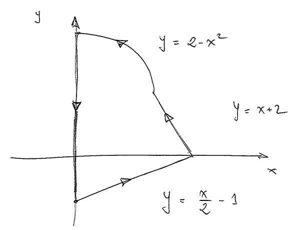
1. Si determinino tutte le funzioni $F \in C^1(\mathbf{R}^3;\mathbf{R})$ soluzioni del sistema

$$\begin{cases} D_x F(x,y,z) = \dfrac{y^2 - x^2 + 1}{(x^2+y^2+1)^2} \\ D_y F(x,y,z) = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2+1)^2} \\ D_z F(x,y,z) + F(x,y,z) = \dfrac{x}{x^2+y^2+1} \end{cases}$$

2. Si calcoli l'area della regione D delimitata dalla curva in figura utilizzando la formula

$$\mathrm{mis}_2(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial^+ D} (-y\,dx + x\,dy)$$



3. Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_\gamma (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz)$ dove $F(x,y,z) = (y+z, x+z, x-y)$ e γ è l'intersezione tra la superficie sferica di equazione $x^2+y^2+z^2 = 1$ e il piano $x = y$, sia facendo il calcolo diretto che applicando il teorema di Stokes (scegliendo un'orientazione per γ).

4. Si calcoli il flusso attraverso

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1, z \geqslant 0\}$$

considerando la normale che ha la terza componente positiva del campo

$$F(x,y,z) = (z^2 \cosh y, x^{\sqrt{z^4 + \log(x+5)}}, y).$$

5. Si calcolino i flussi del campo

$$F(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

attraverso le due superfici

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1, 0 \leqslant z \leqslant h\}$$

e

$$\Sigma = S \cup \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leqslant 1, z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leqslant 1, z = h\}.$$

6. Dato il campo di vettori in $\mathbf{R}^n$ definito da ($\alpha > 0$)

$$F(x_1, \ldots x_n) = \frac{1}{|x|^\alpha}(x_1, \ldots x_n)$$

si dica per quali valori di α vale l'equazione $\operatorname{div} F = 0$.

7. Si verifichi che il flusso uscente del campo $F(x, y) = \dfrac{(x, y)}{x^2 + y^2}$ attraverso la curva chiusa

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = r^2\}$$

è 2π indipendentemente da r. Si concluda che il flusso uscente da qualunque curva chiusa intorno all'origine è sempre 2π.

8. Si calcoli il flusso uscente del campo

$$F(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

attraverso la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}.$$

9. Dato il campo $F(x, y, z) = (z^2, 2xy + x, x^2)$ e

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, z = 4 - x^2 - y^2, 0 \leqslant z \leqslant 3\},$$

si verifichi il teorema di Stokes.

10. Si calcoli il flusso uscente del campo

$$F(x, y, z) = (yz, xz, -2xy)$$

attraverso la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, z = x^2 + y^2, z \in [0, 1]\}$$

orientata in modo tale da avere la normale che ha la terza componente negativa.

11. Utilizzando le formule di Gauss-Green si calcoli l'area (si veda un commento in fondo, dopo aver svolto, o tentato di svolgere, l'esercizio) della figura racchiusa dalla curva

$$\begin{cases} x(t) = \operatorname{sen} t \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen}^2 t \cos t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi].$$

12. Dato il campo

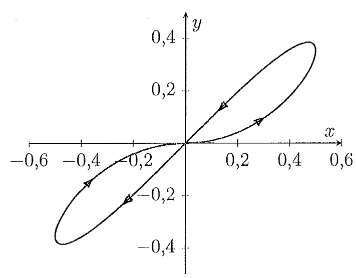
$$G(x, y, z) = (y^2 z - 2xyz, z^2 - zx^2 + x^3 y, 0)$$

se ne calcoli il rotore e si calcoli il flusso uscente dalla superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}.$$

del campo $F = \operatorname{rot} G$.
Dopodiché si calcoli $\operatorname{div}(\operatorname{rot} G)$.
Esistono altri campi che hanno lo stesso rotore di G? Se sì, se ne esibisca un esempio.

Commento all'esercizio **11.** Il risultato è zero. Non perché non ci sia un'area racchiusa dalla curva in questione, ma perché la curva non è semplice, le aree sono due, sono uguali, e l'orientazione dei bordi di ognuna delle due e opposta rispetto all'altra. Precisamente: la prima parte della curva risulta orientata positivamente (e racchiude una figura nel primo quadrante), la seconda parte risulta orientata negativamente (e racchiude una figura nel terzo quadrante).



Commento all'esercizio **12.** Si osservi come se F è un campo tale che $F = \operatorname{rot} G$ per qualche altro campo G si ha che il flusso attraverso una superficie Σ compatta e con bordo dipende solo da G. Infatti (usando Stokes)

$$\iint_\Sigma \langle F, \nu \rangle d\sigma = \iint_\Sigma \langle \operatorname{rot} G, \nu \rangle d\sigma = \int_{\partial\Sigma^+} (G_1\, dx + G_2\, dy + G_3\, dz).$$

Si conclude che se $F = \operatorname{rot} G$ il flusso di F attraverso qualunque superficie che ha come bordo $\partial\Sigma$ (con la stessa orientazione di prima) è lo stesso!