

Parte II

Equazioni differenziali e funzioni di più variabili reali

Nella seconda parte del corso, viene completato lo studio delle funzioni di una variabile reale con ulteriori capitoli riguardanti lo studio delle successioni e delle serie di funzioni e quello delle equazioni differenziali ordinarie; inoltre, vengono illustrati alcuni aspetti riguardanti le funzioni di più variabili reali, quali il calcolo differenziale, lo studio dei massimi e minimi relativi e vincolati e lo studio degli integrali multipli corredato da alcuni strumenti elementari di teoria della misura.

Capitolo 9

Successioni e serie di funzioni

9.1 Convergenza puntuale ed uniforme

Sia X un sottoinsieme non vuoto di \mathbb{R} e sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali definite in X .

Fissato un elemento $x_0 \in X$, si dice che la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente in x_0 se la successione numerica $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente.

Inoltre, se $A \subset X$, si dice che la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è *puntualmente convergente in A* (oppure *semplicemente convergente in A* oppure anche *convergente in A*) se essa è convergente in ogni elemento di A . Se $A = X$ si dice che $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è *puntualmente convergente* oppure *semplicemente convergente*.

Si supponga che la successione di funzioni $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sia puntualmente convergente; allora si può considerare la funzione reale $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in X$,

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x). \quad (9.1.1)$$

Essa viene denominata *limite puntuale* (oppure *limite semplice*) della successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e viene denotata con

$$f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \quad \text{puntualmente.}$$

Esplicitamente, la condizione precedente pertanto significa

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq \nu : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \quad (9.1.2)$$

Tale tipo di convergenza tuttavia consente l'applicazione dei risultati ottenuti sulle successioni numeriche in ogni punto prefissato ma non ci si può aspettare che vengano conservate per la funzione f alcune proprietà qualitative delle funzioni f_n , quali la continuità, la derivabilità in un punto o globale e l'integrabilità.

Per lo studio di tali proprietà della funzione limite è più efficace il concetto di convergenza uniforme in cui si pretende che nella condizione (9.1.2) il numero naturale ν non dipenda dall'elemento $x \in X$ ma solamente da $\varepsilon > 0$.

Precisamente, se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni reali definite in X ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è una ulteriore funzione, si dice che $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è *uniformemente convergente* verso f (oppure che f è il *limite uniforme* della successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$) se è verificata la seguente condizione:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall x \in X \forall n \geq \nu : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad (9.1.3)$$

oppure, equivalentemente,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq \nu : \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

In tal caso, si scrive

$$f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \quad \text{uniformemente.}$$

Inoltre, si dice che la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è uniformemente convergente in un sottoinsieme A di X se la successione $((f_n)|_A)_{n \in \mathbb{N}}$ delle restrizioni all'insieme A è uniformemente convergente.

▷ Evidentemente, la condizione (9.1.3) implica la (9.1.2) e pertanto, se la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è uniformemente convergente verso f , essa è anche puntualmente convergente verso f .

Viceversa, se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente verso f , non è detto che la convergenza sia uniforme.

▷ Ad esempio, si consideri, per ogni $n \geq 1$, la funzione reale $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) := \sin(x) + x/n$. Si riconosce facilmente che $\sin = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$. Infatti, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_0/n = 0$ e conseguentemente $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) = \sin x_0$. Tuttavia, fissato $\varepsilon > 0$ e imponendo la condizione $|\sin x - f_n(x)| < \varepsilon$, si trova $|x|/n < \varepsilon$, che è soddisfatta solamente nell'intervallo $] -n\varepsilon, n\varepsilon[$ e non in tutto \mathbb{R} ; si conclude che la convergenza non può essere uniforme.

Si può completare la discussione della convergenza della successione di funzioni $(f_n)_{n \geq 1}$ osservando che la convergenza risulta uniforme in ogni intervallo I limitato di \mathbb{R} . Infatti, posto $r := \sup_{x \in I} |x|$ si ha $I \subset [-r, r]$ e conseguentemente, per ogni $n \geq 1$, $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in I} |x|/n \leq r/n$; pertanto, fissato $\varepsilon > 0$ e considerato $\nu \geq 1$ tale che $\nu \geq r\varepsilon$, si ha $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ for ogni $n \geq \nu$, da cui l'uniforme convergenza in I .

▷ Come ulteriore esempio si consideri, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione reale $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in [0, 1]$, $f_n(x) := x^n$ e sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) := \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Allora, la successione di funzioni $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente verso f . Tuttavia la convergenza non può essere uniforme. Si supponga infatti per assurdo che fissato $\varepsilon = 1/3$, esista $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq \nu$ e per ogni $x \in [0, 1]$, si abbia $|f_n(x) - f(x)| \leq 1/3$; allora, in particolare, considerando $n = \nu$ ed $x := \sqrt[\nu]{2/3}$, si dovrebbe avere $2/3 = |f_\nu(x) - f(x)| \leq 1/3$ da cui un assurdo. Quindi $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non converge uniformemente verso f ; in questo caso, si può riconoscere che, per ogni $0 < a < 1$, la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente verso f in $[0, a]$.

▷ Si osserva che se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sono successioni di funzioni di X in \mathbb{R} convergenti puntualmente verso una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e rispettivamente $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, allora la successione di funzioni $(f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente verso $f + g$ e la successione di funzioni $(f_n \cdot g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente verso $f \cdot g$. Lo stesso risultato continua a valere se si sostituisce la convergenza uniforme a quella puntuale.

9.2 Proprietà del limite di una successione di funzioni

Si studia ora il comportamento della funzione limite f di una successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni uniformemente convergente, nelle ipotesi in cui ogni f_n verifichi opportune condizioni.

Il primo risultato è un teorema di carattere generale che stabilisce una formula di inversione dei limiti per le successioni di funzioni uniformemente convergenti.

Teorema 9.2.1 (Teorema di inversione dei limiti)

Siano X un sottoinsieme non vuoto di \mathbb{R} , x_0 un punto di accumulazione per X ed $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali definite in X . Si supponga che

i) La successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente verso una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$;

ii) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \ell_n \in \mathbb{R}$.

Allora, la successione $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente e inoltre, posto $\ell := \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n$, risulta $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

DIMOSTRAZIONE. Si dimostra innanzitutto che la successione $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente, facendo vedere che essa verifica la seguente condizione di Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n, m \geq \nu : |\ell_n - \ell_m| \leq \varepsilon.$$

Si fissi a tal fine $\varepsilon > 0$ e, per la uniforme convergenza di $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verso f , si consideri $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq \nu$ e per ogni $x \in X$, si abbia $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/4$. Si dimostra ora che, per ogni $n, m \geq \nu$, risulta $|\ell_n - \ell_m| \leq \varepsilon$ e ciò completerà la dimostrazione. Si fissino pertanto $n, m \geq \nu$; dall'ipotesi i), si possono trovare un intorno J_1 di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J_1 \setminus \{x_0\}$, $|f_n(x) - \ell_n| \leq \varepsilon/4$ ed un intorno J_2 di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J_2 \setminus \{x_0\}$, $|f_m(x) - \ell_m| \leq \varepsilon/4$. Allora, fissato $x \in X \cap J_1 \cap J_2 \setminus \{x_0\}$, risulta

$$\begin{aligned} |\ell_n - \ell_m| &= |\ell_n - f_n(x) - (\ell_m - f_m(x)) + f_n(x) - f(x) - (f_m(x) - f(x))| \\ &\leq |\ell_n - f_n(x)| + |\ell_m - f_m(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Si è così dimostrato che la successione $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente. Si ponga $\ell := \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n$. Sia ora $\varepsilon > 0$; poichè $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è uniformemente convergente verso f , esiste $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq \nu_1$ e per ogni $x \in X$, si abbia $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3$. Inoltre, la successione $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge verso ℓ e quindi esiste $\nu_2 \in \mathbb{N}$ tale che $|\ell_n - \ell| \leq \varepsilon/3$ per ogni $n \geq \nu_2$. Si fissi ora $n \geq \max\{\nu_1, \nu_2\}$; poichè f_n converge verso ℓ_n per $x \rightarrow x_0$, si può trovare un intorno J di x_0 tale che, per ogni $x \in X \cap J \setminus \{x_0\}$, risulti $|f_n(x) - \ell_n| \leq \varepsilon/3$. Conseguentemente, per ogni $x \in X \cap J \setminus \{x_0\}$, risulta anche $|f(x) - \ell| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \ell_n| + |\ell_n - \ell| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$; dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, segue quindi la tesi. \square

► La tesi del Teorema 9.2.1 precedente esprime la possibilità di invertire i limiti rispetto alle variabili $n \rightarrow +\infty$ ed $x \rightarrow x_0$; infatti, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

Tale inversione dei limiti non vale, in generale, se la successione di funzioni non è uniformemente convergente; ad esempio, risulta evidentemente $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^n = 1$ mentre $\lim_{x \rightarrow 1^-} \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$.

Come ulteriore conseguenza del risultato precedente, si può ottenere la proprietà di continuità del limite uniforme.

Teorema 9.2.2 *Siano X un sottoinsieme di \mathbb{R} , $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per X ed $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali definite in X e continue nel punto x_0 . Se la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente verso una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, allora anche f risulta continua nel punto x_0 .*

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il Teorema 9.2.1 precedente tenendo presente che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$. \square

Ovviamente, se ogni funzione f_n è continua in un sottoinsieme A di X , allora anche il limite uniforme f risulta continuo in A ; in particolare, se ogni f_n è continua, il limite uniforme f è anch'esso continuo.

Quest'ultimo risultato può in alcuni casi essere utile per dimostrare che una successione di funzioni non può essere uniformemente convergente verso una funzione f . Ad esempio, si consideri, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = |\sin(\pi x)|^n$. Allora, la successione di funzioni $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente verso la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che assume il valore 1 in \mathbb{Z} e 0 in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; allora, la convergenza non può essere uniforme in quanto, per ogni $n \in \mathbb{N}$, f_n è continua mentre f evidentemente non lo è.

Si considera ora il comportamento del limite di una successione di funzioni rispetto alle proprietà di integrabilità e derivabilità. Si hanno i seguenti risultati di carattere generale.

Teorema 9.2.3 (Passaggio al limite sotto il segno di integrale)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ ed $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali continue in $[a, b]$ uniformemente convergente verso una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Allora f è integrabile in $[a, b]$ ed inoltre

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx .$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè, per ogni $n \in \mathbb{N}$, f_n è una funzione continua, dal Teorema 9.2.2 precedente segue che anche f è continua e quindi integrabile in $[a, b]$. Inoltre, fissato $\varepsilon > 0$, dalla uniforme convergenza di $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verso f , segue l'esistenza di $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq \nu$ e per ogni $x \in [a, b]$, si abbia $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/(b-a)$; pertanto, per ogni $n \geq \nu$, si ha

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b dx = \varepsilon ,$$

e ciò, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, dimostra la tesi. \square

La denominazione attribuita al teorema precedente deriva dal fatto che esso può essere espresso dicendo che il limite uniforme (se esistente) di una successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni continue in un intervallo $[a, b]$, risulta integrabile in $[a, b]$ e si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) dx .$$

Teorema 9.2.4 (Passaggio al limite sotto il segno di derivata)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ ed $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali derivabili e con derivata continua in $[a, b]$. Si supponga che

- i) La successione delle derivate $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è uniformemente convergente verso una funzione $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
- ii) Esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che la successione $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ sia convergente.

Allora, la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è uniformemente convergente e, denotato con $f := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ il suo limite uniforme, si ha che f è derivabile in $[a, b]$ e $f' = g$.

DIMOSTRAZIONE. Si ponga innanzitutto $\ell_0 := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0)$. Si osserva che, dal Teorema 9.2.2, la funzione g deve essere continua e quindi la funzione integrale $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) := \ell_0 + \int_{x_0}^x g(t) dt$$

risulta derivabile e la sua derivata coincide con g .

Resta da dimostrare pertanto che la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente verso f .

Sia $\varepsilon > 0$; poiché $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente verso g , si può trovare $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq \nu_1$ e per ogni $x \in [a, b]$, risulti $|f'_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon / (2(b-a))$; inoltre, poiché la successione $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge verso ℓ_0 , esiste $\nu_2 \in \mathbb{N}$ tale che $|f_n(x_0) - \ell_0| \leq \varepsilon / 2$ per ogni $n \geq \nu_2$.

Allora, considerato $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, per ogni $n \geq \nu$ e per ogni $x \in [a, b]$, risulta

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(x) - \ell_0 - \int_{x_0}^x g(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x f'_n(t) dt + f_n(x_0) - \ell_0 - \int_{x_0}^x g(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f'_n(t) - g(t)| dt \right| + |f_n(x_0) - \ell_0| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |x - x_0| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

e ciò per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, dimostra la tesi. □

Anche in questo caso la denominazione del teorema è giustificata dal fatto che nelle ipotesi previste si ottiene

$$D \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} D(f_n).$$

9.3 Serie di funzioni

Si consideri un sottoinsieme non vuoto X di \mathbb{R} e sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali definite in X ; per ogni $n \in \mathbb{N}$, si consideri la funzione

$$s_n := \sum_{k=0}^n f_k.$$

Essa viene denominata *somma parziale n-esima* della successione di funzioni $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e la successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ viene denominata *serie*—di funzioni di termine generale f_n (oppure successione delle somme parziali della successione di funzioni $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$) e viene denotata con il simbolo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n.$$

Si assume la seguente definizione.

▷ Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali definite in un sottoinsieme X di \mathbb{R} . Si dice che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \tag{9.3.1}$$

è convergente in un punto $x_0 \in X$ se la successione $(s_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ delle somme parziali calcolate in x_0 è una serie numerica convergente. Analogamente, si dice che la serie (9.3.1) è *convergente puntualmente* (oppure *convergente semplicemente* oppure *convergente*) in un sottoinsieme non vuoto A di X se la successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ delle somme parziali è convergente in A . Infine, si dice che la serie (9.3.1) è convergente (puntualmente oppure semplicemente) (in X) se la successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ delle somme parziali è convergente.

Se la serie (9.3.1) è convergente, si può considerare la funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in X$,

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x) \quad (= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f_k(x));$$

tale funzione viene denominata *somma della serie* di termine generale f_n e, per indicare ciò, si scrive $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Come si può notare, si è utilizzato lo stesso simbolo per indicare sia la serie di termine generale f_n , che la sua somma nel caso in cui essa risulti convergente; sarà comunque chiaro dal contesto in cui si opera se il simbolo $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ si deve intendere come la successione delle somme parziali $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oppure come il limite di tale successione di funzioni.

▷ Siano $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni reali definite in un insieme X e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una ulteriore funzione. Allora, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge puntualmente verso f se e solo se è soddisfatta la seguente condizione

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq \nu : \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| \leq \varepsilon .$$

Anche per le serie di funzioni si ha una nozione di convergenza uniforme, di seguito precisata.

▷ Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali definite in un insieme X e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una ulteriore funzione. Si dice che la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente verso f e, in tal caso, si scrive

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \quad \text{uniformemente,}$$

se la successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ delle somme parziali è uniformemente convergente verso f .

Pertanto, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente verso f se e solo se è soddisfatta la condizione seguente

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq \nu \forall x \in X : \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| \leq \varepsilon ,$$

che può essere scritta anche al seguente modo

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq \nu : \sup_{x \in X} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| \leq \varepsilon ,$$

la quale a sua volta è equivalente a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in X} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| = 0 ;$$

Da quanto visto sulla convergenza di successioni di funzioni, consegue evidentemente che una serie di funzioni uniformemente convergente risulta anche convergente. Le nozioni di convergenza e di convergenza uniforme non sono tuttavia equivalenti, come si riconosce con qualche semplice esempio.

