Lezione n-1

Integrali

Esercizio 0.1 - Integrare la funzione $f(x,y) = y(x^2 + \operatorname{sen} x) + e^x$ sull'insieme $Q = (0,\pi) \times (0,3)$.

Soluzione 0.1 - Essendo il dominio un rettangolo si può scrivere

$$\int_Q f(x,y)dxdy = \int_0^\pi \Big(\int_0^3 f(x,y)dy\Big)dx = \int_0^3 \Big(\int_0^\pi f(x,y)dx\Big)dy$$

e integrare indifferentemente prima rispetto ad una variabile e poi rispetto all'altra. Scegliamo di integrare prima rispetto alla variabile y:

$$\begin{aligned}
\int_Q f(x,y)dxdy &= \int_0^\pi \Big(\int_0^3 [y(x^2 + \operatorname{sen} x) + e^x]dy\Big)dx \\
&= \int_0^\pi \Big(\frac{y^2x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\operatorname{sen} x + ye^x\Big)\Big|_0^3 dx \\
&= \int_0^\pi \Big(\frac{9x^2}{2} + \frac{9}{2}\operatorname{sen} x + 3e^x\Big)dx \\
&= \Big(\frac{9x^3}{6} - \frac{9}{2}\cos x + 3e^x\Big)\Big|_0^\pi \\
&= \frac{9\pi^3}{6} + \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 3e^\pi - 3\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 0.2 - Calcolare l'integrale

$$\int_E (x^2 - 3y^2)\operatorname{sen}(xy)dxdy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geqslant -3\,,\ y \leqslant 3\,,\ y \geqslant x\}$.

Soluzione 0.2 - Il dominio di integrazione è normale rispetto ad entrambe le variabili; scrivendo

$$\int_E (x^2 - 3y^2)\,\mathrm{sen}\,(xy)dxdy = \int_E x^2\,\mathrm{sen}\,(xy)dxdy - 3\int_E y^2\,\mathrm{sen}\,(xy)dxdy$$

conviene tenere nel primo integrale come variabile libera la x, mentre nel secondo conviene tenere come variabile libera la y; quindi

$$\begin{aligned}\int_E (x^2 - 3y^2)\,\mathrm{sen}\,(xy)dxdy &= \int_{-3}^{3} x^2 \int_x^3 \mathrm{sen}\,(xy)dydx + \\ &\quad -3\int_{-3}^{3} y^2 \int_{-3}^{y} \mathrm{sen}\,(xy)dxdy \\ &= \int_{-3}^{3} (x\cos x^2 - x\cos 3x)dx + \\ &\quad -3\int_{-3}^{3} (y\cos 3y - y\cos y^2)dy = 0,\end{aligned}$$

in quanto integrali di funzioni dispari su intervalli simmetrici rispetto all'origine.

Esercizio 0.3 - Calcolare $\displaystyle\int_E x dxdy$ dove $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\,, x^2 + y^2 \geqslant 1\,, 0 \leqslant y \leqslant 1\,, x \geqslant 0\}$.

Soluzione 0.3 - Se scegliamo x come variabile libera dobbiamo spezzare in tre l'integrale (in tre insiemi come indicato in Figura 1). Conviene quindi scegliere y come variabile libera:

$$\begin{aligned}\int_E f(x, y)dxdy &= \int_0^1 \Big(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} x dx\Big)dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(4 - y^2 - (1 - y^2))dy = \frac{3}{2}\,.\end{aligned}$$

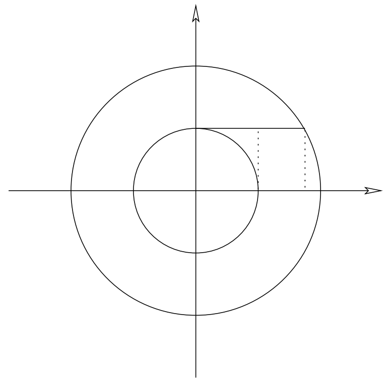

Figura 1:

Esercizio 0.4 - Calcolare $\displaystyle\int_E (x^2+y)dxdy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant x^2\,,\ 0 \leqslant x \leqslant 2\}$.

