Capitolo 1

Esercizio 1.1 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^n$$

e calcolarne la somma.

Soluzione 1.1 - Calcolando il seguente limite

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}$$

si ha che il raggio è 3. Conclusione: la serie converge (puntualmente) in $(-3, 3)$ e non converge (puntualmente) in $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. Vediamo in 3 e -3 che succede.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} (-3)^n \quad \text{non converge,} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} 3^n \quad \text{diverge}$$

Conclusione: si ha convergenza puntuale (solo) in $(-3, 3)$. Vediamo gli altri tipi di convergenza.

Teorema 1.1 *Una serie di potenze centrata in* 0 *converge totalmente in ogni intervallo chiuso del tipo* $[-a, a]$ *con* $a < \rho$.

Si ha di conseguenza convergenza totale, e quindi uniforme, in ogni intervallo $[-a, a]$ con $a < 3$. Vediamo se si ha convergenza uniforme anche in $(-3, 3)$. Ragionando come al solito (si veda, ad esempio, la risoluzione dell'esercizio **??**) si deduce che la serie non può convergere uniformemente in $(-3, 3)$ e

quindi nemmeno totalmente.
Si osservi che la serie ha come somma la funzione

$$f(x) = \frac{3}{3-x}\,.$$

Esercizio 1.2 - Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n\,.$$

Soluzione 1.2 - Usiamo una conseguenza del seguente risultato.

Teorema 1.2 *Sia a_n serie a termini positivi. Si ha*

$$\liminf_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf_n \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_n \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n}\,.$$

Conseguenza: se esiste il limite del rapporto esiste anche quello della radice n-esima e sono uguali. Allora calcoliamo il limite della radice n-esima calcolando il rapporto.

$$\lim_n \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

quindi vi è convergenza puntuale in $(-e, e)$ e non vi è in $(-\infty, -e) \cup (e, +\infty)$.
Vediamo gli estremi:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{quindi per } x = n \quad e^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} \geqslant \frac{n^n}{n!}$$

per cui

$$\frac{n!}{n^n} e^n \geqslant 1\,. \tag{1.1}$$

La serie quindi non converge per $x = -e$ e diverge a $+\infty$ per $x = e$. Ovviamente converge totalmente e uniformemente in tutti gli intervalli $[a, b] \subset (-e, e)$. Come al solito si ha che la serie non può convergere uniformemente in $(-e, e)$.
Anziché la stima (1.1) si può usare, per studiare il comportamento della serie in $x = e$ la formula di Stirling

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\ (1 + O(1/n))\,.$$

Esercizio 1.3 - Studiare la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha} + e^{\alpha n}}{n} x^n$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$.

Soluzione 1.3 - Posso pensare la serie come (**perché?**)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha}}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha n}}{n} x^n .$$

Il primo termine:

$$\sqrt[n]{n^{\alpha-1}} \to 1 \qquad \text{quindi il raggio di convergenza è } 1\,,$$

il secondo termine:

$$\sqrt[n]{\frac{e^{\alpha n}}{n}} \to e^{\alpha} \qquad \text{quindi il raggio di convergenza è } \frac{1}{e^{\alpha}}\,.$$

Se $\alpha = 0$: il raggio è lo stesso e la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} x^n$. Vediamo gli estremi: per $x = -1$ si, per $x = 1$ no. Insime di convergenza puntuale $[-1, 1)$. La convergenza è uniforme? Non può esserlo dappertutto (vedi esercizio precedente).