▷ Si consideri, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione reale $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in [0, 1[$, $f_n(x) := x^n$ e sia $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in [0, 1[$, $f(x) := 1/(1-x)$.

Fissato $x \in [0, 1[$, risulta $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x)| = 0$ e pertanto la serie di termine generale f_n converge verso f puntualmente nell'intervallo $[0, 1[$.

Poichè, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x \in [0, 1[} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| = \sup_{x \in [0, 1[} \left| \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right| = \sup_{x \in [0, 1[} \frac{x^{n+1}}{1-x} = +\infty,$$

la serie di termine generale f_n non può convergere uniformemente verso f in $[0, 1[$. Tuttavia, fissato un elemento $a \in [0, 1[$, si riconosce che la convergenza della serie è uniforme nell'intervallo $[0, a]$.

Infatti, in questo caso risulta

$$\sup_{x \in [0, a]} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| = \sup_{x \in [0, a]} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{a^{n+1}}{1-a},$$

in quanto la funzione $x^{n+1}/(1-x)$ è strettamente crescente in $[0, a]$ e quindi assume il massimo in a . Poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{n+1}/(1-a) = 0$, è soddisfatta la condizione di convergenza uniforme in $[0, a]$.

Dal teorema di inversione dei limiti e dai teoremi di passaggio al limite per le successioni di funzioni uniformemente convergenti, si ottengono i seguenti risultati, la cui dimostrazione si ottiene in ogni caso da quella già vista per le successioni di funzioni considerando la successione delle somme parziali della serie assegnata.

Teorema 9.3.1 (Teorema di inversione dei limiti per le serie)

Siano X un sottoinsieme non vuoto di \mathbb{R} , x_0 un punto di accumulazione per X ed $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali definite in X . Si supponga che

i) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente verso una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$;

ii) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_n \in \mathbb{R}$;

Allora la serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ è convergente e posto $\ell := \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$, risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

Nelle ipotesi del risultato precedente, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

Teorema 9.3.2 *Siano X un sottoinsieme di \mathbb{R} , $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per X ed $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali definite in X e continue nel punto x_0 . Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente verso una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, allora anche f risulta continua nel punto x_0 .*

Teorema 9.3.3 (Teorema di integrazione termine a termine)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ ed $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali continue in $[a, b]$ tali che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sia uniformemente convergente verso una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Allora f è integrabile in $[a, b]$ ed inoltre

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx .$$

Nelle ipotesi del teorema precedente, si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx .$$

Teorema 9.3.4 (Teorema di derivazione termine a termine)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ ed $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali derivabili e con derivata continua in $[a, b]$. Si supponga che

- i) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$ è uniformemente convergente verso una funzione $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.*
- ii) Esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che la serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0)$ sia convergente.*

Allora, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ è uniformemente convergente e, denotato con $f := \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ il suo limite uniforme, si ha che f è derivabile in $[a, b]$ e $f' = g$.

Anche ora nelle ipotesi del teorema precedente si ha

$$D \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} D(f_n) .$$

▷ Si conclude la presente sezione introducendo alcune nozioni frequentemente utilizzate nello studio della convergenza delle serie di funzioni.

▷ Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali definite in un insieme X . Si dice che la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ di termine generale f_n è *assolutamente*

convergente (puntualmente oppure rispettivamente uniformemente) se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|$ di termine generale $|f_n|$ è convergente (puntualmente oppure rispettivamente uniformemente) (in X).

▷ Ovviamente ogni serie di funzioni assolutamente convergente (puntualmente oppure rispettivamente uniformemente) risulta convergente (puntualmente oppure rispettivamente uniformemente), mentre il viceversa non vale.

▷ Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali limitate definite in un insieme X e si ponga che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\| := \sup_{x \in X} |f_n(x)|$. Si dice che la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ di termine generale f_n è *totalmente convergente* se la serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|$ è convergente.

▷ (*Criterio di Weierstrass per la totale convergenza*) Si riconosce facilmente che una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ è totalmente convergente se e solo se esiste una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di numeri reali (positivi) tale che la serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ sia convergente ed inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in X$, risulti $|f_n(x)| \leq a_n$.

▷ Ogni serie di funzioni totalmente convergente risulta anche uniformemente convergente.

Si ricorda innanzitutto che una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente se e solo se la successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ delle sue somme parziali è convergente e quindi se e solo se $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verifica la condizione di Cauchy, che può essere scritta al modo seguente

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq \nu, \forall p \in \mathbb{N} : |s_{n+p} - s_n| \leq \varepsilon,$$

e da ciò, tenendo presente che $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = \sum_{k=0}^{n+p} a_k - \sum_{k=0}^n a_k = s_{n+p} - s_n$, si ottiene la condizione

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq \nu, \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \varepsilon.$$

Conseguentemente, una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, con $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ converge puntualmente (in X) se e solo se per ogni $x \in X$ la serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ verifica la condizione di Cauchy precedente, e cioè se e solo se

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq \nu, \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

L'indice ν previsto sopra dipende da $x \in X$ oltre che da $\varepsilon > 0$. La convergenza uniforme della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sarà conseguentemente caratterizzata dalla seguente condizione di Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq \nu, \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in X : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

A questo punto, la condizione di Cauchy per la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|$ si esprime al modo seguente

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq \nu, \forall p \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\| \leq \varepsilon,$$

e da ciò si ottiene la condizione

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq \nu, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in X : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \varepsilon,$$

che è la condizione di Cauchy per l'uniforme convergenza.

9.4 Serie di potenze

Si considerano ora brevemente alcune serie di tipo particolare, ma di uso molto frequente.

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ ed $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Si denomina *serie di potenze* di centro x_0 e di termine generale a_n , $n \in \mathbb{N}$, la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

(quindi, si considera la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, dove, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è definita ponendo $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$ per ogni $x \in \mathbb{R}$); se $n = 0$ si assume per convenzione $(x - x_0)^n = 1$ anche quando $x = x_0$.

Lo studio della convergenza di una serie di potenze è sostanzialmente basato sul seguente risultato di importanza fondamentale.

Teorema 9.4.1 *Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali e si consideri la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$. Se la serie converge in un punto $x_1 \in \mathbb{R}$ e se $x_2 \in \mathbb{R}$ verifica la seguente condizione $|x_2 - x_0| < |x_1 - x_0|$ (cioè la distanza di x_2 da x_0 è minore di quella di x_1 da x_0), allora la serie è assolutamente convergente anche nel punto x_2 . Pertanto, la serie converge assolutamente nell'intervallo $]x_0 - r_1, x_0 + r_1[$, con $r_1 := |x_1 - x_0|$.*

Inoltre, la convergenza è totale (e quindi uniforme) in ogni intervallo $[x_0 - r, x_0 + r]$, con $0 < r < |x_1 - x_0|$.

DIMOSTRAZIONE. Poichè la serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ è convergente, la successione $(a_n(x_1 - x_0)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ deve essere infinitesima, e conseguentemente limitata.¹ Quindi, deve

¹In realtà, si potrebbe considerare l'ipotesi leggermente più lieve che la successione $(a_n(x_1 - x_0)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sia limitata anziché supporre che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ sia convergente ed osservare, come appena dimostrato, che la convergenza della serie implica la limitatezza della successione $(a_n(x_1 - x_0)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

esistere $M \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si abbia $|a_n(x_1 - x_0)^n| \leq M$. Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$|a_n(x_2 - x_0)^n| = |a_n(x_1 - x_0)^n| \frac{|x_2 - x_0|^n}{|x_1 - x_0|^n} \leq M \left| \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} \right|^n.$$

A questo punto, si osserva che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_2 - x_0|^n / |x_1 - x_0|^n$ è convergente in quanto è una serie geometrica di ragione positiva e strettamente minore di 1, e quindi si può concludere che, per il criterio di confronto delle serie numeriche a termini positivi, anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(x_2 - x_0)^n|$ è convergente e quindi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x_2 - x_0)^n$ è assolutamente convergente.

Per quanto riguarda l'ultima parte della tesi, sia $0 < r < |x_1 - x_0|$; allora, per quanto dimostrato la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$ è convergente e, per ogni $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, si ha $|a_n(x - x_0)^n| \leq |a_n| r^n$; pertanto, la serie è totalmente convergente in $[x_0 - r, x_0 + r]$. \square

▷ Dalla proprietà precedente segue che l'insieme dei numeri reali per i quali una serie di potenze risulta convergente costituisce un intervallo di \mathbb{R} con centro x_0 ; tale intervallo potrebbe in generale anche ridursi al solo punto x_0 oppure coincidere con tutto \mathbb{R} e, negli altri casi, potrebbe contenere o meno uno o entrambi gli estremi.

Per studiare in modo più approfondito l'intervallo di convergenza di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$, conviene introdurre il *raggio di convergenza* R di una serie di potenze, definito nel modo seguente

$$R := \sup \left\{ \rho \in [0, +\infty[\mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n \text{ è convergente} \right\}. \quad (9.4.1)$$

▷ Si consideri una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ e si denoti con R il suo raggio di convergenza.

Si ha ovviamente $R \geq 0$ e può risultare eventualmente $R = +\infty$. Inoltre, dalla definizione di R e dal Teorema 9.4.1, si ottengono subito le seguenti proprietà di R :

1. Se $R = 0$, la serie converge nel punto x_0 e non converge in alcun altro numero reale.
2. Se $R = +\infty$, la serie converge puntualmente in ogni punto di \mathbb{R} ed inoltre la convergenza è uniforme in ogni intervallo limitato di \mathbb{R} .
3. Se $0 < R < +\infty$, la serie converge in ogni punto dell'intervallo aperto $]x_0 - R, x_0 + R[$, e non converge nei punti esterni all'intervallo chiuso $[x_0 - R, x_0 + R]$; nei punti $x_0 - R$ e $x_0 + R$, non si può dire nulla in generale e quindi le serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x_0 - R - x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n R^n,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x_0 + R - x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

devono essere esaminate caso per caso. Inoltre, la convergenza della serie è uniforme in ogni intervallo chiuso $[x_0 - r, x_0 + r]$, con $r < R$.

Il *Teorema di Abel*, di cui per brevità non si riporta la dimostrazione, asserisce che, se $0 < R < +\infty$ e se la serie di potenze converge anche nell'estremo $x_0 - R$ (rispettivamente, $x_0 + R$), allora la convergenza è uniforme in ogni intervallo $[x_0 - R, x_0 + r]$ (rispettivamente, $[x_0 - r, x_0 + R]$), con $0 < r < R$. Se la serie di potenze converge in entrambi gli estremi, la convergenza risulta uniforme in tutto l'intervallo $[x_0 - R, x_0 + R]$.

► Viste le proprietà precedenti, lo studio di una serie di potenze risulta quasi completamente determinato dalla conoscenza del suo raggio di convergenza.

Per determinare il raggio di convergenza di una serie di potenze, si possono usare i seguenti due criteri, che traggono spunto dagli analoghi criteri per le serie numeriche.

1. **(Criterio del rapporto)** Assegnata la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$, si supponga che esista il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell ;$$

Allora, si ha

$$R = \begin{cases} +\infty, & \ell = 0 ; \\ 0, & \ell = +\infty ; \\ \frac{1}{\ell}, & \ell \in]0, +\infty[. \end{cases} \quad (9.4.2)$$

2. **(Criterio della radice)**, Assegnata la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ si supponga che esista il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell ;$$

Allora, anche in questo caso, R viene dato dalla (9.4.2).

DIMOSTRAZIONE. Infatti, per quanto riguarda la prima proprietà, risulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}|}{|a_n(x - x_0)^n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x - x_0| = \ell |x - x_0| ,$$

e quindi, dal criterio del rapporto per le serie numeriche, segue che la serie è (assolutamente) convergente per $\ell |x - x_0| < 1$ (cioè $|x - x_0| < 1/\ell$ se $\ell \in]0, +\infty[$) ed è assolutamente divergente positivamente per $\ell |x - x_0| > 1$. Dalle proprietà del raggio di convergenza segue allora la tesi in ognuno dei casi previsti.

La dimostrazione della seconda parte è simile tenendo presente che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} |x - x_0| = \ell |x - x_0| ,$$

e applicando il criterio della radice per le serie numeriche anzichè quello del rapporto. \square

▷ Nel caso in cui nessuno dei due limiti previsti nel criterio del rapporto e della radice esista, si può riconoscere che R viene comunque dato dalla (9.4.2) con

$$\ell := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} .$$

▷ Seguono ora alcuni esempi.

1. Si consideri la serie geometrica di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n .$$

In questo caso $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; si può allora applicare facilmente sia il criterio della radice che del rapporto e si deduce che $R = 1$; quindi la serie converge per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$; nei punti 1 e -1 si ottengono le serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 1 , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$

che non sono convergenti (la prima è divergente positivamente in quanto a termini positivi). Pertanto si conclude che la serie converge puntualmente nell'intervallo $] -1, 1[$ e uniformemente in ogni intervallo $[-a, a]$ con $0 < a < 1$. In questo caso è possibile calcolare anche la somma della serie che, per le proprietà della serie geometrica è data da

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1 - x} , \quad -1 < x < 1 .$$

2. Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^3} (x - 1)^n .$$

In questo caso $a_n = 3^n/n^3$ per ogni $n \geq 1$ e $x_0 = 1$; applicando il criterio del rapporto, si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)^3} \frac{n^3}{3^n} = 3$$

e pertanto $R = 1/3$; quindi la serie converge per $|x - 1| < 1/3$ (cioè nell'intervallo $]1 - 1/3, 1 + 1/3[=]2/3, 4/3[$) e non converge per $|x - 1| > 1/3$. Nel punto $2/3$ si ottiene la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^3} \left(\frac{2}{3} - 1\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3}$$

che converge in quanto è una serie armonica generalizzata a segni alterni. Inoltre, nel punto $4/3$ si ottiene la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^3} \left(\frac{4}{3} - 1\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

che è anch'essa convergente in quanto è una serie armonica generalizzata con esponente maggiore di 1. In conclusione la serie converge in $[2/3, 4/3]$.

3. Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^n (x + 2)^n .$$

Dal criterio della radice, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

e quindi $R = 0$. Pertanto, la serie converge solo nel punto iniziale -2 .

4. Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (x - 1)^{2n} .$$

In questo caso i coefficienti a_n della serie di potenze sono dati da

$$a_n := \begin{cases} 0, & n \text{ dispari}; \\ 1, & n \text{ pari}; \end{cases}$$

pertanto il criterio del rapporto e quella radice non possono essere applicati; poiché i coefficienti valgono alternativamente 0 e 1 si riconosce tuttavia facilmente che $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ e quindi il raggio di convergenza della serie assegnata è 1.

9.5 Serie ottenute per derivazione ed integrazione

Sia assegnata una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n .$$

Allora la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n + 1) a_{n+1} (x - x_0)^n$$

viene denominata *serie ottenuta da* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ *per derivazione*, mentre la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n + 1} (x - x_0)^{n+1}$$

viene denominata *serie ottenuta da* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ *per integrazione*.

Si riconosce facilmente che

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|(n + 1) a_{n+1}|} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{a_n}{n + 1} \right|} .$$

Pertanto, la serie ottenuta per derivazione e quella ottenuta per integrazione hanno lo stesso raggio di convergenza della serie assegnata. Tuttavia l'insieme di convergenza delle serie potrebbe differire in quanto quella ottenuta per integrazione potrebbe convergere anche in un estremo in cui la serie assegnata non converge e analogamente quest'ultima potrebbe convergere anche in un estremo in cui la serie ottenuta per derivazione non converge.