Soluzione 0.4 - L'insieme E è quello rappresentato in Figura 2. Scegliendo

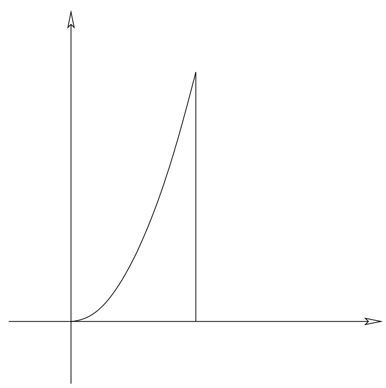

Figura 2:

x come variabile libera si può scrivere l'integrale

$$\int_0^2 dx\Big(\int_0^{x^2} (x^2+y)dy\Big)$$

che diventa

$$\int_0^2 dx\Big(x^2y+\frac{y^2}{2}\Big)\Big|_{y=0}^{y=x^2} = \int_0^2 \frac{3}{2}x^4 dx = \frac{48}{5}\,.$$

Scegliendo y come variabile libera l'integrale diventa (svolgerlo per esercizio)

$$\int_0^4 dy\Big(\int_{\sqrt{y}}^2 (x^2+y)dx\Big)\,.$$

Esercizio 0.5 - Calcolare $\displaystyle\int_E (x+y)dxdy$ dove $E=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid 0<x<y<2x\,,1<xy<2\}$.

Soluzione 0.5 - L'insieme E è quello in Figura 3. Si può svolgere il

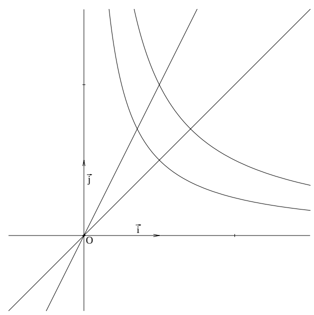

Figura 3:

calcolo in coordianate cartesiane, ma è più semplice effettuare il cambio di coordinate

$$u=xy\,,\qquad v=\frac{y}{x}$$

da cui si ricava che

$$x=\sqrt{\frac{u}{v}}\,,\qquad y=\sqrt{uv}\,.$$

Lo jacobiano di tale trasformazione è dato da $1/2v$ per cui si ottiene

$$\int_1^2 dv\int_1^2 du\Big(\sqrt{uv}+\sqrt{\frac{u}{v}}\Big)\frac{1}{2v}$$

che svolto dà il risultato.

Esercizio 0.6 - Trovare il volume del tetraedro T di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

Soluzione 0.6 - Il tetraedro è il solido delimitato dai quattro piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ e rappresentato in Figura 4. Per calcolare il

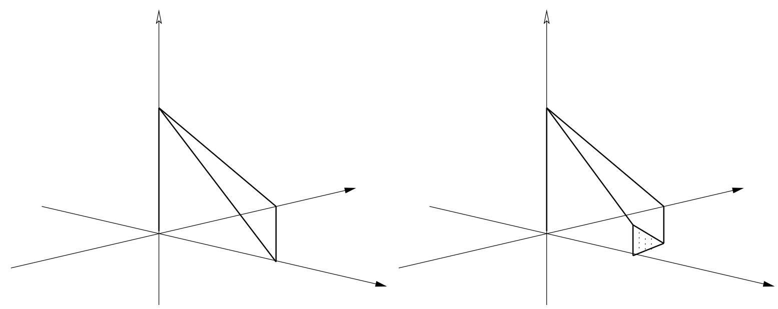

Figura 4:

volume di un solido S (e in generale la misura n-dimensionale di un aperto in $\mathbf{R}^n$) si può calcolare l'integrale della funzione 1 sull'insieme S. Per cui valutiamo

$$\int_T dxdydz\,.$$

Scegliendo x come variabile libera si hanno le limitazioni $0 \leqslant x \leqslant 1$. Per x fissato ora esprimiamo gli estremi per y e z (si veda il secondo disegno in Figura 4). Scegliendo y si ottiene $0 \leqslant y \leqslant 1 - x$ e infine $0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y$. Quindi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\,(T) &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy(1-x-y) \\
&= \int_0^1 dx\,(y - xy - y^2/2)\Big|_{y=0}^{y=1-x} \\
&= \int_0^1 \Big[1 - 2x + x^2 - \frac{x^2-2x+1}{2}\Big] dx = \frac{1}{6}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 0.7 - Determinare il volume del toro di raggio R ottenuto ruotando una circonferenza di raggio r.