Teorema 1.3 (Leibniz) *Sia* $(a_n)_n$ *una serie a termini positivi. Se* $a_n \to 0$ *ed è decrescente allora* $\sum(-1)^n a_n$ *converge. Inoltre*

$$\Big| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{m} (-1)^n a_n \Big| \leqslant |a_{m+1}|\,.$$

Sicuramente abbiamo convergenza totale negli insiemi del tipo $[a, b]$ con $-1 < a < b < 1$, non abbiamo convergenza uniforme, e quindi nemmeno totale, in $[0, 1)$. Vediamo in $[-1, 0]$: qui la serie è a segni alterni, per vedere se la serie è uniformemente convergente uso il criterio di Leibniz. Detta f la somma della serie e f_n le somme parziali devo vedere se vale

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty} \to 0$$

cioè

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{[-1,0]}\Big|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2}{k}|x|^k-\sum_{n=0}^{n}(-1)^k\frac{2}{k}|x|^k\Big|$$
$$\leqslant \lim_{n\to+\infty}\sup_{[-1,0]}\frac{2}{n+1}|x|^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1}\to 0$$

quindi vi è convergenza uniforme in $[-1,0]$, ma non totale! Concludendo: per $\alpha=0$ si ha che la serie converge puntualmente in $[-1,1)$, uniformemente in $[-1,b]\subset[-1,1)$ e totalmente in ogni $[a,b]\subset(-1,1)$.
Gli altri casi: se $\alpha>0$ il raggio è $1/e^{\alpha}$. Il primo termine sicuramente converge totalemente in $[-1/e^{\alpha},1/e^{\alpha}]$, quindi limitiamoci a considerare il secondo. Negli estremi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,.$$

Convergenza uniforme e totale come sopra:

$$\text{convergenza uniforme in }\Big[-\tfrac{1}{e^{\alpha}},b\Big]\quad\text{per ogni }b<\tfrac{1}{e^{\alpha}}$$
$$\text{convergenza totale in }[a,b]\quad\text{per ogni }a>-\tfrac{1}{e^{\alpha}}\,,\ \ b<\tfrac{1}{e^{\alpha}}$$

Se $\alpha<0$ il raggio è 1. Vediamo gli estremi: il secondo termine questa volta converge totalmente in $[-1,1]$. Il primo negli estremi è

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{1-\alpha}}\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}}$$

che convergono entrambe. Vi è convergenza totale in $[-1,1]$.

Esercizio 1.4 - Studiare la convergenza e calcolare la somma di

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\Big]x^n\,.$$

Soluzione 1.4 - Si ha che

$$\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{n}{(n+1)!}$$

per cui il limite della radice n-esima è 0: la serie converge per ogni $x \in \mathbf{R}$. Vediamo la convergenza uniforme in $\mathbf{R}$:

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} x^k = +\infty$$

quindi non vi è convergenza uniforme in $\mathbf{R}$. Nemmeno se ci limitiamo a $(-\infty, 0]$ (come,ad esempio, fatto per e^x). Per $x \in [-a, a]$ con a positivo

$$\Big|\frac{k}{(k+1)!} x^k\Big| \leqslant \frac{k}{(k+1)!} a^k \,.$$

La serie $\sum_n \frac{na^n}{(n+1)!}$ converge per ogni a reale per cui si ha convergenza totale e uniforme in ogni compatto.
Vediamo ora di calcolare la somma. Sappiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \,.$$

Si ha che

$$\frac{n}{(n+1)!} x^n = x \frac{d}{dx} \Big[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{x} \Big]$$

per cui, grazie alla convergenza uniforme posso invertire il segno di derivata con il limite e ottenere

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} x \frac{d}{dx} \Big[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{x} \Big] \\
&= x \frac{d}{dx} \Big[\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Big] \\
&= x \frac{d}{dx} \Big[\frac{1}{x} (e^x - 1 - x) \Big] \\
&= x \Big[-\frac{1}{x^2} (e^x - 1 - x) + \frac{1}{x} (e^x - 1) \Big] \\
&= e^x - \frac{1}{x} (e^x - 1) \,.
\end{aligned}$$

Esercizio 1.5 - Studiare la convergenza della seguente serie e calcolarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-3) \Big(\frac{x+1}{x} \Big)^n \,.$$