Invece, se una serie converge in un estremo dell'intervallo di convergenza quella da essa ottenuta per integrazione è anch'essa convergente nello stesso estremo (in quanto ha gli stessi termini divisi per $n + 1$).

► Ad esempio, la serie ottenuta per derivazione dalla serie geometrica è data da

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n + 1) x^n$$

che converge in $] - 1, 1[$, mentre quella ottenuta per integrazione dalla serie geometrica è data da

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n + 1} x^{n+1}$$

che converge questa volta in $[-1, 1[$.

▷ Si consideri una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ e sia R il suo raggio di convergenza; supposto $R > 0$, si può considerare la funzione somma $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definita nell'intervallo di convergenza della serie. Applicando il Teorema 9.3.2, si ottiene subito che f è sempre una funzione continua nell'intervallo $]x_0 - R, x_0 + R[$.

Come conseguenza del teorema di Abel (vedasi la discussione delle proprietà del raggio di convergenza) e del Teorema 9.3.2, se uno degli estremi dell'intervallo I di convergenza della serie appartiene ad I , allora la funzione somma è continua in tale estremo.

Inoltre, dal Teorema 9.3.4 di derivazione termine a termine, si ricava che la funzione somma f è infinite volte derivabile in $]x_0 - R, x_0 + R[$ e le sue derivate si possono ottenere dalle serie ottenute per derivazione da quella assegnata.

Infine, dal Teorema 9.3.3 di integrazione termine a termine, segue che, per ogni $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$, si ha

$$\int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_{x_0}^x (t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1},$$

e tale uguaglianza vale anche per $x = x_0 - R$ oppure per $x = x_0 + R$ se la serie di potenze converge in tali punti.

9.6 Serie di Taylor

La formula di Taylor consente di approssimare una funzione sufficientemente regolare (cioè derivabile un certo numero di volte) in un intorno di un fissato punto x_0 mediante opportuni polinomi che dipendono dal valore della funzione e da quello delle sue derivate nel punto x_0 . Si vuole ora approfondire tale proprietà utilizzando le serie di potenze.

▷ Sia I un intervallo di \mathbb{R} e si consideri una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile infinite volte in un punto x_0 interno ad I . La serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n, \quad (9.6.1)$$

viene denominata *serie di Taylor* di f di punto iniziale x_0 .

Inoltre, si dice che f è *svilupabile in serie di Taylor* in I se la serie di potenze (9.6.1) converge puntualmente verso f in I .² Una funzione svilup-

²Dalle proprietà delle serie di potenze, la convergenza sarà automaticamente uniforme in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in I .

pabile in serie di Taylor in un intorno di ogni punto interno ad I viene denominata *funzione analitica reale*.

▷ In generale non è detto che una funzione infinite volte derivabile in un punto x_0 sia sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di tale punto. Ad esempio, si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Allora, è facile verificare che f è infinite volte derivabile in \mathbb{R} e tutte le sue derivate sono nulle nel punto 0; pertanto, la serie di Taylor di f di punto iniziale 0 è la funzione nulla e coincide con f solamente nel punto 0. Quindi f non è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno del punto 0.

Si vuole ora fornire un semplice criterio di sviluppabilità in serie di Taylor. Esso è basato sul fatto che se una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è infinite volte derivabile in I , si può applicare la formula di Taylor di ogni ordine in un punto x_0 interno ad I e si ha, per ogni $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

dove $\xi \in I$ è interno all'intervallo di estremi x_0 ed x e dipende da x oltre che da n . Poichè la somma nella formula precedente coincide con quella parziale della serie di Taylor di f , è chiaro che, se il resto della formula di Taylor tende uniformemente a 0, allora f risulta sviluppabile in serie di Taylor in I . Si ha pertanto il seguente criterio.

Teorema 9.6.1 (Criterio di sviluppabilità in serie di Taylor)

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione infinite volte derivabile in I e si supponga che le sue derivate verifichino la seguente condizione

$$\exists c > 0, \exists M > 0 \text{ t.c. } \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in I : |f^{(n)}(x)| \leq c M^n. \quad (9.6.2)$$

Allora f è sviluppabile in serie di Taylor in I .

DIMOSTRAZIONE. Da quanto osservato preliminarmente, considerato x_0 interno ad I , per ogni $x \in I$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

con $\xi \in I$ interno all'intervallo di estremi x_0 ed x . Denotata con s_n la somma parziale n -esima della serie di Taylor di f di punto iniziale x_0 , dalla formula precedente e dalla condizione (9.6.2), segue

$$|f(x) - s_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \leq c \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

Si consideri ora la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} ;$$

si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M^{n+2}}{(n+2)! |x - x_0|^{n+2}} \frac{(n+1)!}{M^{n+1} |x - x_0|^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{n+2} |x - x_0| = 0$$

e quindi, dal criterio del rapporto, essa è convergente; da ciò segue che il termine generale n -esimo deve essere infinitesimo, cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M^{(n+1)}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} = 0 ,$$

e quindi anche

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x) - s_n(x)| = 0 ,$$

da cui la tesi. \square

La condizione (9.6.2) è sicuramente soddisfatta nel caso in cui le derivate della funzione f siano equilimitate, cioè

$$\exists M > 0 \text{ t.c. } \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in I : |f^{(n)}(x)| \leq M .$$

In base al risultato precedente, si può ora considerare lo sviluppo in serie di Taylor di alcune funzioni elementari.

9.6.1 Funzione esponenziale

Sia $a > 0$ tale che $a \neq 1$ e si consideri la funzione esponenziale \exp_a di base a . Essa è infinite volte derivabile e, per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$|D^{(n)} \exp_a x| = |\log^n a| \exp_a x .$$

Pertanto, fissato un intervallo $[-r, r] \subset \mathbb{R}$, risulta, per ogni $x \in [-r, r]$,

$$|D^{(n)} \exp_a x| \leq c M^n ,$$

con $M := |\log a|$ e $c := \max\{\exp_a(-r), \exp_a r\}$.

Dal Teorema 9.6.1 e dall'arbitrarietà di $r > 0$, segue allora che la funzione esponenziale è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$ (x_0 arbitrario) in tutto \mathbb{R} e uniformemente in ogni intervallo limitato. In particolare, considerando $x_0 = 0$, si ottiene, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp_a x = 1 + \log a x + \log^2 a \frac{x^2}{2} + \log^3 a \frac{x^3}{6} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \log^n a \frac{x^n}{n!} .$$

Considerando la base di Nepero, la formula precedente diventa, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} .$$

9.6.2 Funzione logaritmo

Dalla serie geometrica si ricava subito il seguente sviluppo in serie, per ogni $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n . \quad (9.6.3)$$

Allora, integrando termine a termine tra 0 ed x , dal Teorema 9.3.3 si ottiene, per ogni $x \in]-1, 1[$,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} .$$

Mentre nel punto -1 la serie precedente risulta divergente, nel punto 1 risulta invece convergente e pertanto, dal Teorema 9.3.2, si ottiene la somma della serie armonica a segni alterni

$$\log 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} .$$

9.6.3 Funzioni seno e coseno

Poiché le funzioni seno e coseno sono infinite volte derivabili e poiché, per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in \mathbb{R}$,

$$|D^{(n)} \sin x| \leq 1 , \quad |D^{(n)} \cos x| \leq 1 ,$$

(infatti, procedendo per induzione completa su n , si riconosce facilmente che $D^{(n)} \sin x = \sin(x + n\pi/2)$ e analogamente $D^{(n)} \cos x = \cos(x + n\pi/2)$), dal Teorema 9.6.1, si ricava che esse sono sviluppabili in serie di Taylor di punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$ (x_0 arbitrario) in tutto \mathbb{R} . In particolare, considerando $x_0 = 0$, si ottiene il seguente sviluppo in serie delle funzioni seno e coseno, valido per ogni $x \in \mathbb{R}$ e uniformemente in ogni intervallo limitato

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} , \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} . \end{aligned}$$

9.6.4 Funzione arcotangente

Considerato x^2 al posto di x nella (9.6.3), si ottiene, per ogni $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} .$$

Integrando termine a termine tra 0 ed x , dal Teorema 9.3.3 si ricava, per ogni $x \in]-1, 1[$,

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} .$$

La serie converge anche negli estremi -1 ed 1 e pertanto la convergenza è uniforme in $[-1, 1]$. Dal Teorema 9.3.2, si ottiene allora il seguente sviluppo in serie del numero π

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots .$$

9.6.5 La serie binomiale

Si fissi $\alpha \in \mathbb{R}$ e la funzione $f_\alpha(x) := (1+x)^\alpha$, definita per $x \in]-1, \infty[$ (se $\alpha > 0$, la funzione è definita anche in -1 e $f_\alpha(-1) = 0$).

Essa è derivabile infinite volte in $] -1, +\infty[$ e si ha

$$D^n(1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \quad x > -1 .$$

La formula precedente suggerisce l'introduzione del *coefficiente binomiale generalizzato*

$$\binom{\alpha}{n} := \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, & n \neq 0, \end{cases} \quad (9.6.4)$$

il quale ha molte proprietà analoghe a quelle dei coefficienti binomiali e che si omettono per brevità.

La serie di Taylor di f_α di punto iniziale 0 è data da

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n . \quad (9.6.5)$$

Tale serie ha raggio di convergenza 1 in quanto, dal criterio del rapporto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\alpha \cdots (\alpha - n + 1)(\alpha - n) n!}{\alpha \cdots (\alpha - n + 1) (n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - \alpha}{n + 1} = 1.$$

Pertanto, la serie converge puntualmente in $] -1, 1[$ ed uniformemente in ogni intervallo $[-r, r]$ con $0 < r < 1$.

► Per quanto riguarda la convergenza della serie binomiale (9.6.5) nei punti estremi, si ha quanto segue

1. Se $\alpha \leq -1$, la serie binomiale non converge in alcuno dei due estremi.
2. Se $-1 < \alpha < 0$, la serie converge (non assolutamente) in 1 ma non in -1 .
3. Se $\alpha > 0$, la serie converge (anche assolutamente) in entrambi gli estremi.

Per brevità ci si limita ad osservare che in entrambi gli estremi dal criterio di Raabe segue la convergenza assoluta nel caso $\alpha > 0$ e l'assoluta divergenza nel caso $\alpha < 0$. Se $\alpha \leq -1$, la successione dei coefficienti binomiali generalizzati $\binom{\alpha}{n}$ non è infinitesima e pertanto la serie in esame non può convergere. Infine, se $-1 < \alpha < 0$, la convergenza in 1 segue dal criterio di Leibnitz.

► Si studia ora la somma della serie (9.6.5). Si denoti per brevità con g la funzione somma della serie (9.6.5); dalle proprietà delle serie di potenze ed applicando il Teorema 9.3.4 di derivazione termine a termine, per ogni $x \in] -1, 1[$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \alpha (\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha (\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{(n-1)!} x^{n-1} \\ &= \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha - 1) \cdots (\alpha - 1 - n + 1)}{n!} x^n \\ &= \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha - 1}{n} x^n; \end{aligned}$$

da ciò si ottiene, utilizzando le proprietà dei coefficienti binomiali generalizzati³

$$\begin{aligned}
 (1+x)g'(x) &= \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n + \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^{n+1} \\
 &= \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n + \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} x^n \\
 &= \alpha \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} \right) x^n \right) \\
 &= \alpha \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \right) = \alpha g(x).
 \end{aligned}$$

Quindi la funzione g è soluzione dell'equazione differenziale lineare omogenea

$$y' = \frac{\alpha}{1+x} y,$$

la quale ammette come soluzione generale $y = c(1+x)^\alpha$; poiché g verifica la condizione iniziale $g(0) = 1$ deve essere $c = 1$ e quindi $g(x) = (1+x)^\alpha$.

Pertanto, la serie binomiale (9.6.5) converge verso la funzione f_α nell'intervallo $] -1, 1[$.

³Nell'ultima uguaglianza si è utilizzata la proprietà

$$\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} = \binom{\alpha}{n},$$

che è ovvia se $n = 1$ mentre per ogni $n \geq 2$ segue da

$$\begin{aligned}
 \binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} &= \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-1-n+1)}{n!} \\
 &\quad + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-1-n+2)}{(n-1)!} \\
 &= \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{n!} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} \\
 &= \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n+n)}{n!} \\
 &= \binom{\alpha}{n}.
 \end{aligned}$$

9.6.6 La funzione arcoseno

Considerando $\alpha = -1/2$ nella serie binomiale (9.6.5), si ottiene in particolare, per ogni $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n ; \end{aligned}$$

scrivendo $-x^2$ al posto di x

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} .$$

Integrando termine a termine tra 0 ed x quest'ultima relazione, si ottiene, per ogni $x \in]-1, 1[$,

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!! (2n+1)} x^{2n+1} .$$

Si può dimostrare che la serie a secondo membro converge anche negli estremi -1 ed 1 e pertanto, considerando ad esempio $x = 1$, si ottiene il seguente ulteriore sviluppo in serie del numero π

$$\pi = 2 \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!! (2n+1)} \right) .$$

9.7 Serie di Fourier

Un ulteriore tipo di serie di funzioni frequentemente utilizzata per l'approssimazione di funzioni periodiche è costituito dalle *serie di Fourier* delle quali ci si vuole occupare brevemente.

Si denomina *polinomio trigonometrico* di ordine n ogni funzione $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$T(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) , \quad x \in \mathbb{R} ,$$

con $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e b_1, \dots, b_n costanti reali assegnate e $|a_n| + |b_n| > 0$ (per $n = 0$, si assume per convenzione $b_0 = 0$).

Una *serie trigonometrica* è una serie di funzioni del tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (9.7.1)$$

Quindi le somme parziali di una serie trigonometrica sono polinomi trigonometrici di ordine minore o uguale ad n .

Una serie trigonometrica (9.7.1) si dice *serie di coseni* (rispettivamente, *serie di seni*) se, per ogni $n \geq 1$, si ha $b_n = 0$ (rispettivamente se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $a_n = 0$).

Lo studio di una serie trigonometrica può essere effettuato in un intervallo di ampiezza 2π in quanto il termine generale n -esimo della serie è sempre una funzione periodica di periodo 2π .

Se la serie (9.7.1) converge puntualmente in un intervallo di ampiezza 2π , si può pertanto considerare la funzione somma $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx); \quad (9.7.2)$$

tale funzione somma risulta essere sempre 2π -periodica e, se la convergenza è uniforme, essa è anche continua.

Un semplice criterio che fornisce la convergenza totale (e quindi uniforme) della serie è dato dalla condizione

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|).$$

Per ottenere ulteriori criteri, si premettono alcune considerazioni.

Si supponga che la serie trigonometrica (9.7.1) converga uniformemente verso una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Allora, integrando termine a termine l'uguaglianza (9.7.2) tra $-\pi$ e π , si ottiene

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt,$$

e inoltre, per ogni $m \in \mathbb{N}$, moltiplicando entrambi i membri della (9.7.2) per $\cos mx$, integrando tra $-\pi$ e π e tenendo presenti le formule

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx &= 0, \end{aligned}$$

si ricava anche

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt \, dt, \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt \, dt, \quad m \geq 1. \quad (9.7.3)$$

▷ Si supponga ora che sia assegnata una funzione 2π -periodica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se f è assolutamente integrabile in $[-\pi, \pi]$, tutte le funzioni $f(x) \cos mx$ e $f(x) \sin mx$ sono integrabili in $[-\pi, \pi]$ (infatti $|f(x) \cos mx| \leq |f(x)|$ e $|f(x) \sin mx| \leq |f(x)|$) e quindi si possono considerare i coefficienti a_m e b_m precedenti. Tali coefficienti vengono denominati *coefficienti di Fourier di f* e la serie

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \right) \cos nx \right. \\ \left. + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \right) \sin nx \right), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (9.7.4)$$

viene denominata *serie di Fourier di f* .