Soluzione 0.7 - Il toro è una figura la cui superficie può essere ottenuta ruotando una circonferenza di raggio r su una circonferenza di raggio R ortogonale alla prima, $0 < r < R$ per ottenere una figura come quella a sinistra in Figura 5. In generale per calcolare il volume di un solido

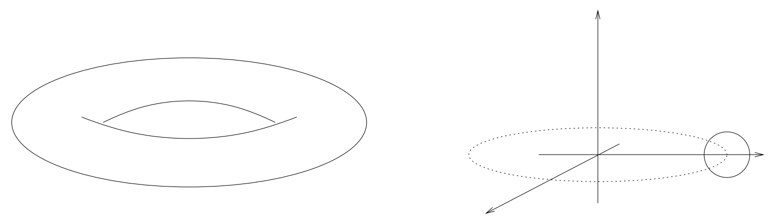

Figura 5:

di rotazione, cioè un solido la cui superficie si ottiene ruotando una curva $(z, f(z))$ nel piano con $f > 0$ (si veda la Figura 6), si possono usare le coordinate cilindriche. Considerando $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, $f \geqslant 0$, e il solido

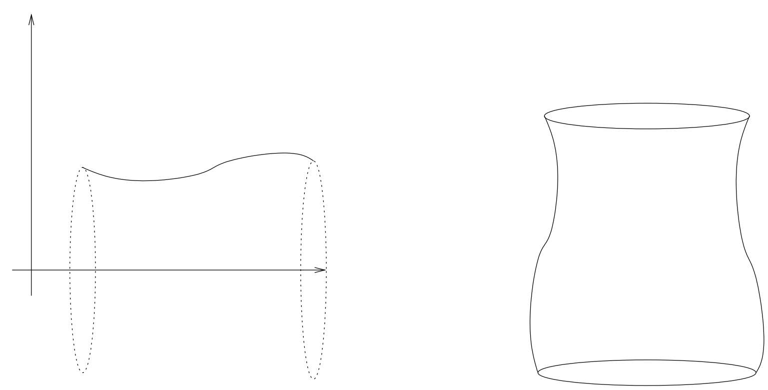

Figura 6:

ottenuto ruotando il grafico di f, descriviamo il solido con le coordinate

$$(\rho, \vartheta, z) \mapsto (\rho \cos \vartheta, \rho \operatorname{sen} \vartheta, z)$$

il cui jacobiano è ρ. Se denotiamo con S il solido, integrando si ha

$$\mathrm{Vol}(S) = \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{f(z)} \rho \, d\rho = \pi \int_a^b f^2(z) dz \, .$$

Per calcolare il volume del toro consideriamo quindi le funzioni $f(z) = \sqrt{r^2 - z^2} + R$ e $g(z) = -\sqrt{r^2 - z^2}$ definite tra $-r$ e r valutando prima l'integrale di f^2 al quale sottraiamo l'integrale di g^2. Si ha quindi

$$\pi \int_{-r}^{r} [f^2(z) - g^2(z)]dz = 4R\pi^2 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - z^2}dz\,.$$

Si noti che l'integrale da calcolare fornisce l'area del semicerchio, per cui il volume del toro è dato da

$$4R\pi \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi^2 R r^2\,.$$

Si noti che questa quantità è data dal prodotto dell'area del cerchio piccolo πr^2 moltiplicata per la lunghezza della circonferenza grande $2\pi R$.

Esercizio 0.8 - Calcolare il volume del solido

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\,, x^2 + y^2 - 2 \leqslant z \leqslant 4 - x - y\}.$$

Soluzione 0.8 - L'insieme di sui si vuole calcolare il volume è costituito tra la regione dello spazio in cui z è compresa tra il paraboloide $x^2 + y^2 - 2$ e il piano $4 - x - y$, mentre x e y appartengono alla palla B centrata nell'origine e di raggio 1. Siccome il paraboloide e il piano si incontrano quando x e y appartengono alla circonferenza centrata in $(-1/2, 1/2)$ e raggio $\sqrt{13/2}$ (circonferenza che contiene la palla B), abbiamo che il volume può essere calcolato come integrale triplo della funzione $f(x,y,z) = 1$ sul dominio E che è normale rispetto alla variabile z. Otteniamo quindi che

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_E dxdydz = \int_B dxdy \int_{x^2+y^2-2}^{4-x-y} dz = \int_B (6 - x - y - x^2 - y^2)dxdy$$

Quest'ultimo integrale può infine essere calcolato utilizzando le coordinate polari, in modo da ottenere

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 (6 - \varrho\cos\vartheta - \varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta - \varrho^2)\varrho d\varrho = \frac{11}{2}\pi.$$

Esercizio 0.9 - Calcolare $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}dx$ (suggerimento: calcolare in $\mathbf{R}^2$ l'integrale di $e^{-x^2-y^2}$).