Soluzione 1.5 - Posso fare il cambio $y = (x+1)/x$ e studiare $\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)y^n$. Il raggio di convergenza è (si vede facilmente) 1, per cui la serie converge puntualmente per $y \in (-1,1)$. La convergenza, al solito, è totale nei compatti $[a,b] \subset (-1,1)$, ma non in $(-1,1)$. Posso scrivere

$$(n-3)y^n = y^4(n-3)y^{n-4}$$

e vedere $(n-3)y^{n-4}$ come la derivata di y^{n-3}. Abbiamo

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)y^n &= -3-2y-y^2+\sum_{n=4}^{\infty}(n-3)y^n \\ &= -3-2y-y^2+\sum_{k=1}^{\infty}ky^{3+k}\end{aligned}$$

e

$$y^4\sum_{k=1}^{\infty}ky^{k-1} = y^4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dy}y^k = y^4\frac{d}{dy}\sum_{k=1}^{\infty}y^k = y^4\frac{d}{dy}\frac{y}{y-1} = \frac{y^4}{(1-y)^2}$$

Conclusione:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)y^n = -3-2y-y^2+\frac{y^4}{(1-y)^2}$$

dove la convergenza è puntuale per $y \in (-1,1)$ e totale sui compatti $[a,b] \subset (-1,1)$. La funzione $f(x) = (x+1)/x$ ha il seguente grafico per cui, tornando

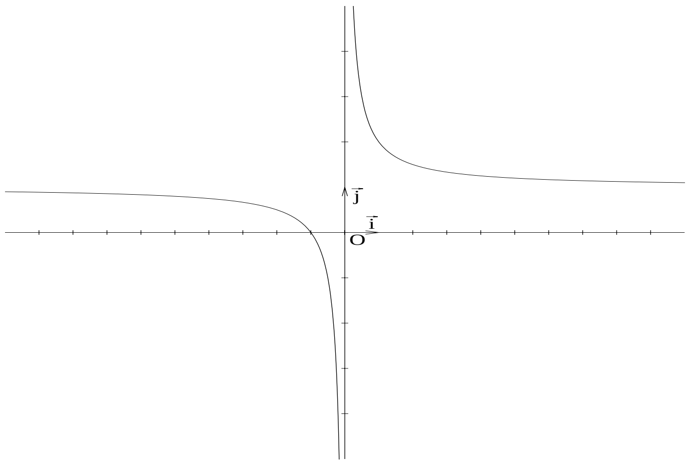

Figura 1.1:

a considerare x, si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)\Big(\frac{x+1}{x}\Big)^n = -3 - 2\frac{x+1}{x} - \Big(\frac{x+1}{x}\Big)^2 + \frac{(x+1)^4}{x^2}$$

dove la convergenza è puntuale per $x \in (-\infty, -1/2)$ e totale negli insiemi del tipo $[a, b] \subset (-\infty, -1/2)$. Infatti

$$\Big|\frac{x+1}{x}\Big| < 1 \quad \text{per} \quad x \in (-\infty, -1/2)\,.$$

Esercizio 1.6 - Studiare la convergenza e calcolare la somma (ove converge) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \frac{x^n}{(1+x^2)^n}\,.$$

Soluzione 1.6 - La serie dell'esercizio **non è** una serie di potenze. Tuttavia lo studio di tale serie può essere ricondotto allo studio di una serie di potenze. Innanzitutto si osservi che

$$\lim_n \Big[\frac{n}{n+2}\frac{|x|^n}{(1+x^2)^n}\Big]^{1/n} = \frac{|x|}{1+x^2}$$

che è sempre minore di 1 (per esercizio vedere che $\frac{|x|}{1+x^2} \leqslant 1/2$). Di conseguenza la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbf{R}$. Calcoliamo la somma della serie (per $|y| < 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\, y^n\,.$$