Inoltre, si dice che f è *svilupicabile in serie di Fourier* se la serie (9.7.4) è convergente ed ha per somma $f(x)$ in ogni punto $x \in \mathbb{R}$ in cui f è continua.

▷ Se f è pari (rispettivamente, dispari), le funzioni $f(x) \cos mx$ sono anch'esse pari (rispettivamente, dispari) mentre le funzioni $f(x) \sin mx$ sono dispari (rispettivamente, pari) e pertanto si ha $b_m = 0$ per ogni $m \geq 1$ (rispettivamente, $a_m = 0$ per ogni $m \geq 1$). Quindi la serie di Fourier di una funzione pari (rispettivamente, dispari) è una serie di soli coseni (rispettivamente, seni).

▷ Se I è un intervallo di \mathbb{R} , una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *continua a tratti* se ammette al più un numero finito di punti di discontinuità, tutte eliminabili o di prima specie; pertanto, se f è continua a tratti, esiste un sottoinsieme finito $H \subset I$ tale che f è continua in $I \setminus H$ e, per ogni $x_0 \in H$,

esiste ed è finito $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ se $x_0 > \inf I$ ed esiste ed è finito $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ se $x_0 < \sup I$.

Per brevità, nel seguito, si pone

$$f(x_0-) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \quad f(x_0+) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Inoltre, si dice che $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione *regolare a tratti* se è continua a tratti ed inoltre è derivabile tranne al più in un numero finito di punti, ognuno dei quali risulta di discontinuità di prima specie per f' .

Una funzione 2π -periodica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ viene denominata *continua a tratti* (rispettivamente, *regolare a tratti*) se la sua restrizione all'intervallo $[-\pi, \pi]$ risulta continua a tratti (rispettivamente, regolare a tratti).

Si osserva che una funzione 2π -periodica e continua a tratti è sicuramente assolutamente integrabile e quindi se ne può considerare la serie di Fourier.

Inoltre, se in più f è anche regolare a tratti, allora f' è una funzione continua a tratti e quindi si può considerare anche la serie di Fourier di f' .

A questo punto si possono enunciare le seguenti proprietà delle serie di Fourier, di cui per brevità viene omessa la dimostrazione.

Teorema 9.7.1 *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica. Allora, valgono le seguenti proprietà:*

1. *Se f è continua e se i suoi coefficienti di Fourier sono tutti nulli, allora $f = 0$.*
2. *Se f è continua e se la serie di Fourier di f è uniformemente convergente, allora f è sviluppabile in serie di Fourier.*
3. *Se f è regolare a tratti, allora la serie di Fourier di f converge puntualmente verso la funzione $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,*

$$\tilde{f}(x) := \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Inoltre, la convergenza è uniforme in ogni intervallo chiuso in cui f è continua.

In particolare, se f è continua e regolare a tratti, allora f è sviluppabile in serie di Fourier.

4. *Se f è regolare a tratti e se a_m e b_m sono i suoi coefficienti di Fourier, allora la serie di Fourier di f' si ottiene derivando termine a termine*

la serie di Fourier di f e inoltre, denotati con a'_m e b'_m i coefficienti di Fourier di f' , si ha

$$a'_0 = 0, \quad a'_m = m b_m, \quad b'_m = -m a_m, \quad m \geq 1.$$

Analogamente, la funzione integrale $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) := \int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt;$$

è continua e regolare a tratti e pertanto la serie di Fourier di F converge uniformemente verso f . I coefficienti di Fourier di F si ottengono integrando termine a termine la serie di Fourier di f e quindi, denotati con A_m e B_m i coefficienti di Fourier di F , si ha

$$A_0 = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{k}, \quad A_m = -\frac{b_m}{m}, \quad B_m = \frac{a_m}{m}, \quad m \geq 1.$$

I risultati precedenti sono stati esposti per semplicità per funzioni 2π -periodiche. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione T -periodica, con $T > 0$, si ottengono risultati analoghi, tenendo presente che i coefficienti di Fourier di f sono in questo caso definiti da

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \frac{2\pi m t}{T} dt, & m \geq 0, \\ b_m &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \frac{2\pi m t}{T} dt, & m \geq 1, \end{aligned}$$

e la serie di Fourier di f è data da

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Capitolo 10

Calcolo differenziale in più variabili

10.1 Cenni sulla struttura metrica di \mathbb{R}^n

10.1.1 Prodotti scalari e norme

L'insieme \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) delle n -ple di numeri reali è dotato di una struttura di spazio vettoriale reale mediante le seguenti operazioni, definite per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}x + y &:= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \lambda x &:= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).\end{aligned}$$

La *base canonica* di \mathbb{R}^n è costituita dai vettori

$$e_1, e_2, \dots, e_n,$$

dove, per ogni $i, j = 1, \dots, n$, la j -esima coordinata di e_i è 0 se $i \neq j$ ed è 1 se $i = j$; quindi, $e_i = (\delta_{ij})_{j=1, \dots, n}$ dove δ_{ij} è il *simbolo di Kronecker* definito ponendo, per ogni $i, j = 1, \dots, n$,

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Poiché $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ è una base di \mathbb{R}^n , ogni elemento $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si esprime in un unico modo come combinazione lineare di e_1, \dots, e_n ed i coefficienti di tale combinazione lineare sono proprio le componenti di x , cioè

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Tuttavia, nel seguito si sarà maggiormente interessati ad approfondire le proprietà metriche di \mathbb{R}^n che derivano dalla possibilità di introdurre in modo naturale in \mathbb{R}^n un prodotto scalare.

Per maggiore chiarezza si premette la definizione generale di prodotto scalare e qualcuna delle sue principali proprietà; di seguito si considererà il caso particolare del prodotto scalare di \mathbb{R}^n .

▷ Per semplicità si denoterà con \mathbb{K} il campo \mathbb{R} dei numeri reali oppure il campo \mathbb{C} dei numeri complessi.

Se E è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} , si dice che una funzione $(\cdot|\cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ è un *prodotto scalare* su E se sono soddisfatte le seguenti proprietà:

1. $\forall x, y, z \in E : (x + y|z) = (x|z) + (y|z) ;$
2. $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : (\lambda x|y) = \lambda(x|y) ;$
3. $\forall x, y \in E : (y|x) = \overline{(x|y)} ;$
4. $\forall x \in E : (x|x) \in \mathbb{R}$ e $(x|x) \geq 0$; inoltre $(x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

L'elemento $(x|y)$ di \mathbb{K} viene denominato *prodotto scalare di x ed y* .

▷ Se $(\cdot|\cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ è un prodotto scalare su E , allora valgono le seguenti ulteriori proprietà, di verifica immediata:

1. $\forall x, y, z \in E : (z|x + y) = (z|x) + (z|y) ;$
2. $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : (x|\lambda y) = \overline{\lambda}(x|y) ;$
3. $\forall x \in E : (x|0) = (0|x) = 0 .$

▷ Se $(\cdot|\cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ è un prodotto scalare su E , allora vale la seguente *diseguaglianza di Cauchy-Schwarz*, per ogni $x, y \in E$,

$$|(x|y)|^2 \leq (x|x) \cdot (y|y) . \quad (10.1.1)$$

Infatti, se $y = 0$, risulta $(x|y) = 0$ e quindi la proprietà è ovvia. Se $y \neq 0$ si ha, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x + \lambda y|x + \lambda y) = (x|x + \lambda y) + (\lambda y|x + \lambda y) \\ &= (x|x) + (x|\lambda y) + (\lambda y|x) + (\lambda y|\lambda y) = (x|x) + \lambda(x|y) + \lambda(y|x) + \lambda^2(y|y) \\ &= (x|x) + \lambda(x|y) + \lambda\overline{(x|y)} + \lambda^2(y|y) = (x|x) + 2\lambda\operatorname{Re}(x|y) + \lambda^2(y|y) \\ &\leq (x|x) + 2\lambda|(x|y)| + \lambda^2(y|y) . \end{aligned}$$

Dunque, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, risulta $0 \leq (x|x) + 2\lambda|(x|y)| + \lambda^2(y|y)$ e ciò comporta che il discriminante $\Delta := 4|(x|y)|^2 - 4(x|x)(y|y)$ del polinomio $(x|x) + 2\lambda|(x|y)| + \lambda^2(y|y)$ di secondo grado in λ deve essere negativo. Quindi $|(x|y)|^2 - (x|x)(y|y) \leq 0$ da cui la tesi.

▷ Se $(\cdot|\cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ è un prodotto scalare su E , allora vale la seguente *diseguaglianza di Minkowski*, per ogni $x, y \in E$,

$$\sqrt{(x+y|x+y)} \leq \sqrt{(x|x)} + \sqrt{(y|y)} .$$

Siano $x, y \in E$. Allora

$$\begin{aligned} (x+y|x+y) &= (x|x) + (y|x) + (x|y) + (y|y) = (x|x) + (x|y) + \overline{(x|y)} + (y|y) \\ &= (x|x) + 2\operatorname{Re}(x|y) + (y|y) \leq (x|x) + 2|(x|y)| + (y|y) \\ &\leq (x|x) + 2\sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)} + (y|y) = (\sqrt{(x|x)} + \sqrt{(y|y)})^2 , \end{aligned}$$

dove nell'ultima diseguaglianza si è usata la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz. Considerando infine le radici quadrate del primo ed ultimo termine delle diseguaglianze precedenti si ottiene la tesi.

▷ Si studia ora un'ulteriore nozione generale che potrà essere messa in relazione con l'esistenza del prodotto scalare.

Se E è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} , si dice che una funzione $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ è una *norma* su E se sono soddisfatte le seguenti proprietà:

1. $\forall x \in E : \|x\| \geq 0$;
2. $\forall x \in E : \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$;
3. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
4. $\forall x, y \in E : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

L'elemento $\|x\|$ viene denominato *norma di x* e la coppia $(E, \|\cdot\|)$ viene denominata spazio normato su \mathbb{K} .

▷ Se $(\cdot|\cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ è un prodotto scalare su E , si può definire in modo naturale una norma su E , considerando la funzione $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in E$,

$$\|x\| := \sqrt{(x|x)} . \tag{10.1.2}$$

Si verifica facilmente che la funzione definita dalla (10.1.2) verifica le proprietà previste nella definizione di norma; la verifica delle proprietà 1)-3) delle norme è immediata, mentre la quarta segue dalla diseguaglianza di Minkowski. Tale norma viene denominata *norma dedotta dal prodotto scalare di E* .

▷ La norma su uno spazio vettoriale consente a sua volta di definire in modo naturale una distanza su E . Per precisare meglio questa proprietà, si premette la nozione di distanza.

▷ Se E è un insieme arbitrario, si dice *distanza su E* una funzione $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ verificante le seguenti proprietà, per ogni $x, y, z \in E$,

1. $d(x, y) \geq 0$;
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3. (*Proprietà simmetrica*) $d(x, y) = d(y, x)$;
4. (*Proprietà triangolare*) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Il numero reale $d(x, y)$ viene denominato *distanza di x da y* e la coppia (E, d) viene anche denominata *spazio metrico*.

▷ Se $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ è una norma su E , si può definire automaticamente una distanza su E considerando la funzione $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x, y \in E$,

$$d(x, y) := \|x - y\| . \quad (10.1.3)$$

Si verifica facilmente che le proprietà previste nella definizione di distanza discendono direttamente da quelle della norma. La distanza d definita dalla (10.1.3) viene denominata *distanza dedotta dalla norma di E* .

Come ulteriore approfondimento, si osserva che la nozione di distanza consente di definire quella di convergenza. Precisamente, se (E, d) è uno spazio metrico e se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di elementi di E , si dice che essa *converge* verso un elemento $\ell \in E$ se è soddisfatta la seguente condizione

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq \nu : d(a_n, \ell) < \varepsilon .$$

Inoltre, si dice che $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una *successione di Cauchy* se è soddisfatta la seguente condizione

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n, m \geq \nu : d(a_n, a_m) < \varepsilon .$$

Si verifica facilmente che ogni successione convergente verifica la condizione di Cauchy. Il viceversa non vale in generale; se accade che ogni successione di Cauchy è anche convergente, si dice che (E, d) è uno *spazio metrico completo*.

Se la struttura dello spazio metrico (E, d) viene dedotta da una norma $\|\cdot\|$ e se (E, d) è completo, allora lo spazio normato $(E, \|\cdot\|)$ su \mathbb{K} viene denominato *spazio di Banach su \mathbb{K}* . Se la norma di uno spazio di Banach $(E, \|\cdot\|)$ su \mathbb{K} viene dedotta da un prodotto scalare $(\cdot|\cdot)$, allora la coppia $(E, (\cdot|\cdot))$ viene denominata *spazio di Hilbert su \mathbb{K}* .

▷ Si può dimostrare che la norma $\|\cdot\|$ di uno spazio normato $(E, \|\cdot\|)$ deriva da un prodotto scalare se e solo se essa verifica la seguente *regola del parallelogramma*, per ogni $x, y \in E$,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) .$$

Esempio 10.1.1 1. Sia $n \geq 1$ e si consideri lo spazio vettoriale reale \mathbb{R}^n . Allora la funzione $(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$(x|y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (10.1.4)$$

è un prodotto scalare su \mathbb{R}^n .

In questo caso la verifica delle proprietà del prodotto scalare è immediata.

Nel seguito, \mathbb{R}^n verrà considerato sempre munito del prodotto scalare definito dalla (10.1.4).

La norma dedotta dal prodotto scalare in \mathbb{R}^n è conseguentemente definita ponendo, per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (10.1.5)$$

ed infine la distanza dedotta dalla norma è definita ponendo, per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \quad (10.1.6)$$

Si consideri una successione $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$, $a_m = ((a_m)_1, \dots, (a_m)_n)$, di elementi di \mathbb{R}^n . Si verifica facilmente che essa è convergente (rispettivamente, di Cauchy) se e solo se, per ogni $i = 1, \dots, n$, la successione $((a_i)_m)_{m \in \mathbb{N}}$ è convergente (rispettivamente, di Cauchy). Allora, dal criterio di convergenza di Cauchy per le successioni di numeri reali, segue che ogni successione di Cauchy in \mathbb{R}^n è convergente e quindi (\mathbb{R}^n, d) è uno spazio metrico completo. Conseguentemente, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach e $(\mathbb{R}^n, (\cdot|\cdot))$ è uno spazio di Hilbert.

2. Sia $n \geq 1$ e si consideri lo spazio vettoriale complesso \mathbb{C}^n . Allora la funzione $(\cdot|\cdot) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ e per ogni $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$(x|y) := \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \quad (10.1.7)$$

è un prodotto scalare su \mathbb{C}^n .

Anche in questo caso la verifica delle proprietà del prodotto scalare è immediata.

La norma e la distanza possono essere dedotta come nel caso precedente e si ha, per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ e $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad (10.1.8)$$

e

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}. \quad (10.1.9)$$

Anche ora, separando le parti reali ed immaginarie, si riconosce facilmente che le successioni di Cauchy in \mathbb{C}^n sono convergenti e quindi anche \mathbb{C}^n è completo come spazio metrico, di Banach come spazio normato e di Hilbert munito del suo prodotto scalare.

3. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$ e si consideri lo spazio vettoriale reale $C([a, b])$ delle funzioni continue sull'intervallo $[a, b]$ ed a valori in \mathbb{R} .