Soluzione 0.9 - La funzione $f(x) = e^{-x^2}$ non ammette un'esplicita primitiva. Per calcolare quest'integrale usiamo un trucco: passiamo attraverso un integrale in $\mathbf{R}^2$. Valutiamo

$$\int_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy\,.$$

Usando le coordinate polari, il cui jacobiano è ρ, otteniamo

$$\int_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2}\,d\rho = \pi\,.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy &= \int_{\mathbf{R}} dx\Big(\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2-y^2}\,dy\Big) = \\ &= \int_{\mathbf{R}} dx\Big(e^{-x^2}\int_{\mathbf{R}} e^{-y^2}\,dy\Big) = \\ &= \Big(\int_{\mathbf{R}} e^{-t^2}\,dt\Big)^2\end{aligned}$$

da cui si conclude che $\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ e più in generale

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx = (\pi)^{n/2}\,.$$

Esercizio 0.10 - Determinare l'area dell'ellisse racchiusa dalla curva $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Soluzione 0.10 - Uso le coordinate polari modificate che possiamo chiamare coordinate ellittiche

$$(\rho, \vartheta) \mapsto (a\rho\cos\vartheta, b\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$$

che ha jacobiano $ab\rho$. L'area diventa

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \rho ab\,d\rho = \pi ab\,.$$

ESERCIZIO 0.11 - Determinare il volume della regione interna sia alla superficie

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$$

che alla superficie cilindrica

$$x^2 + (y-a)^2 = a^2 \, .$$

Soluzione 0.11 - Sfruttando la simmetria sia rispetto al piano x, y che rispetto al piano y, z il volume del solido risulta essere quattro volte il volume del solido delimitato inoltre dalle condizioni $x > 0$ e $z > 0$.
A questo punto usiamo le coordinate cilindriche con asse lungo l'asse z e centrate nell'origine: il cilindro è determinato dall'equazione

$$\rho^2 \cos^2 \vartheta + (\rho \operatorname{sen} \vartheta - a)^2 = a^2$$

che equivalentemente può essere scritto come

$$\rho(\rho - 2a \operatorname{sen} \vartheta) = 0$$

che ha soluzioni $\rho = 0$ e $\rho = 2a \operatorname{sen} \vartheta$. Quindi le limitazioni per le variabili sono

$$0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2 \, , \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant 2a \operatorname{sen} \vartheta \, .$$

Infine da $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ si ricava $z^2 = 4a^2 - \rho^2$ da cui le limitazioni sulla z diventano

$$0 \leqslant z \leqslant \sqrt{4a^2 - \rho^2} \, .$$

Quindi il volume è dato da

$$V = 4 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2a \operatorname{sen} \vartheta} d\rho \int_0^{\sqrt{4a^2 - \rho^2}} \rho dz$$

che fornisce, usando il fatto che per $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2$ $\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \vartheta} = \cos \vartheta$, il seguente risultato

$$V = \frac{16}{9}(3\pi - 4)a^3 \, .$$

ESERCIZIO 0.12 - Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_S \frac{x^2}{x^2 + z^2} dxdydz$ dove

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 < 2, x^2 - y^2 + z^2 < 0, y > 0 \right\} \, .$$

Soluzione 0.12 - Utilizziamo le coordinate cilindriche

$$x = \rho \cos \vartheta\,, \quad y = t\,, \quad z = \rho \operatorname{sen} \vartheta\,,$$

con $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ e $\rho \leqslant t \leqslant \sqrt{2-\rho^2}$. L'integrale diventa

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 d\rho \int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}} \left(\rho \frac{\rho^2 \cos^2 \vartheta}{\rho^2}\right) dt = (2\sqrt{2}-2)\frac{\pi}{3}\,.$$

In questo caso potrebbe sembrare più naturale utilizzare le coordinate sferiche: convincersi che non è così.