Si ha che

$$\frac{n}{n+2}\, y^n = \frac{n+2-2}{n+2}\, y^n = \Big[1 - \frac{2}{n+2}\Big]\, y^n = y^n - \frac{2}{y^2}\frac{1}{n+2}\, y^{n+2}$$

Ora mi chiedo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\, y^n \sum_{n=1}^{\infty} y^n - \frac{2}{y^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}\, y^{n+2}\,.$$

La risposta è si, perché $\lim_n(a_n+b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$ qualora i due limiti a destra (o almeno uno di essi) esistano e nel nostro caso le due serie a destra convergono entrambe (per $|y|<1$). Prendiamo in esame il secondo termine:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}\ y^{n+2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^y t^{n+1} dt \int_0^y \Big(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n+1}\Big) dt = \\ &= \int_0^y \Big(\sum_{n=2}^{\infty} t^n\Big) dt = \int_0^y \frac{t^2}{1-t} dt \end{aligned}$$

dove il ultimo passaggio con il punto esclamativo è lecito se la convergenza è uniforme!! (e lo è se y è fissato tra -1 e 1). Per integrare $\frac{t^2}{1-t}$ dividiamo t^2 per $1-t$ e scriviamo

$$t^2 = (1-t)(-1-t)+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{t^2}{1-t} = -(1+t) + \frac{1}{1-t}$$

e quindi integrando

$$\int_0^y \frac{t^2}{1-t} dt = -y - \frac{y^2}{2} - \log(1-y)\,.$$

Tirando le fila si ha

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\ y^n &= \frac{y}{1-y} - \frac{2}{y^2}[-y - \frac{y^2}{2} - \log(1-y)] \\ &= \frac{y}{1-y} + \frac{2}{y} + 1 + \frac{2}{y^2}\log(1-y) \end{aligned}$$

Si osservi che questa funzione è regolare anche se sembra avere singolarità in $y=0$. Infatti $\log(1-y) = -y + y^2/2 + o(y^2)$ e quindi

$$\begin{aligned} \frac{y}{1-y} + \frac{2}{y} + 1 + \frac{2}{y^2}\log(1-y) &= \frac{1}{y^2}\Big[\frac{y^3}{1-y} + 2y + y^2 + 2\log(1-y)\Big] = \\ &= \frac{1}{y^2}\Big[\frac{y^3}{1-y} + 2y + y^2 - 2y + y^2 + o(y^2)\Big] \end{aligned}$$

Tornando al nostro problema: poiché la quantità $\frac{x}{1+x^2}$ è sempre minore di 1 la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\ \frac{x}{1+x^2}$$

converge puntualmente per ogni $x \in \mathbf{R}$; converge pure uniformemente e totalemente su $\mathbf{R}$ poiché $\frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}$. Si conclude sostituendo nell'espressione di sopra $\frac{x}{1+x^2}$ al posto di y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \frac{x^n}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{1+x^2-x} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{x^2}{2(1+x^2)^2} - \log \frac{1+x^2-x}{1+x^2} .$$

Esercizio 1.7 - Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{1+3x^2}{(1-x)^3} .$$

Soluzione 1.7 - Si osservi che

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{e che} \qquad \frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)^2} = 2\,\frac{1}{(1-x)^3} .$$

Poiché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge uniformemente in ogni intervallo chiuso $[a,b] \subset (-1,1)$ e cosìpure la serie delle sue derivate (prime e seconde, ma non solo) si può affermare che (per quei valori di $x \in [a,b] \subset (-1,1)$ con a, b arbitrari, ma $|a|, |b| < 1$, per cui per ogni $x \in (-1,1)$)

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} .$$

Per cui dove vi è convergenza per entrambe le serie, e in questo caso entrambe convergono in $(-1,1)$, vale

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{3x^2}{(1-x)^3} = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + \frac{3x^2}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n(n-1)}{2}x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)+3n(n-1)}{2}x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty}(2n^2+1)x^n\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 1.8 - Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x-2}{3x-2}\right)$$

precisandone l'insieme di convergenza.