Allora la funzione $(\cdot | \cdot) : C([a, b]) \times C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $f \in C([a, b])$ e $g \in C([a, b])$,

$$(f|g) := \int_a^b f(x)g(x) dx .$$

risulta un prodotto scalare su $C([a, b])$.

La norma dedotta dal prodotto scalare viene definita ponendo, per ogni $f \in C([a, b])$,

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} ,$$

e la distanza è data, per ogni $f, g \in C([a, b])$, da

$$d(f, g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx} .$$

Si può dimostrare tuttavia che con tale distanza $C([a, b])$ non è uno spazio metrico completo.

Su $C([a, b])$ si può anche definire la *norma uniforme* ponendo

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad f \in C([a, b]), \quad (10.1.10)$$

e la *distanza uniforme* da essa dedotta

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|, \quad f, g \in C([a, b]).$$

Con tale distanza, lo spazio metrico $(C([a, b]), d_\infty)$ risulta completo e quindi $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach. Tuttavia, in questo caso la norma non deriva da un prodotto scalare in quanto non soddisfa la regola del parallelogramma.

10.1.2 Sfere ed insiemi aperti e chiusi

La distanza definita dalla (10.1.6) in \mathbb{R}^n consente di introdurre tutte le nozioni metriche basate su tale nozione.

▷ Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e sia $r > 0$. Si denomina *sfera aperta* (rispettivamente, *sfera chiusa*) di centro x_0 e raggio r , il seguente sottoinsieme di \mathbb{R}^n

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, x_0) < r\} \quad (10.1.11)$$

(rispettivamente,

$$B'_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, x_0) \leq r\}. \quad (10.1.12)$$

▷ La definizione delle sfere aperte e chiuse consente di definire subito gli insiemi limitati. Precisamente, un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n si dice *limitato* se esiste $r > 0$ tale che $A \subset B_r(0)$. Si è considerato per comodità il punto 0 di \mathbb{R}^n , ma esso potrebbe essere sostituito con un qualsiasi altro elemento di \mathbb{R}^n . Quindi gli insiemi limitati in \mathbb{R}^n sono i sottoinsiemi delle sfere aperte.

▷ Sempre partendo dalla definizione delle sfere aperte e chiuse, si possono ora introdurre le seguenti ulteriori definizioni.

1. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ ed $x_0 \in \mathbb{R}^n$, si dice che A è un *intorno* di x_0 se è soddisfatta la condizione seguente

$$\exists r > 0 \text{ t.c. } B_r(x_0) \subset A. \quad (10.1.13)$$

2. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ ed $x_0 \in \mathbb{R}^n$, si dice che x_0 è *interno* ad A se A è un intorno di x_0 e quindi se vale la condizione precedente (10.1.13).

L'insieme di tutti gli intorni di x_0 viene denotato con il simbolo $\mathcal{I}(x_0)$.

3. Un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice *aperto* se ogni suo punto è interno (o, equivalentemente, se A è un intorno di ogni suo punto) e quindi se vale la condizione (10.1.13) per ogni $x_0 \in A$.
4. Se A è un sottoinsieme arbitrario di \mathbb{R}^n , si denomina *interno* di A e lo si denota con $\overset{\circ}{A}$ il più grande sottoinsieme aperto contenuto in A . Pertanto $\overset{\circ}{A}$ è costituito da tutti i soli i punti interni ad A o equivalentemente è l'unione di tutti gli insiemi aperti contenuti in A .

Valgono le seguenti proprietà dell'interno di un sottoinsieme A :

- i) $\overset{\circ}{A}$ è sempre un insieme aperto;
 - ii) $\overset{\circ}{A} \subset A$;
 - iii) $A = \overset{\circ}{A}$ se e solo se A è un insieme aperto.
5. Un sottoinsieme $C \subset \mathbb{R}^n$ si dice *chiuso* se il suo complementare $\mathbb{R}^n \setminus C$ è aperto e quindi se e solo se, per ogni punto x_0 del suo complementare esiste una sfera aperta di centro x_0 tutta contenuta nel complementare.
 6. Se C è un sottoinsieme arbitrario di \mathbb{R}^n , si denomina *chiusura* di C e lo si denota con \overline{C} il più piccolo sottoinsieme chiuso contenente C . Pertanto \overline{C} è l'intersezione di tutti gli insiemi chiusi contenenti C . La chiusura di un sottoinsieme C può anche essere espressa utilizzando la nozione di interno di un sottoinsieme nel modo seguente

$$\overline{C} = \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{\mathbb{R}^n \setminus C}$$

Valgono le seguenti proprietà della chiusura di un sottoinsieme C :

- i) \overline{C} è sempre un insieme chiuso;
 - ii) $C \subset \overline{C}$;
 - iii) $C = \overline{C}$ se e solo se C è un insieme chiuso.
7. Se A è un sottoinsieme arbitrario di \mathbb{R}^n , si denomina *frontiera* di A e la si denota con ∂A (oppure con $\text{Fr}(A)$) il seguente sottoinsieme di \mathbb{R}^n

$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus A)}.$$

8. Infine, si osserva che anche in \mathbb{R}^n può essere data la definizione di punto di accumulazione nel modo seguente. Se A è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n e se $x_0 \in \mathbb{R}^n$, si dice che x_0 è un punto di accumulazione per A se vale la seguente condizione:

$$\forall \delta > 0 : A \cap B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset ,$$

cioè, in ogni intorno di x_0 devono esservi elementi di A diversi da x_0 .

10.1.3 Intervalli, rette e direzioni di \mathbb{R}^n

Se $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ e $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ verificano le condizioni

$$a_i \leq b_i , \quad i = 1, \dots, n ,$$

si possono considerare gli intervalli

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i = 1, \dots, n : a_i \leq x_i \leq b_i\} , \\]a, b[&:= \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i = 1, \dots, n : a_i < x_i < b_i\} , \\ [a, b[&:= \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i = 1, \dots, n : a_i \leq x_i < b_i\} , \\]a, b] &:= \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i = 1, \dots, n : a_i < x_i \leq b_i\} , \end{aligned}$$

i quali vengono denominati rispettivamente intervallo chiuso (rispettivamente, aperto, semiaperto a destra, semiaperto a sinistra) di estremi a e b .

Per molte questioni metriche sarà tuttavia più utile il concetto di sfera aperta e chiusa definito nella sezione successiva.

Si denomina *direzione* di \mathbb{R}^n ogni elemento $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $\|v\| = 1$.

Si osserva che se $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, allora $v/\|v\|$ è una direzione di \mathbb{R}^n .

In particolare, i vettori e_i , $i = 1, \dots, n$, della base canonica sono particolari direzioni di \mathbb{R}^n .

Se $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ è una direzione di \mathbb{R}^n e se $x_0 \in \mathbb{R}^n$, l'equazione della *retta passante per x_0 e direzione v* è data da

$$x = x_0 + tv , \quad t \in \mathbb{R} ,$$

ed in coordinate parametriche

$$\begin{cases} x_1 = (x_0)_1 + tv_1 , \\ x_2 = (x_0)_2 + tv_2 , \\ \vdots \\ x_n = (x_0)_n + tv_n , \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} .$$

Se $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ e $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, la *retta passante per a e b* ha equazione

$$x = a + t(b - a), \quad t \in \mathbb{R},$$

ed in coordinate parametriche

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + t(b_1 - a_1), \\ x_2 = a_2 + t(b_2 - a_2), \\ \vdots \\ x_n = a_n + t(b_n - a_n), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Il *segmento di estremi a e b* è invece definito come segue

$$S[a, b] := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \in [0, 1] \text{ t.c. } x = a + t(b - a)\}.$$

Una *poligonale* P di \mathbb{R}^n è l'unione di un numero finito di segmenti aventi a due a due un estremo in comune; pertanto, devono esistere $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ (denominati *vertici della poligonale*) tali che $P = S[a_0, a_1] \cup S[a_1, a_2] \cup \dots \cup S[a_{m-1}, a_m]$. Una *poligonale congiungente i punti a e b* è una poligonale del tipo precedente con $a = a_0$ e $b = a_m$; essa viene anche denotata con il simbolo $P[a, b]$ oppure con $P[a_0, \dots, a_m]$ se si vogliono specificare i vertici della poligonale.

Un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n si dice *connesso per poligonali* se, per ogni $x, y \in A$, esiste una poligonale $P[x, y]$ congiungente i punti x ed y interamente contenuta in A .

Più in generale, un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n si dice *connesso* se non è unione di insiemi aperti disgiunti e non vuoti; quindi A è connesso se ogni volta che $A = A_1 \cup A_2$ con A_1 e A_2 insiemi aperti disgiunti, risulta $A_1 = \emptyset$ oppure $A_2 = \emptyset$.

Si può dimostrare che in \mathbb{R}^n un sottoinsieme connesso per poligonali è anche connesso mentre il viceversa non vale (ad esempio, se si “connettono” due insiemi connessi disgiunti mediante un arco di circonferenza si ottiene un insieme connesso ma non connesso per poligonali). Tuttavia, Se A è un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n , esso è connesso se e solo se è connesso per poligonali.¹

¹Si supponga che A sia un insieme aperto non connesso per poligonali e siano $a \in A$ e $b \in A$ non congiungibili con una poligonale. Si considerino gli insiemi $A_1 := \{x \in A \mid \exists P[a, x] \subset A\}$ e $A_2 := \{x \in A \mid \nexists P[a, x] \subset A\}$; essi verificano ovviamente le condizioni $A_1 \cup A_2 = A$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e inoltre $A_1 \neq \emptyset$ (infatti $a \in A_1$) e $A_2 \neq \emptyset$ (infatti $b \in A_2$). Si riconosce ora che A_1 ed A_2 sono entrambi aperti e ciò dimostrerà che A non è connesso. Sia $x_0 \in A_1$; poiché A è aperto esiste $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x_0) \subset A$; considerata una poligonale $P[a, x_0]$ congiungente a ed x_0 e contenuta in A , per ogni $x \in B_\delta(x_0)$

▷ Nel caso in cui si considerino poligoni costituite da un solo segmento, si ottengono particolari insiemi connessi di seguito definiti.

Sia A un sottoinsieme di \mathbb{R}^n . Si dice che A è *convesso* se, per ogni $a, b \in A$ il segmento $S[a, b]$ congiungente a e b è interamente contenuto in A .

Si osservi che un insieme convesso è anche connesso (in quanto è ovviamente connesso per poligoni), ma il viceversa non vale. Ad esempio, il sottoinsieme $A := ([-1, 0] \times [0, 1/2]) \cup [0, 1]^2$ è connesso ma non convesso.

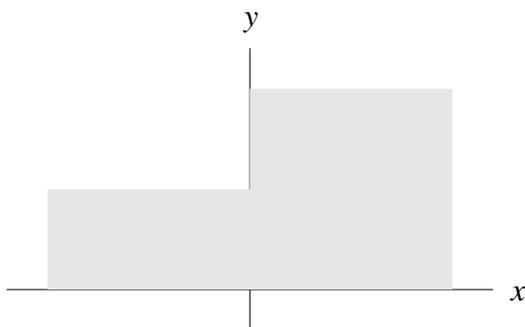


Figura 10.1: Esempio di insieme connesso ma non convesso.

10.2 Funzioni di più variabili

Una *funzione di n variabili reali* è una funzione definita in un sottoinsieme di \mathbb{R}^n con $n \geq 1$. Se tale funzione è a valori in \mathbb{R} essa viene denominata *funzione reale di n variabili reali*.

Per molti aspetti, lo studio di una funzione di più variabili può essere condotto con metodi simili a quelli utilizzati per le funzioni di una variabile reale; ad esempio, lo studio dell'insieme di definizione e le stesse definizioni di limite e di continuità per funzioni di più variabili non presentano novità sostanziali. Invece, il calcolo differenziale e lo studio dei massimi e minimi relativi ed assoluti (e vincolati) necessita di un approccio sostanzialmente più articolato rispetto a quello utilizzato per le funzioni di una sola variabile.

la poligonale costituita da $P[a, x_0]$ e dal segmento congiungente x_0 ed x risulta essere interamente contenuta in A e congiunge a ed x , da cui $x \in A_1$; quindi $B_\delta(x_0) \subset A_1$ da cui si deduce che A_1 è aperto. Sia ora $x_0 \in A_2$ e come prima si consideri $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x_0) \subset A$; se esistesse una poligonale $P[a, x] \subset A$ congiungente a ed x allora la poligonale costituita da $P[a, x]$ e dal segmento congiungente x ed x_0 sarebbe contenuta in A e congiungerebbe a ed x_0 , e ciò è escluso dal fatto che $x_0 \notin A_1$; pertanto $x \in A_2$ da cui $B_\delta(x_0) \subset A_2$ e quindi A_2 è aperto.

▷ Ad esempio, si consideri la funzione di due variabili

$$f(x, y) := y \log(xy) + x^2 e^{\sin(x+y)} .$$

Le condizioni da imporre per determinare l'insieme di definizione riguardano solamente la funzione logaritmo in quanto le altre funzioni sono definite per qualsiasi valore reale del loro argomento. Pertanto si deve imporre $xy > 0$ e quindi la funzione è definita nel primo e nel terzo quadrante (esclusi gli assi):

$$\begin{aligned} X_f &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, y < 0\} \\ &=]0, +\infty[^2 \cup]-\infty, 0[^2 . \end{aligned}$$

Si osservi che la funzione è definita in un sottoinsieme aperto non limitato di \mathbb{R}^2 .

▷ Come ulteriore esempio si consideri la funzione di tre variabili

$$f(x, y, z) := \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \arcsin z .$$

Per determinare l'insieme di definizione, bisogna imporre le condizioni

$$\begin{cases} 1 - x^2 - y^2 \geq 0 , \\ -1 \leq z \leq 1 , \end{cases}$$

e quindi la funzione è definita nel cilindro di \mathbb{R}^3 che ha come base il cerchio di centro l'origine e raggio 1 nel piano xy ed altezza l'intervallo $[-1, 1]$ sull'asse z :

$$\begin{aligned} X_f &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \times [-1, 1] . \end{aligned}$$

La funzione è definita in un sottoinsieme chiuso e limitato di \mathbb{R}^3 .

▷ Viene fornita ora la definizione di limite per le funzioni di più variabili. Come si può notare, essa è del tutto analoga a quella già nota per le funzioni di una variabile reale.

Definizione 10.2.1 *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di più variabili reali. Se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è un punto di accumulazione per A e se $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, si dice che ℓ è il limite di f per x tendente verso x_0 e si scrive*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell , \quad \text{oppure} \quad \lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow ((x_0)_1, \dots, (x_0)_n)} f(x_1, \dots, x_n) = \ell ,$$

se è soddisfatta le condizione seguente

$$\forall I \in \mathcal{I}(\ell) \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A \cap B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} : f(x) \in I . \quad (10.2.1)$$

Se $\ell \in \mathbb{R}$ la condizione (10.2.1) è equivalente alla seguente

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A \cap B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} : |f(x) - \ell| < \varepsilon, \quad (10.2.2)$$

mentre se $\ell = +\infty$ (rispettivamente, $\ell = -\infty$), è equivalente alla seguente

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A \cap B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} : f(x) > M \quad (10.2.3)$$

(rispettivamente $f(x) < M$).

