Capitolo 1

Successioni e serie di funzioni

Convergenza puntuale ed uniforme

ESERCIZIO 1.1 - Studiare convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$, $n \in \mathbf{N}$, definite in $D = \mathbf{R}$.

Soluzione 1.1 - Il limite puntuale è dato da (si veda la Figura 1.1)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} \pi/2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\pi/2 & x < 0 \end{cases}$$

Usiamo il Teorema 1.5 (continuità della funzione limite) delle dispense che

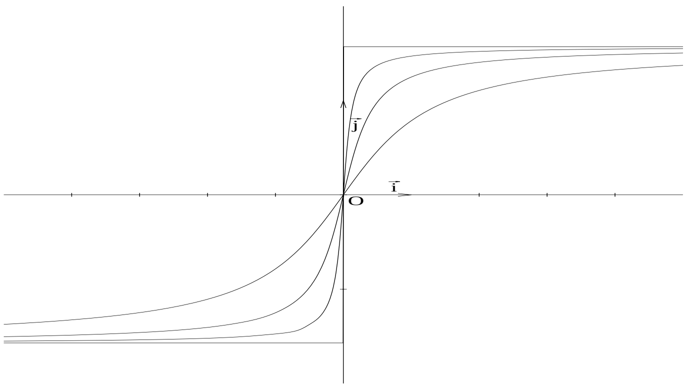

Figura 1.1:

qui ricordiamo brevemente.

Teorema 1.1 *Se una successione di funzioni continue in D converge uniformemente ad f in D allora f è continua in D.*

Questo può essere usato anche in negativo: cioè se $\{f_n\}_n$ è una successione di funzioni continue che converge puntualmente ad una funzione f non continua, la convergenza non può essere uniforme.
Concludiamo che se $D = \mathbf{R}$ f_n non converge uniformemente ad f. Ci si può chiedere se ci sono insiemi strettamente contenuti in $\mathbf{R}$ sui quali la convergenza è uniforme. Si consideri $A = [a, +\infty)$ con $a > 0$. La derivata di $|f_n - f| = f - f_n$ è sempre negativa (per cui non ci sono punti stazionari). Questo però ci dice che il massimo è assunto per $x_n = a$. Per cui

$$\sup_{x \in [a,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \pi/2 - f_n(a) = \pi/2 - \operatorname{arctg}(nx)\,.$$

Dalla convergenza puntuale concludiamo che questa quantità converge a zero. Poiché analogamente si può trattare il caso in cui $A = (-\infty, b]$ con $b < 0$ concludiamo che f_n converge uniformemente ad f su tutti gli insiemi del tipo $(-\infty, b] \cup [a, +\infty)$ con $b < 0$ e $a > 0$ e solo in quelli.

Esercizio 1.2 - Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n : [-1, 1] \to \mathbf{R}\,, \qquad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

Soluzione 1.2 - Limite puntuale:

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = |x| \qquad \text{per ogni } x \in [-1, 1]\,.$$

Limite uniforme:

$$\sup_{x \in [-1,1]} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| = \sup_{x \in [-1,1]} \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right) \leqslant \sup_{x \in [-1,1]} \sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

Osservazione - Nell'ultimo passaggio si è usata la diseguaglianza $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (lasciata per esercizio).

Osservazione - Le funzioni f_n sono tutte funzioni C^1, ma il limite è solo continuo: la convergenza uniforme si trascina al limite la continuità, ma non la derivabilità.

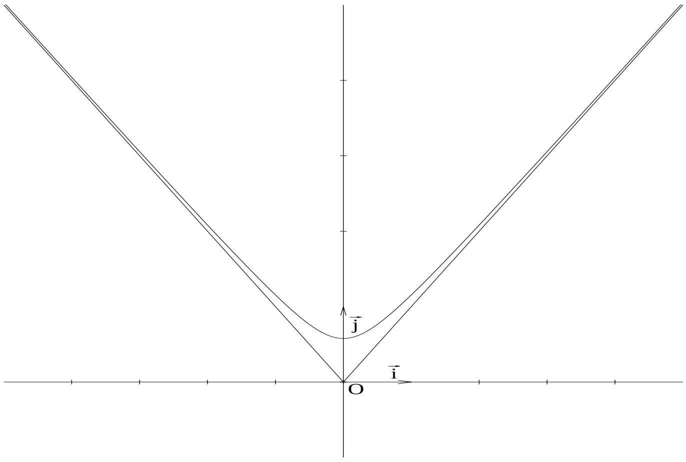

Figura 1.2:

Esercizio 1.3 - Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,, \qquad\qquad f_n(x) = \frac{x+n}{x^2+n}$$

Soluzione 1.3 - Il limite puntuale è $f \equiv 1$ su tutto $\mathbf{R}$. Prima di tutto si osservi che