Soluzione 1.8 - La funzione f può essere scritta nei seguenti modi

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{x-2}{3x-2}\right) &= \log(x-2) - \log(3x-2) \qquad \text{NO!!} \\
&= \log(2-x) - \log(2-3x) \qquad \text{SI!!}
\end{aligned}$$

Perché scartiamo il primo dei due? Chiaramente i due modi sono equivalenti, ma attenzione, l'esercizio chiede lo sviluppo in $x = 0$ e le funzioni $\log(x-2)$, $\log(3x-2)$ non sono definite per tale valore, mentre $\log(2-x)$ e $\log(2-3x)$ si. Per esercizio, e anche per convincersi di quanto appena detto, disegnare i grafici di $\log(\frac{x-2}{3x-2})$, $\log(x-2)$, $\log(3x-2)$, $\log(2-x)$ e $\log(2-3x)$.
Abbiamo trasferito quindi il problema nello scrivere lo sviluppo delle due funzioni $\log(2-x)$ e $\log(2-3x)$. Si ha, per $|x/2| < 1$,

$$\frac{d}{dx}\log(2-x) = -\frac{1}{2-x} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

Integrando tra 0 e x, con $|x| < 2$, poiché la serie sopra converge uniformemente

$$\log(2-t)\Big|_0^x = -\frac{1}{2}\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n dt = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \left(\frac{t}{2}\right)^n dt$$

e quindi

$$\log(2-x) - \log 2 = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{n+1}\,.$$

Analogamente si ottiene, per $|3x/2| < 1$ e quindi per $|x| < 2/3$,

$$\log(2-3x) - \log 2 = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}\,.$$

Concludendo:

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{x-2}{3x-2}\right) &= \log 2 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{n+1} - \log 2 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\frac{x^{n+1}}{n}\end{aligned}$$

e l'insieme di convergenza è l'intersezione degli insiemi sui quali convergono separatamente le due serie. Concludiamo che

$$\log\left[\frac{x-2}{3x-2}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{1}{2^n}\right]\frac{x^n}{n}$$

e la convergenza è puntuale in $[-2/3, 2/3)$, uniforme in tutti gli insiemi del tipo $[-2/3, a]$ con $a \in (-2/3, 2/3)$ e totale in tutti gli insiemi del tipo $[b, c]$ con $b, c \in (-2/3, 2/3)$, $b < c$.
Infatti una delle due serie converge puntualmente almeno in $(-2, 2)$ e l'altra almeno in $(-2/3, 2/3) \subset (-2, 2)$, quindi la serie converge in $(-2/3, 2/3)$ e non converge in $(-\infty, -2/3) \cup (2/3, +\infty)$ (per verifica calcolare il limite della radice n-esima dei coefficienti). Negli estremi: per $x = 2/3$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n3^n}\right]$$

che diverge a $+\infty$, mentre per $x = -2/3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n3^n}\right].$$

È chiaramente una serie a segni alterni. Per verificare la monotonia in n dei coefficienti in valore assoluto si può, ad esempio, considerare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x3^x} = \frac{3^x - 1}{x3^x}$$

e derivarla per vedere se è descrescente (se lo è, in particolare sarà decrescente la successione dei coefficienti).

$$f'(x) = \frac{3^x[x \log 3 - (3^x - 1)]}{x^2 3^{2x}} < 0 \qquad \text{per } x \neq 0$$

perché $3^x - 1 > x \log 3$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$ (derivando ulteriormente). Vediamo la convergenza uniforme: per x negativo una stima del resto è data da

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n3^n}\right|$$

che ovviamente tende a zero. Per la totale si ha che per $x \in [-a, a]$, con $0 < a < 2/3$, la serie in valore assoluto può essere stimata con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{3}{2}a\right)^n - \frac{a^n}{2^n}\right]\frac{1}{n}$$

che converge.