Vista la naturale generalizzazione della definizione di limite al caso di più variabili, molti risultati ottenuti per le funzioni di una variabile rimangono validi anche nel caso in esame, come le proprietà di unicità del limite, della permanenza del segno, della limitatezza locale, della monotonia del limite ed i teoremi di confronto e sulle operazioni sui limiti; non hanno invece più significato, vista la struttura di \mathbb{R}^n , i limiti da sinistra e da destra ed i teoremi riguardanti funzioni monotone (in quanto tale nozione non ha senso in più variabili). Per brevità, si omette in questa fase di enunciare tali risultati, riservandosi di richiamarli in maniera più dettagliata ogni qualvolta vengano utilizzati nel seguito.

▷ Si consideri il seguente limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\log(1 + x^3y^2)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}.$$

Esso si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Sebbene sia possibile utilizzare i limiti notevoli ed ottenere il limite

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\log(1 + x^3y^2)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\log(1 + x^3y^2)}{x^3y^2} \frac{x^3y^2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^3y^2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}, \end{aligned}$$

risulta comunque problematico effettuare un confronto tra i due infinitesimi al numeratore ed al denominatore.

Si può allora ricorrere ad un metodo di frequente utilizzo che consiste nell'effettuare dapprima una traslazione in modo che il limite venga calcolato nel punto $(0, 0)$ e poi nel passaggio alle coordinate polari. Infatti, posto $u := x$ e $v := y - 1$, l'ultimo limite diventa

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^3y^2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{u^3(1+v)^2}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

e a questo punto, posto $u := \rho \cos \theta$, $v := \rho \sin \theta$, si ottiene il limite

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\rho^3 \cos^3 \theta (1 + \rho \sin \theta)^2}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^2 \cos^3 \theta (1 + \rho \sin \theta)^2 = 0 .$$

Si osservi che l'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che il limite tende a 0 indipendente da θ ; infatti il fattore $\cos^3 \theta (1 + \rho \sin \theta)^2$ è limitato in un intorno del punto $\rho = 0$ e quindi

$$-M\rho^2 \leq \rho^2 \cos^3 \theta (1 + \rho \sin \theta)^2 \leq M\rho^2 ,$$

con $M > 0$ costante opportuna; poiché $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} M\rho^2 = 0$, per confronto si ottiene che anche il limite assegnato è 0.

► Si passa ora a considerare la nozione di continuità.

Definizione 10.2.2 *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di più variabili reali. Se $x_0 \in A$, si dice che f è continua in x_0 se è soddisfatta la condizione seguente*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A \cap B_\delta(x_0) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon . \quad (10.2.4)$$

Se x_0 è un punto di accumulazione per A , la condizione precedente equivale a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, mentre se $x_0 \in A$ non è un punto di accumulazione per A , allora f è automaticamente continua in x_0 .

Si dirà poi che f è continua in un sottoinsieme $B \subset A$ se è continua in ogni $x_0 \in B$.

Infine, si dice che f è continua se è continua in ogni $x_0 \in A$.

Le nozioni di continuità a destra ed a sinistra non hanno significato per le funzioni di più variabili, mentre è possibile estendere il seguente risultato, di cui per brevità viene omessa la dimostrazione.

Teorema 10.2.3 (Teorema di Weierstrass in più variabili)

Siano A un sottoinsieme chiuso e limitato di \mathbb{R}^n ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale continua. Allora f è dotata di minimo e di massimo, cioè esistono $c, d \in A$ tali che, per ogni $x \in A$, $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

Anche il teorema degli zeri può essere generalizzato nel caso di funzioni di più variabili nel modo seguente.

Teorema 10.2.4 (Teorema degli zeri in più variabili)

Siano A un sottoinsieme di \mathbb{R}^n ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale continua. Se $a, b \in A$ sono tali che $f(a) \cdot f(b) < 0$ e se esiste una poligonale $P[a, b]$ di estremi a e b interamente contenuta in A , allora esiste $c \in A$ (in particolare $c \in P[a, b]$) tale che $f(c) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il teorema degli zeri per funzioni di una variabile reale alla restrizione di f alla poligonale $P[a, b]$. □

10.3 Derivate direzionali e parziali e differenziabilità

Alcune nozioni introdotte nel seguito sono basate su proprietà elementari delle funzioni lineari, che per comodità si preferisce richiamare preliminarmente.

10.3.1 Funzioni lineari

Se E ed F sono spazi vettoriali su \mathbb{K} (si ricorda che \mathbb{K} denota l'insieme dei numeri reali \mathbb{R} oppure quello dei numeri complessi \mathbb{C}), una *funzione lineare da E in F* è una funzione $L : E \rightarrow F$ che verifica le seguenti condizioni, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$L(x + y) = L(x) + L(y) , \quad L(\lambda x) = \lambda L(x) .$$

Una funzione lineare $L : E \rightarrow \mathbb{K}$ viene denominata anche *funzionale lineare su E* .

In particolare, i funzionali lineari su \mathbb{R}^n sono funzioni lineari $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Una proprietà importante di tali funzionali lineari riguarda il fatto che i valori dipendono solamente da quelli assunti sui vettori della base canonica; infatti, per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, risulta $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ e conseguentemente, dalle condizioni di linearità,

$$L(x) = L\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n L(x_i e_i) = \sum_{i=1}^n L(e_i) x_i . \quad (10.3.1)$$

Si deduce in particolare che due funzionali lineari che assumono lo stesso valore sui vettori della base canonica devono necessariamente coincidere.

Considerato il vettore $e_L := (L(e_1), \dots, L(e_n))$, e ricordando la definizione del prodotto scalare in \mathbb{R}^n , la formula precedente può essere scritta come segue

$$L(x) = (e_L | x) . \quad (10.3.2)$$

In generale, quindi, un funzionale lineare su \mathbb{R}^n è del tipo

$$L(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n , \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ,$$

con $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ costanti fissate (inoltre $a_i = L(e_i)$ per ogni $i = 1, \dots, n$).

In particolare i funzionali lineari su \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 ed \mathbb{R}^3 assumono rispettivamente la forma

$$L(x) = ax , \quad L(x, y) = ax + by , \quad L(x, y, z) = ax + by + cz ,$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ fissati ed $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Dall'espressione ottenuta dei funzionali lineari segue subito che essi sono funzioni continue in quanto somma di n funzioni potenza di grado 1.

▷ Sia $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale lineare su \mathbb{R}^n . Allora, l'insieme dei punti

$$\begin{aligned}\Pi_L &:= \{(x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y = L(x_1, \dots, x_n)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid y = (e_L|x)\}\end{aligned} \quad (10.3.3)$$

è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^{n+1} , denominato *iperpiano generato da L* .

Se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e se $y_0 \in \mathbb{R}$, si può considerare l'iperpiano $\Pi_{L, (x_0, y_0)}$ generato da L e passante per (x_0, y_0)

$$\begin{aligned}\Pi_{L, (x_0, y_0)} &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid y = y_0 + L(x - x_0)\}, \\ &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid y = y_0 + (e_L|x - x_0)\},\end{aligned}$$

la cui equazione è data da

$$y = y_0 + L(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R},$$

oppure, utilizzando il prodotto scalare,

$$y = y_0 + (e_L|x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}.$$

10.3.2 Derivate direzionali e parziali

Siano A un sottoinsieme di \mathbb{R}^n ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di n variabili reali. Se $x_0 \in A$ è un punto interno ad A e se $v \in \mathbb{R}^n$ è una direzione di \mathbb{R}^n , l'insieme

$$I_{x_0, v} := \{t \in \mathbb{R} \mid x_0 + tv \in A\}$$

contiene un intorno del punto 0.² Si può quindi considerare la funzione $f_{x_0, v} : I_{x_0, v} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $t \in I_{x_0, v}$,

$$f_{x_0, v}(t) = f(x_0 + tv),$$

la quale è definita in un intorno dello 0; tale funzione rappresenta la restrizione della funzione f alla retta passante per x_0 di direzione v (si osservi che il punto x_0 si ottiene per $t = 0$ dall'equazione della retta).

Si può a questo punto assumere la seguente definizione.

²Infatti, x_0 è interno ad A e quindi esiste $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x_0) \subset A$; allora, per ogni $t \in]-\delta, \delta[$, risulta $d(x_0 + tv, x_0) = \|x_0 + tv - x_0\| = |t| \|v\| = |t| < \delta$ e quindi $] -\delta, \delta[\subset I_{x_0, v}$.

Definizione 10.3.1 Si dice che f è derivabile in x_0 rispetto alla direzione v se $f_{x_0,v}$ è derivabile in 0; in tal caso, $f'_{x_0,v}(0)$ viene denominata derivata direzionale di f in x_0 rispetto alla direzione v e denotata con $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$.

Si ha pertanto

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_{x_0,v}(t) - f_{x_0,v}(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

e, denotate con (v_1, \dots, v_n) le componenti di v , si può scrivere

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x_0)_1 + tv_1, \dots, (x_0)_n + tv_n) - f((x_0)_1, \dots, (x_0)_n)}{t}.$$

In particolare, fissato $i = 1, \dots, n$, si può considerare la direzione e_i della base canonica. In questo caso, la derivata direzionale di f in x_0 rispetto alla direzione e_i viene denominata *derivata parziale i -esima* (oppure rispetto alla i -esima variabile) e denotata con il simbolo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

Pertanto, da quanto osservato sopra e tenendo presente che $x_0 + te_i = (x_0)_1, \dots, (x_0)_n + t(0, \dots, 1, \dots, 0) = ((x_0)_1, \dots, (x_0)_i + t, \dots, (x_0)_n)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x_0)_1, \dots, (x_0)_i + t, \dots, (x_0)_n) - f((x_0)_1, \dots, (x_0)_n)}{t}. \end{aligned}$$

Quindi, la derivata parziale rispetto alla variabile i -esima viene effettuata considerando costanti le variabili diverse da quella i -esima e derivando la funzione come se dipendesse dall'unica variabile x_i . Ciò suggerisce un semplice criterio sia per riconoscere che una funzione è derivabile parzialmente rispetto ad un'assegnata variabile che per calcolarne la derivata parziale, utilizzando gli stessi metodi e le stesse regole di derivazione già viste per le funzioni di una sola variabile reale.

▷ Ad esempio, si consideri la funzione

$$f(x, y) := e^{x+y} + \cos(xy).$$

Fissato $y \in \mathbb{R}$, la funzione parziale $f_y(x) := f(x, y)$, dipendente dalla sola variabile x , è derivabile in tutto \mathbb{R} e si ha $f_y(x) = e^{x+y} - y \sin(xy)$; pertanto,

dall'arbitrarietà di $y \in \mathbb{R}$, si conclude che f è derivabile parzialmente rispetto ad x in ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x+y} - y \sin(xy) .$$

In modo analogo, fissato $x \in \mathbb{R}$, la funzione parziale $f_x(y) := f(x, y)$, dipendente dalla sola variabile y , è derivabile in tutto \mathbb{R} e si ha $f_x(y) = e^{x+y} - x \sin(xy)$; pertanto, dall'arbitrarietà di $x \in \mathbb{R}$, si conclude che f è derivabile parzialmente anche rispetto ad y in ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x+y} - x \sin(xy) .$$

▷ Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile parzialmente rispetto ad ogni variabile in un punto $x_0 \in A$, si può considerare il gradiente di f in x_0 , denotato con $\nabla f(x_0)$ (oppure con $\text{grad } f(x_0)$), e definito come segue

$$\nabla f(x_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \quad (10.3.4)$$

▷ In generale non vi è un legame tra le derivate parziali e le derivate direzionali, per cui la conoscenza delle derivate parziali non è sufficiente per determinare tutte le derivate direzionali della funzione in un fissato punto.

In alcuni casi, tuttavia, la funzione verifica una condizione più forte della sola esistenza delle derivate parziali che consente di ricavare da esse anche le derivate rispetto ad una qualsiasi direzione. Di tale proprietà ci si occupa nella sezione successiva.

10.3.3 Differenziabilità

Si studia ora il concetto di funzione differenziabile di seguito introdotto.

Definizione 10.3.2 *Siano A un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , $x_0 \in A$ un punto interno ad A ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di n variabili reali. Si dice che f è differenziabile in x_0 se esiste un funzionale lineare $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0 . \quad (10.3.5)$$

Il funzionale lineare L previsto nella definizione precedente è unico³ e viene denominato *differenziale di f in x_0* e denotato con $df(x_0)$.

Si studiano subito alcune proprietà delle funzioni differenziabili.

Teorema 10.3.3 *Siano A un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , $x_0 \in A$ un punto interno ad A ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in x_0 . Allora f è continua in x_0 .*

DIMOSTRAZIONE. Dalla definizione di differenziabilità e dalla continuità di $df(x_0)$ segue subito

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \|x - x_0\| + f(x_0) \right. \\ &\quad \left. + df(x_0)(x - x_0) \right) \\ &= f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \|x - x_0\| \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

e quindi la tesi. \square

Si osservi che se f è derivabile rispetto ad ogni direzione in x_0 non è detto che essa sia continua in x_0 (risulta essere continua solamente la restrizione di f ad ogni retta passante per x_0).

Esempio 10.3.4 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) := \begin{cases} x^2/y, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Si consideri il punto $(0, 0)$ e sia $v = (\xi, \eta)$ una direzione di \mathbb{R}^2 ; allora, se $\eta \neq 0$, si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\xi, t\eta) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t\xi)^2/(t\eta)}{t} = \frac{\xi^2}{\eta},$$

³Infatti, si supponga che L_1 ed L_2 siano funzionali lineari verificanti la (10.3.5). Si consideri $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x_0) \subset A$ e sia $0 < t < \delta$; allora, per ogni $i = 1, \dots, n$, risulta $x_0 + te_i \in A$ e inoltre

$$\begin{aligned} L_1(e_i) - L_2(e_i) &= \frac{L_1(te_i) - L_2(te_i)}{t} = \frac{L_1(x_0 + te_i - x_0) - L_2(x_0 + te_i - x_0)}{t} \\ &= \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0) - L_2(x_0 + te_i - x_0)}{\|x_0 + te_i - x_0\|} \\ &\quad - \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0) - L_1(x_0 + te_i - x_0)}{\|x_0 + te_i - x_0\|}; \end{aligned}$$

quindi, considerando il limite per $t \rightarrow 0$, dalla (10.3.5) si ottiene $L_1(e_i) = L_2(e_i)$. Poiché $i = 1, \dots, n$ è arbitrario, i funzionali lineari L_1 ed L_2 coincidono sui vettori della base canonica e quindi devono essere uguali.

mentre, se $\eta = 0$, risulta

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\xi, t\eta) - f(0, 0)}{t} = 0 ;$$

dunque, f è derivabile rispetto ad ogni direzione nel punto $(0, 0)$ e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \begin{cases} \xi^2/\eta, & \eta \neq 0, \\ 0, & \eta = 0, \end{cases} \quad v = (\xi, \eta).$$

Tuttavia f non è continua in $(0, 0)$ in quanto, ad esempio, sulla curva di equazione $y = x^2$, passante per $(0, 0)$, assume il valore 1 in ogni punto diverso da $(0, 0)$ mentre in $(0, 0)$ assume il valore 0.

In realtà, sempre con riferimento all'esempio considerato, l'esistenza delle derivate direzionali comporta la continuità in 0 della restrizione di f ad ogni retta passante per l'origine; questo, in termini analitici, vuol dire che, fissato $\varepsilon > 0$ e fissata una direzione $v = (\xi, \eta)$ di \mathbb{R}^2 , esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $t \in]-\delta, \delta[$, si abbia $|f(t\xi, t\eta) - f(0, 0)| < \varepsilon$; tuttavia, in questo caso il numero $\delta > 0$ dipende dalla direzione oltre che da ε (si può riconoscere facilmente che, imponendo la condizione $|(t\xi)^2/(t\eta)| = |f(t\xi, t\eta) - f(0, 0)| < \varepsilon$ deve essere $\delta = \varepsilon/\xi$ per ogni $\xi \neq 0$) e quindi non è possibile considerare una sfera di centro l'origine in cui vale la disuguaglianza $|f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon$.