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f_n(x) = 0$$

e anche che

$$f_n(x) = 0 \quad \text{per } x_n = -n\,.$$

Per ognuna di queste ragioni

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)| \geqslant 1$$

e quindi non vi può essere convergenza uniforme su tutto $\mathbf{R}$ e nemmeno su semirette. Vediamo che succede se consideriamo un compatto $[a,b]$. Calcoliamo la derivata e poniamola uguale a zero. Si ha

$$f_n'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 2n - n = 0$$

che ha come soluzioni $x_n = -n + \sqrt{n^2+n}$ e $y_n = -n - \sqrt{n^2+n}$. Si osservi che $x_n \to 1/2$ mentre $y_n \to -\infty$, quindi, qualunque sia $[a,b]$, y_n definitivamente non appartiene ad $[a,b]$. Se $1/2 \in (a,b)$ allora x_n definitivamente

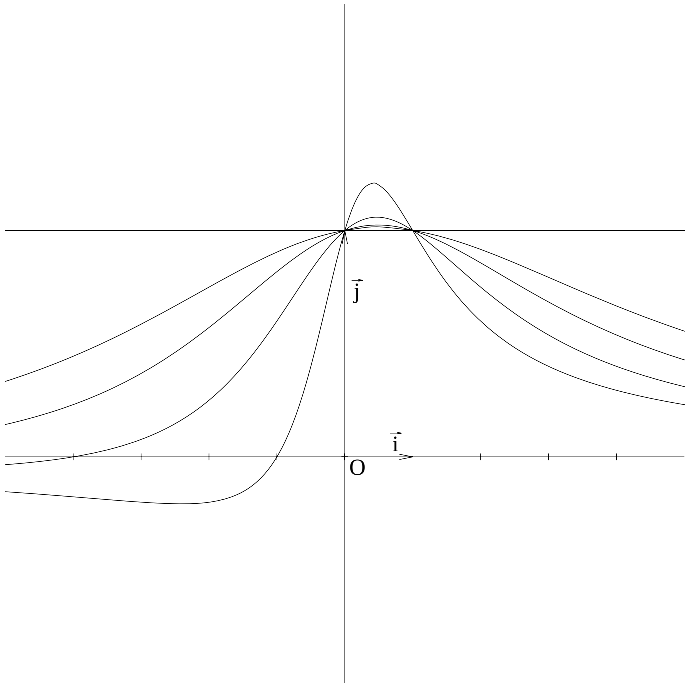

Figura 1.3:

appartiene ad $[a, b]$. In $[a, b]$ quindi o non ci sono punti stazionari o c'è solamente x_n, nel quale f_n assume il suo valore massimo che vale

$$f_n(x_n) = \frac{\sqrt{n^2+n}}{2n(n+1-\sqrt{n^2+n})} = \frac{n+\sqrt{n^2+n}}{2n} \to 1\,.$$

Attenzione: il massimo di $|f_n - f|$ non è detto sia assunto in x_n. Infatti si ha

$$f_n(x) - f(x) = \frac{x(1-x)}{x^2+n}$$

che è positiva per $x \in (0, 1)$ (e negativa altrimenti). Quindi

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} \dfrac{-x(1-x)}{x^2+n} & x \in [a, 0] \\ \dfrac{x(1-x)}{x^2+n} & x \in [0, 1] \\ \dfrac{-x(1-x)}{x^2+n} & x \in [1, b] \end{cases}$$

Per cui l'estremo superiore (che in realtà è un massimo) è sicuramente assunto in $x = a$ o $x = b$ oppure $x = x_n$. Per cui

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \max\{f_n(a) - 1, f_n(b) - 1, f_n(x_n) - 1\} .$$

Poiché tutti e tre i valori dell'insieme a sinistra convergono a zero si conclude che $\{f_n\}_n$ converge uniformemente sui compatti.

Esercizio 1.4 - Studiare convergenza puntuale ed uniforme di $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$.

Soluzione 1.4 - Il limite puntuale è (in figura sono riportati i grafici di alcune f_n)

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \qquad \text{per ogni } x \in [0,1] .$$

Vediamo se il limite è anche uniforme:

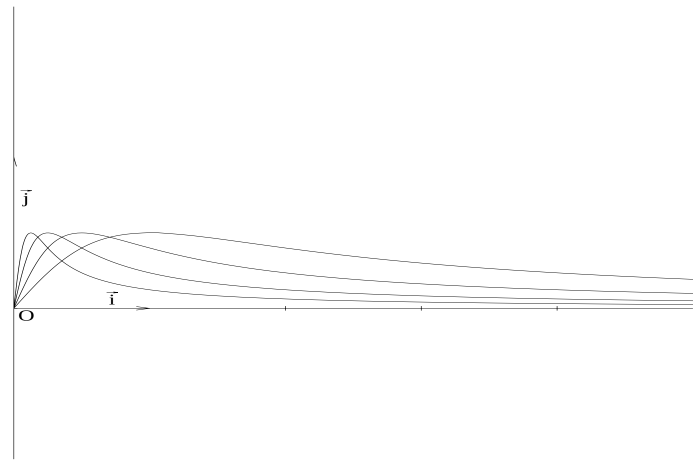

Figura 1.4:

$$f_n'(x) = \frac{n(1 + n^2x^2) - 2n^3x^2}{(1 + (nx)^2)^2} = \frac{n - n^3x^2}{(1 + (nx)^2)^2}$$

che si annulla per $x_n = 1/n$. Ora $f_n(x_n) = 1/2$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ per cui

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} .$$

Osservazione - Si osservi che il limite puntuale di funzioni continue può essere continuo anche se il limite non è uniforme.

Esercizio 1.5 - Si studino la convergenza puntuale ed uniforme delle funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x+n} \qquad \text{per } x \in [0, +\infty)$$

e si dimostri che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) \operatorname{sen}(nx) dx = 0\,.$$

Soluzione 1.5 - Facilmente si ha che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad \text{per ogni } x \in [0, +\infty)$$

La convergenza non è però uniforme. Infatti

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x)| = +\infty\,.$$

È uniforme però sui limitati. Si consideri, ad esempio, un intervallo $[0, a]$ con $a > 0$:

$$f_n'(x) = \frac{x^2 + 2nx}{(x+n)^2} \geqslant 0$$

per cui le funzioni sono crescenti e quindi assumono il massimo in $x = a$:

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| = \frac{a^2}{a+n} \to 0 \qquad \text{per ogni } a \in (0, +\infty)\,.$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\textstyle\int_0^1 f_n(x) \operatorname{sen} nx dx\right| &\leqslant \lim_{n\to\infty} \textstyle\int_0^1 |f_n(x)||\operatorname{sen}(nx)| dx \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \textstyle\int_0^1 |f_n(x)| dx = 0 \end{aligned}$$

grazie al fatto che $f_n \to 0$ uniformemente in $[0, 1]$.

Esercizio 1.6 - Si studino la convergenza puntuale ed uniforme delle funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{n} + \operatorname{sen}^2 x\right)^n \qquad \text{per } x \in [0, \pi]$$

e si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n(x)dx\,.$$

Soluzione 1.6 - Facilmente si vede che $f_n(0) = f_n(\pi) \to 0$.
Se $x \in (0, \pi)$, $x \neq \pi/2$ si ha che $\operatorname{sen}^2 x < 1$ e quindi si ha che esiste $a < 1$ per il quale definitivamente vale

$$\frac{1}{n} + \operatorname{sen}^2 x \leqslant a < 1$$

per cui $f_n(x) \to 0$ se $x \neq \pi/2$. Se $x = \pi/2$ si ha che

$$f_n(\pi/2) = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n \to e$$

quindi il limite puntuale è (si veda la Figura 1.5)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} e & x = \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & x \neq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Può convergere uniformemente? NO! Perché le f_n sono continue e f non lo

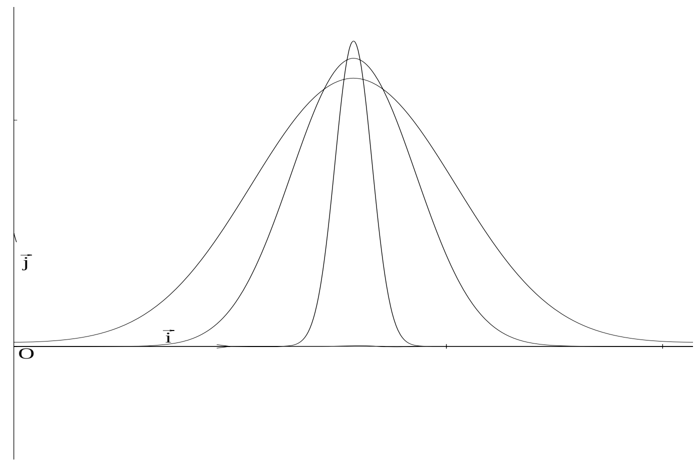

Figura 1.5:

è. Vediamo che succede se togliamo un intorno di $\pi/2$. Fisso $\delta > 0$ (e minore di $\pi/2$): in $[0, \pi/2 - \delta]$ f_n è crescente per ogni $n \in \mathbf{N}$ per cui il massimo è assunto per $x = \pi/2 - \delta$. Detto α il valore $\operatorname{sen}^2(\pi/2 - \delta) < 1$ si ha che esiste $\epsilon > 0$ tale che

$$\alpha + \epsilon < 1$$

e quindi

$$\max_{x \in [0, \pi/2 - \delta]} |f_n(x)| \leqslant \left(\frac{1}{n} + \alpha\right)^n \leqslant (\alpha + \epsilon)^n \to 0\,.$$

Allo stesso modo si può procedere in $[\pi/2 + \delta, \pi]$. Conclusione: f_n convergono uniformemente a $f \equiv 0$ in tutti gli insiemi del tipo $A_\delta = [0, \pi/2 - \delta] \cup [\pi/2 + \delta, \pi]$. Calcoliamo l'integrale:

$$|\int_0^\pi f_n(x)dx| = |\int_{A_\delta} f_n(x)dx + \int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2+\delta} f_n(x)dx| \leqslant \int_{A_\delta} |f_n|(x)dx + 2e\delta\,.$$

Passando al limite si ha che in A_δ, grazie alla convergenza uniforme, l'integrale tende a 0. Concludendo si ha che:

$$\forall \delta > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} |\int_0^\pi f_n(x)dx| < 2e\delta$$

il che significa che l'integrale tende a 0.

Esercizio 1.7 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n}{x^2 + n^4 + \log n}\,.$$

Soluzione 1.7 - Puntuale per ogni $x \in \mathbf{R}$ perché, ad esempio,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x+n}{x^2 + n^4 + \log n}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x+n|}{n^4}$$

In generale vale, per $a, b > 0$, che $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, per cui $2(a^2 + b^2) \geqslant (a+b)^2$, da cui

$$\left|\frac{x+n}{x^2 + n^4 + \log n}\right| \leqslant 2\frac{|x+n|}{2(x^2 + n^4)} \leqslant 2\frac{|x+n|}{(|x| + n^2)^2} \leqslant \frac{2}{|x| + n^2} \leqslant \frac{2}{n^2}$$

per cui la serie converge totalmente in $\mathbf{R}$.

Esercizio 1.8 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}\,.$$

Soluzione 1.8 - Per $x \geqslant 1$ si ha che

$$\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} \geqslant \frac{nx^n}{2|x|^n n^2} = \frac{1}{2n}$$

per cui la serie diverge. Per $x \in (-1,1)$ si ha che

$$\Big|\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}\Big| \leqslant n|x|^n$$

per cui vi è convergenza assoluta. Per $x \leqslant -1$

$$\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} = (-1)^n \frac{n|x|^n}{1+|x|^n n^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{n|x|^n}{1+|x|^n n^2} \leqslant \frac{1}{n}$$

Verifichiamo che è monotona decrescente in n: mi chiedo se

$$\frac{(n+1)|x|^{n+1}}{1+|x|^{n+1}(n+1)^2} \leqslant \frac{n|x|^n}{1+|x|^n n^2}$$

cioè se

$$n|x|^n + n(n+1)^2|x|^{2n+1} \geqslant (n+1)|x|^{n+1} + (n+1)n^2|x|^{2n+1}$$

il che è equivalente a

$$(n+1)|x| \leqslant n(n+1)|x|^{n+1} + n$$

che è vero per ogni $x \leqslant -1$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$. Usando il criterio di Leibniz si conclude che la serie converge in $(-\infty,-1]$.
Quindi converge puntualmente in $(-\infty,1)$.
Dalla stima in $(-1,1)$ si vede che vi è convergenza totale in $[0,a]$ per ogni $0 < a < 1$ e per il Teorema **??** non può esservi in $[0,1)$. Per x negativo si ha:

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}\Big| \leqslant \frac{m|x|^m}{1+|x|^m m^2} \leqslant \frac{1}{m} \to 0\,.$$

Conclusione: vi è convergenza puntuale in $(-\infty,1)$ e totale su tutti gli insiemi del tipo $(-\infty,a]$ con $a < 1$.

Esercizio 1.9 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} \,.$$

Soluzione 1.9 - Per ogni $x \in \mathbf{R}$ $1/\log(n+x^2)$ è decrescente in n per cui la serie è convergente per ogni x. La stima del resto

$$\Big| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} \Big| \leqslant \frac{1}{\log(m+x^2)} \leqslant \frac{1}{\log m} \to 0$$

quindi vi è convergenza uniforme su tutto $\mathbf{R}$. Ovviamente non vi è la totale: $\log(n+x^2) \geqslant \log n$ (il minimo è assunto per $x = 0$, **fare la derivata per esercizio!**) e quindi

$$\Big| \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} \Big| \leqslant \frac{1}{\log n}$$

e questa è la stima migliore. La serie $\sum_n (\log n)^{-1}$ diverge.