La differenziabilità di una funzione in un punto comporta l'esistenza in tal punto di tutte le derivate direzionali; inoltre, le derivate direzionali possono essere espresse mediante il differenziale, come dimostra il seguente risultato.

Teorema 10.3.5 *Siano A un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , $x_0 \in A$ un punto interno ad A ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in x_0 . Allora, per ogni direzione $v \in \mathbb{R}^n$ di \mathbb{R}^n , f è derivabile in x_0 rispetto alla direzione v e si ha*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0)(v). \quad (10.3.6)$$

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare la tesi è sufficiente riconoscere che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = df(x_0)(v);$$

dalla definizione di differenziabilità segue, ponendo $x = x_0 + tv$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - df(x_0)(tv)}{\|tv\|} = 0,$$

e quindi, dalla linearità di $df(x_0)$, dalla limitatezza del rapporto $t/|t|$ per ogni $t \neq 0$ e tenendo presente che $\|tv\| = |t|\|v\| = |t|$, si ha anche

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - df(x_0)(v) \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - t df(x_0)(v)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - df(x_0)(tv)}{\|tv\|} \frac{|t|}{t} \\ &= 0, \end{aligned}$$

da cui segue direttamente la tesi. \square

Il viceversa del risultato precedente non vale in generale e quindi una funzione potrebbe essere derivabile rispetto ad ogni direzione in un punto pur non essendo differenziabile in tale punto; ad esempio, la funzione considerata nell'Esempio 10.3.4 è derivabile rispetto ad ogni direzione in $(0, 0)$, ma non può essere differenziabile in tale punto altrimenti, per il Teorema 10.3.3, dovrebbe essere continua in $(0, 0)$.

► In particolare il risultato precedente asserisce che una funzione differenziale in x_0 è dotata in tal punto anche di tutte le derivate parziali e dalla (10.3.6) si ha, per ogni $i = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = df(x_0)(e_i). \quad (10.3.7)$$

Quindi i valori che il differenziale assume nei vettori della base canonica sono proprio le derivate parziali di f in x_0 ; ricordando che tali valori determinano univocamente il differenziale, dalle espressioni (10.3.1) e (10.3.2) si ottiene la seguente *espressione del differenziale*, per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$df(x_0)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) x_i = (\nabla f(x_0)|x). \quad (10.3.8)$$

Utilizzando la definizione del gradiente di f in x_0 data dalla (10.3.4), il differenziale assume anche la seguente espressione

$$df(x_0)(x) = (\nabla f(x_0)|x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

e la condizione di differenziabilità si può anche scrivere nel modo seguente

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - (\nabla f(x_0)|x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

► In particolare, dalla (10.3.8) si ricava, per ogni direzione $v = (v_1, \dots, v_n)$ di \mathbb{R}^n ,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) v_i, \quad (10.3.9)$$

e quindi, se f è differenziabile in x_0 , tutte le derivate direzionali in x_0 si esprimono come combinazione lineare delle derivate parziali in x_0 . Più precisamente, la proprietà (10.3.9) esprime il fatto che le derivate direzionali sono coefficienti angolari di rette in \mathbb{R}^{n+1} passanti per $(x_0, f(x_0))$ che si

trovano tutte sullo stesso piano, denominato *piano tangente al grafico della funzione f nel punto x_0* ; tale piano, per le proprietà generali dei funzionali lineari, ha equazione $y = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0)$ (oppure anche $y = f(x_0) + (\nabla f(x_0)|x - x_0)$) oppure, ancora più esplicitamente,

$$y = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) (x_i - (x_0)_i), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R},$$

ed è univocamente individuato dal valore della funzione in x_0 e da quello delle sue derivate parziali in x_0 .

Si osservi che per $n = 1$ si ottiene l'equazione già nota della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

► Da quanto osservato, segue che la differenziabilità di una funzione fornisce tutte le informazioni sulle derivate direzionali in x_0 utilizzando solamente quelle sulle derivate parziali che, come si è visto, possono essere studiate e calcolate utilizzando gli strumenti già a disposizione per le funzioni di una sola variabile reale.

Pertanto, a questo punto è particolarmente utile avere a disposizione dei criteri di differenziabilità che utilizzino le stesse derivate parziali.

Teorema 10.3.6 *Siano A un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , $x_0 \in A$ un punto interno ad A ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di n variabili reali tale che*

i) esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in B_\delta(x_0)$, f sia derivabile parzialmente rispetto ad ogni variabile in x ;

ii) le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

sono continue in x_0 .

Allora f è differenziabile in x_0 .

Gli esempi seguenti mettono in evidenza il fatto che le condizioni fornite dal teorema precedente sono solamente sufficienti e non necessarie per assicurare la differenziabilità; pertanto, nei casi in cui le ipotesi del teorema precedente non siano soddisfatte bisogna procedere ad una verifica diretta della differenziabilità.

Esempi 10.3.7 1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) := |xy|.$$

Per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = |y_0| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|x_0 + t| - |x_0|}{t}$$

e quindi f è derivabile parzialmente rispetto ad x in $A_x := \{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$ ed in ognuno di tali punti si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = |y_0|;$$

analogamente, essendo

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = |x_0| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|y_0 + t| - |y_0|}{t}$$

si deduce che f è derivabile parzialmente rispetto ad y in

$$A_y := \{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \mid y_0 \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$$

ed in ognuno di tali punti si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = |x_0|.$$

Segue allora che in tutti i punti $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$ si può applicare il teorema del differenziale totale e si conclude che f è differenziabile in tali punti con $df(x_0, y_0)(x, y) = |y_0|x + |x_0|y$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Nei punti degli assi diversi dall'origine la funzione non è differenziabile in quanto almeno uno delle derivate parziali non esiste in tali punti.

Rimane da discutere il punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$ in cui esistono e si annullano entrambe le derivate parziali, ma non si può applicare il teorema del differenziale totale in quanto le derivate parziali non sono definite in tutto un intorno del punto $(0, 0)$. Tuttavia, usando la definizione, si riconosce subito che

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\|(x, y) - (0, 0)\|} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\rho^2 |\sin \theta \cos \theta|}{\rho} = 0, \end{aligned}$$

e quindi la funzione è differenziabile in $(0, 0)$.

2. Si consideri ora la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) := \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Si riconosce facilmente che, per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 \sin \frac{1}{x_0^2 + y_0^2} - \frac{2x_0}{x_0^2 + y_0^2} \cos \frac{1}{x_0^2 + y_0^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0 \sin \frac{1}{x_0^2 + y_0^2} - \frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2} \cos \frac{1}{x_0^2 + y_0^2},$$

e quindi, per il teorema del differenziale totale, f è differenziabile in tutti i punti diversi dall'origine.

Nel punto $(0, 0)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \sin(1/t^2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t \sin \frac{1}{t^2} = 0$$

e analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$; inoltre

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\|(x, y) - (0, 0)\|} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho \sin \frac{1}{\rho^2} = 0, \end{aligned}$$

e quindi la funzione è differenziabile in $(0, 0)$.

10.3.4 Derivate successive e formula di Taylor

Siano A un sottoinsieme di \mathbb{R}^n ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di n -variabili reali. Fissato $i = 1, \dots, n$, si può considerare l'insieme

$$A'_i := \{x_0 \in \overset{\circ}{A} \mid f \text{ è derivabile parzialmente in } x_0 \text{ rispetto ad } x_i\}$$

e conseguentemente si può definire la funzione $g : A'_i \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in A'_i$,

$$g(x) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

la quale viene denominata *funzione derivata parziale i -esima* di f .

Se $x_0 \in A'_i$ e se $j = 1, \dots, n$, si dice che f è *derivabile parzialmente due volte in x_0 rispetto alle variabili x_i ed x_j* se sono soddisfatte le seguenti condizioni

i) x_0 è interno a A'_i (cioè, f è derivabile parzialmente rispetto ad x_i in un intorno di x_0);

ii) la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ è derivabile in x_0 rispetto ad x_j .

In tal caso, si pone

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) := \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (x_0) .$$

▷ In generale, se f è derivabile parzialmente due volte in x_0 rispetto alle variabili x_i ed x_j non è detto che lo sia rispetto alle variabili x_j ed x_i ed anche quando ciò accade non si può assicurare l'uguaglianza

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) .$$

▷ Ad esempio, la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) := |x| + y ,$$

è derivabile due volte in $(0, 0)$ rispetto alle variabili y ed x , ma non rispetto alle variabili x ed y in quanto in $(0, 0)$ non esiste la derivata parziale di f rispetto ad x .

▷ Il seguente risultato garantisce delle condizioni in cui l'ordine di derivazione può essere invece invertito.

Teorema 10.3.8 (Teorema di Schwarz sull'invertibilità dell'ordine di derivazione)

Siano A un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale ed x_0 un punto interno ad A . Siano $i, j = 1, \dots, n$ e si supponga che

i) Esiste un intorno di x_0 in cui esistono le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} , \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} .$$

ii) *Le derivate parziali seconde*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

sono continue in x_0 .

Allora si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0).$$

► In maniera del tutto analoga, si possono definire le derivate di ordine superiore. Il significato del simbolo

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(x_0)$$

è da intendersi come

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) (x_0),$$

supposto che la derivata parziale seconda $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ esista in tutto un intorno del punto x_0 .

Se le derivate parziali sono continue, dal Teorema 10.3.8 di Schwarz segue che non è importante specificare l'ordine in cui si effettuano le derivazioni parziali ma solamente quante volte viene effettuata la derivata parziale rispetto ad ogni variabile.

A tal fine, risulta molto utile introdurre i *multi-indici*, che consentono di esprimere in maniera più sintetica anche derivate di ordine elevato.

Un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ è da intendersi semplicemente come una n -pla di numeri naturali (quindi, per ogni $i = 1, \dots, n$, si ha $\alpha_i \in \mathbb{N}$). Inoltre, si definisce *lunghezza del multi-indice* α il seguente numero naturale

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Se f è derivabile parzialmente $|\alpha|$ volte in un punto x_0 e se le sue derivate parziali sono continue in x_0 , il simbolo

$$D^\alpha f(x_0), \quad \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x_0)$$

denota la derivata parziale di f in x_0 fatta α_1 volte rispetto alla variabile x_1 , α_2 volte rispetto alla variabile x_2 e così via fino ad α_n volte rispetto alla variabile x_n .

▷ Anche per le funzioni di più variabili è possibile enunciare un'analogo della formula di Taylor per le funzioni di una variabile reale.

Convieni tuttavia ricorrere alle *potenze simboliche* per esprimere tale formula nel modo più semplice. Per potenza simbolica bisogna intendere formalmente una potenza del tipo

$$\left(\varphi_1(x) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \cdots + \varphi_n(x) \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)^{(h)}$$

dove l'ordine delle potenze è da intendere come ordine delle derivate parziali da considerare. Quindi, ad esempio,

$$\begin{aligned} & \left(x \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{(3)} \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0) + 3x^2y \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0, y_0) + 3xy^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Con tale notazione, la formula di Taylor può essere enunciata come segue.

Teorema 10.3.9 (Formula di Taylor per funzioni di più variabili)

Siano A un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale dotata di tutte le derivate parziali fino all'ordine $p + 1$ continue in A . Se $x_0 = ((x_0)_1, \dots, (x_0)_n) \in A$ e se $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ è tale che il segmento $S[x_0, x]$ di estremi x_0 ed x sia contenuto in A , allora esiste almeno un punto $\xi \in A$, interno al segmento $S[x_0, x]$, tale che

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \sum_{h=1}^p \frac{1}{h!} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) (x_1 - (x_0)_1) + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) (x_n - (x_0)_n) \right)^{(h)} \\ &\quad + \frac{1}{(p+1)!} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi) (x_1 - (x_0)_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi) (x_n - (x_0)_n) \right)^{(p+1)} \\ &= f(x_0) + \sum_{h=1}^p \frac{1}{h!} (\nabla f(x_0) | x - x_0)^{(h)} + \frac{1}{(p+1)!} (\nabla f(\xi) | x - x_0)^{(p+1)}. \end{aligned} \tag{10.3.10}$$

Se $p = 0$, il teorema precedente fornisce una generalizzazione del Teorema 7.2.3 di Lagrange al caso delle funzioni di più variabili reali.

Teorema 10.3.10 (Teorema di Lagrange per funzioni di più variabili)

Siano A un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale dotata di tutte le derivate parziali continue in A . Se $x_0 = ((x_0)_1, \dots, (x_0)_n) \in A$ e se $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ è tale che il segmento $S[x_0, x]$ di estremi x_0 ed x sia contenuto in A , allora esiste almeno un punto $\xi \in A$, interno al segmento $S[x_0, x]$, tale che

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi)(x_1 - (x_0)_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi)(x_n - (x_0)_n) \\ &= (\nabla f(\xi)|x - x_0). \end{aligned} \quad (10.3.11)$$

10.3.5 Differenziabilità delle funzioni composte

Sia A un sottoinsieme di \mathbb{R}^n e sia $m \geq 1$. Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ viene denominata *funzione vettoriale* di n -variabili reali. Per ogni $k = 1, \dots, m$, si può considerare la funzione reale $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in A$,

$$f_k(x) := (f(x)|e_k),$$

la quale viene denominata *componente k -esima della funzione f* (e_k denota il vettore k -esimo della base canonica in \mathbb{R}^m e $(\cdot|\cdot)$ il prodotto scalare in \mathbb{R}^m). Dalle proprietà del prodotto scalare segue subito, per ogni $x \in A$,

$$f(x) := (f_1(x), \dots, f_m(x)),$$

e per mettere in evidenza questa circostanza si scrive spesso $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Per le funzioni vettoriali possono essere introdotti tutti i concetti visti per quelle reali attribuendoli ad ogni componente.

Ad esempio, si fissino un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n ed una funzione vettoriale $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è un punto di accumulazione per A e se $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m$, si dice che ℓ è il limite di f in x_0 e si scrive $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ se, per ogni $k = 1, \dots, m$, si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = \ell_k$ (ciò, in effetti, equivale alla seguente condizione

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A \setminus \{x_0\} : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon).$$

Analogamente, se $x_0 \in A$, si dirà che f è continua in x_0 se, per ogni $k = 1, \dots, m$, la componente k -esima f_k di f è continua in x_0 (ciò equivale alla seguente condizione

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon).$$

Nello stesso modo, se x_0 è interno ad A e se $v \in \mathbb{R}^n$ è una direzione di \mathbb{R}^n , si dice che f è derivabile in x_0 secondo la direzione v se ogni f_k , $k = 1, \dots, m$,

è derivabile in x_0 secondo la direzione v e, in tal caso, si pone

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) := \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(x_0), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial v}(x_0) \right).$$

Se $v = e_i$, $i = 1, \dots, n$, la derivata di f in x_0 rispetto alla direzione e_i viene denominata derivata parziale i -esima di f in x_0 e denotata con $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$; quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) := \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x_0) \right).$$

Infine, si dice che f è differenziabile in un punto interno $x_0 \in A$ se ogni f_k , $k = 1, \dots, m$, è differenziabile in x_0 . In tal caso il differenziale $df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è una funzione lineare da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m le cui componenti sono i differenziali delle funzioni f_k ; pertanto

$$df(x_0) = (df_1(x_0), \dots, df_m(x_0)).$$

Si supponga che f sia differenziabile in x_0 . Allora, si può considerare la matrice di tipo (m, n)

$$\begin{aligned} J(f, x_0) &:= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right) && (10.3.12) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \nabla f_2(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

la quale viene denominata *matrice jacobiana di f in x_0* . Se $m = n$, il suo determinante $\det J(f, x_0)$ viene denominato *determinante jacobiano di f in x_0* e denotato con

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}.$$

Dall'espressione del differenziale si ricava in maniera immediata, per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,⁴

$$df(x_0)(x) = J(f, x_0) \cdot x = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0) x_j, \dots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_0) x_j \right).$$

Inoltre, vale il seguente importante risultato sulla differenziabilità delle funzioni composte.

Teorema 10.3.11 (Differenziabilità delle funzioni composte)

Siano A un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , B un sottoinsieme di \mathbb{R}^m ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : B \rightarrow \mathbb{R}^p$ tali che $f(A) \subset B$. Sia $x_0 \in A$ un punto interno ad A e si supponga che f sia differenziabile in x_0 e inoltre, posto $y_0 := f(x_0)$, si supponga che y_0 sia un punto interno a B e che g sia differenziabile in y_0 . Allora, la funzione composta $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ è differenziabile in x_0 e si ha

$$J(g \circ f) = J(g, y_0) \cdot J(f, x_0). \quad (10.3.13)$$

In particolare, per ogni $h = 1, \dots, p$ e per ogni $i = 1, \dots, n$, risulta

$$\frac{\partial (g \circ f)_h}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_h}{\partial y_j}(y_0) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0).$$

► In particolare, si consideri una funzione $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita in un intervallo aperto I e derivabile in un punto $t_0 \in I$ e siano A un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n tale che $\varphi(I) \subset A$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $x_0 := \varphi(t_0)$. Allora, la funzione composta $f \circ \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in t_0 e si ha

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \varphi_j'(t_0) = (\nabla f(x_0) | \varphi'(t_0)),$$

dove, per ogni $j = 1, \dots, n$, φ_j denota la componente j -esima della funzione vettoriale φ .

10.4 Punti di massimo e minimo relativo

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale definita in un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n . Si dice che un elemento $x_0 \in A$ è un *punto di massimo* (rispettivamente, *di minimo*)

⁴L'elemento $x \in \mathbb{R}^n$ può essere identificato all'occorrenza sia con una matrice di tipo $(1, n)$ che di tipo $(n, 1)$, come nel caso in esame; il prodotto tra matrici fornisce in questo caso una matrice di tipo $(m, 1)$ che si può identificare a sua volta con un elemento di \mathbb{R}^m .

relativo per f se è verificata la seguente condizione

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A \cap B_\delta(x_0) : f(x) \leq f(x_0) \quad (10.4.1)$$

(rispettivamente, $\exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A \cap B_\delta(x_0) : f(x_0) \leq f(x)$).

Se nella condizione precedente si suppone che valga una disuguaglianza stretta per ogni $x \in A \cap B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$, allora il punto di massimo (rispettivamente, di minimo) viene denominato *proprio*.

Una prima condizione necessaria viene indicata dalla seguente proposizione.

Proposizione 10.4.1 (Prima condizione necessaria per punti di massimo e minimo relativo per funzioni di più variabili)

Siano A un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale ed x_0 un punto interno ad A . Se x_0 è un punto di massimo (rispettivamente, di minimo) relativo per f e se f è differenziabile in x_0 , allora si ha

$$\forall i = 1, \dots, n : \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0. \quad (10.4.2)$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $i = 1, \dots, n$ e si consideri la funzione $f_{x_0, e_i} : I_{x_0, e_i} \rightarrow \mathbb{R}$ prevista nella Definizione 10.3.1. Poiché f è differenziabile in x_0 , essa è derivabile parzialmente rispetto alla variabile x_i in x_0 ; pertanto, la funzione f_{x_0, e_i} è derivabile in 0 e poiché 0 è un punto di massimo (rispettivamente, di minimo) relativo per f_{x_0, e_i} , deve essere $f'_{x_0, e_i}(0) = 0$, da cui

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = f'_{x_0, e_i}(0) = 0. \quad \square$$

Nelle ipotesi delle Proposizione 10.4.1, si deve avere $df(x_0) = 0$.

Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione reale definita in un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n , un punto interno $x_0 \in A$ viene denominato *punto stazionario per f* se f è differenziabile in x_0 e $df(x_0) = 0$.

Dalla Proposizione 10.4.1 precedente, si ricava che i punti di massimo e di minimo relativo interni in cui la funzione è differenziabile sono necessariamente punti stazionari per la funzione.

Può comunque accadere che un punto stazionario x_0 non risulti né di massimo né di minimo relativo per f . In tal caso il punto x_0 viene denominato *punto di sella per f* .

La proposizione precedente suggerisce il seguente metodo per la ricerca dei punti di massimo e di minimo relativo.

Osservazione 10.4.2 (Ricerca dei punti di massimo e minimo relativo per funzioni di più variabili)

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale definita in un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n . Allora i punti di massimo e di minimo relativo per f vanno ricercati tra:

1. I punti interni stazionari per f ; tali punti si ottengono considerando il sistema di n equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

nelle incognite x_1, \dots, x_n . Ogni soluzione di tale sistema richiede poi un'ulteriore indagine per verificare che si tratti effettivamente di un punto di massimo o di minimo relativo per f oppure di un punto di sella (si vedano le condizioni necessarie e sufficienti successive).

2. I punti interni in cui la funzione non è differenziabile. Tali punti richiedono un'analisi diretta caso per caso atta a verificare se si tratta o meno di punti di massimo o minimo relativo per f .
3. I punti sulla frontiera. La ricerca dei punti di massimo e di minimo relativo sulla frontiera può essere in parte ricondotta allo studio dei massimi e minimi vincolati per f ; bisogna tuttavia tener presente che un massimo o un minimo relativo della restrizione di f alla frontiera di A potrebbe non essere un punto di massimo o di minimo relativo per f .

Nel seguito della presente sezione si approfondisce l'analisi dei punti di massimo e minimo relativo considerati al punto 1. dell'Osservazione 10.4.2.

Si consideri una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita in un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n e sia x_0 un punto interno di A in cui f è dotata di tutte le derivate parziali seconde continue. Allora si può considerare la matrice jacobiana $J(\nabla f, x_0)$ del gradiente di f in x_0 . Tale matrice viene denominata *matrice hessiana di f in x_0* e denotata con il simbolo $\mathcal{H}(f, x_0)$.

Più esplicitamente, si ha

$$\mathcal{H}(f, x_0) := J(\nabla f, x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{i,j=1,\dots,n} \quad (10.4.3)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Si osserva che la matrice hessiana è una matrice quadrata di ordine n simmetrica (per il Teorema 10.3.8 di Schwarz).

Per ogni $k = 1, \dots, n$, il minore principale⁵ di $\mathcal{H}(f, x_0)$ di ordine k viene denominato *minore hessiano di ordine k di f in x_0* e denotato con $H_k(f, x_0)$. In particolare, $H_n(f, x_0)$ (cioè, il determinante della matrice hessiana di f in x_0) viene denominato *hessiano di f in x_0* e denotato con $H(f, x_0)$.

In tutte le notazioni assunte sopra la funzione f può essere omessa se ciò non dà luogo ad equivoci; pertanto la matrice hessiana, i minori hessiani e l'hessiano possono essere rispettivamente denotati con $\mathcal{H}(x_0)$, $H_k(x_0)$ ed $H(x_0)$.

La matrice hessiana consente di stabilire le seguenti ulteriori condizioni per massimi e minimi relativi.

Proposizione 10.4.3 (Seconda condizione necessaria per punti di massimo e minimo relativo per funzioni di più variabili)

Siano A un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale ed x_0 un punto interno ad A . Si supponga che f sia derivabile parzialmente due volte in x_0 rispetto a tutte le variabili; se x_0 è un punto di massimo (rispettivamente, di minimo) relativo per f , allora si ha

$$\forall k = 1, \dots, n : (-1)^k H_k(f, x_0) \geq 0, \quad (10.4.4)$$

(rispettivamente, $\forall k = 1, \dots, n : H_k(f, x_0) \geq 0$).

Teorema 10.4.4 (Condizione sufficiente per punti di massimo e minimo relativo per funzioni di più variabili)

⁵Si ricorda che se $\mathcal{M} := (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ è una matrice quadrata di ordine n e se $k = 1, \dots, n$, viene denominato *minore principale di ordine k di \mathcal{M}* il determinante M_k della matrice $\mathcal{M}_k := (a_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$ che si ottiene da \mathcal{M} considerando le prime k righe e le prime k colonne; quindi

$$M_k := \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Siano A un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale, x_0 un punto interno ad A e si supponga che f sia derivabile parzialmente due volte in x_0 rispetto a tutte le variabili.

Se sono soddisfatte le seguenti condizioni

$$i) \text{ per ogni } i = 1, \dots, n: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0,$$

$$ii) \text{ per ogni } k = 1, \dots, n: (-1)^k H_k(f, x_0) > 0$$

(rispettivamente, per ogni $k = 1, \dots, n: H_k(f, x_0) > 0$),

allora x_0 è un punto di massimo (rispettivamente, di minimo) relativo proprio per f .

Osservazione 10.4.5 Si supponga che A sia un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 e che $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione di 2 variabili reali dotata delle derivate parziali seconde in un punto stazionario interno (x_0, y_0) di A . Tenendo conto delle condizioni necessarie e di quelle sufficienti ottenute nei risultati precedenti si ha quanto segue

1. Se $H(x_0, y_0) > 0$, il punto è necessariamente di massimo oppure di minimo relativo proprio per f . Infatti, si osserva che le derivate parziali $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0)$ devono essere necessariamente diverse da 0 ed avere lo stesso segno altrimenti si avrebbe

$$H(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0) \right)^2 \leq 0.$$

Pertanto, tenendo conto del Teorema 10.4.4, si ha in questo caso che (x_0, y_0) è un punto di massimo relativo proprio per f se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) < 0$ (o equivalentemente $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) < 0$) ed è un punto di minimo relativo proprio per f se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) > 0$ (o equivalentemente $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) > 0$).

2. Se $H(x_0, y_0) = 0$, è soddisfatta in ogni caso la condizione necessaria fornita dalla Proposizione 10.4.3 ma non la condizione sufficiente del Teorema 10.4.4. Quindi in questo caso non si può dire nulla e bisogna ricorrere ad altri strumenti per determinare se (x_0, y_0) è oppure meno un punto di massimo o di minimo relativo per f .

3. Se $H(x_0, y_0) < 0$, la condizione necessaria fornita dalla Proposizione 10.4.3 non è soddisfatta e quindi (x_0, y_0) non può essere né un punto di massimo né un punto di minimo relativo per f . Quindi (x_0, y_0) è un punto di sella per f .

10.5 Massimo e minimo assoluto

Una volta determinati i punti di massimo e minimo relativo può essere discussa anche l'eventuale esistenza del massimo e del minimo assoluto della funzione. Se la funzione in esame è definita e continua in un insieme chiuso e limitato essa è sicuramente dotata di minimo e di massimo (assoluto) per il Teorema 10.2.3 di Weierstrass, e in tal caso il massimo ed il minimo assoluto possono essere ottenuti confrontando i valori della funzione in tutti i punti di massimo o di minimo relativo.

Nei casi in cui non è possibile garantire l'esistenza del massimo e del minimo assoluto, si procede come segue:

Osservazione 10.5.1 (Ricerca dei punti di massimo e minimo assoluto per funzioni di più variabili)

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale definita in un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n . Allora si procede come segue:

1. Si determinano i punti di massimo e di minimo relativo per f come previsto nell'Osservazione 10.4.2 ed in ognuno di tali punti si calcola il valore della funzione. Convienne tener presente che in questo caso non è necessario stabilire se i punti ottenuti dall'Osservazione 10.4.2 siano effettivamente punti di massimo o minimo relativo per f in quanto si è interessati solamente al confronto dei valori della funzione in tali punti. In particolare, non è necessario condurre l'analisi sui minore della matrice hessiana nei punti stazionari interni.
2. Potrebbe a questo punto accadere che non esiste il più grande (o il più piccolo) valore della funzione nei punti così ottenuti⁶ e in tal caso si potrà concludere che il massimo assoluto (o il minimo assoluto) della funzione non esiste in quanto i punti di massimo o minimo assoluto sono necessariamente anche punti di massimo o minimo relativo.

⁶Ad esempio, basta considerare la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) := x + \sin x - y + \sin y$. I punti stazionari sono $(\pi + 2h\pi, 2k\pi)$ con $h, k \in \mathbb{Z}$ e in tali punti la funzione assume il valore $f(\pi + 2h\pi, 2k\pi) = \pi + 2(h - k)\pi$. L'insieme di tali valori costituisce un insieme non limitato superiormente né inferiormente.

Se, invece, esiste il valore più grande $M_f \in \mathbb{R}$ (oppure più piccolo $m_f \in \mathbb{R}$) nei punti ottenuti, esso potrebbe essere il massimo (oppure il minimo) assoluto della funzione ed i punti in cui esso viene assunto potrebbero così essere i punti di massimo (o minimo) assoluto della funzione.

3. Si confronta M_f (oppure m_f) con il comportamento della funzione nei punti in cui essa è definita ma non è continua oppure i punti di accumulazione in cui la funzione non è definita. Tale comportamento viene studiato considerando il limite della funzione oppure, nel caso in cui esso non esista, considerando il limite minimo e quello massimo. Se in uno di tali punti il valore del limite o del limite massimo è strettamente maggiore di M_f , si conclude che f non è dotata di massimo assoluto, mentre se accade che in ognuno di tali punti il limite o il limite massimo è minore o uguale di M_f , allora M_f è il massimo assoluto della funzione. Analogamente, se in uno dei punti considerati il valore del limite o del limite minimo è strettamente minore di m_f , si conclude che f non è dotata di minimo assoluto, mentre se accade che in ognuno di tali punti il limite o il limite minimo è maggiore o uguale di m_f , allora m_f è il minimo assoluto della funzione.

10.6 Massimi e minimi vincolati

Sia assegnata una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita in un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n . Si vogliono ora studiare i massimi ed i minimi relativi di f non in tutto l'insieme A ma in un particolare sottoinsieme di A i cui punti soddisfano l'equazione di un vincolo, ad esempio $F(x) = 0$ con $F : B \rightarrow \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}^n$. Si è pertanto interessati a determinare i massimi e minimi relativi di $f|_V$ dove $V := A \cap \{x \in B \mid F(x) = 0\}$. Tali punti vengono denominati di *massimo e minimo vincolato per f* .

Nel caso in cui sia possibile esplicitare una delle variabili dell'equazione $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ in funzione delle altre (cioè risolvere l'equazione rispetto ad una delle variabili si ottiene $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ se e solo se $x_i = \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$) e quindi il problema posto equivale a determinare massimi e minimi relativi della funzione di $n - 1$ variabili

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ = f(x_1, \dots, x_{i-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), x_{i+1}, \dots, x_n) . \end{aligned}$$

▷ Ad esempio, si supponga di voler studiare i massimi e minimi vincolati della funzione

$$f(x, y) := x(x - y^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

sottoposti al vincolo $F(x, y) := x^2 - y^2$.

Dall'equazione $F(x, y) = 0$ si ottiene $y = \pm x$ e quindi basta studiare massimi e minimi relativi delle funzioni di una variabile

$$g_+(x) := f(x, x) = x(x - x^2) = x^2(1 - x), \quad g_-(x) := f(x, -x) = x^2(1 - x);$$

pur essendo $g_+ = g_-$, esse forniscono punti distinti di massimo e di minimo relativo per f . Infatti, la funzione g_+ ammette un massimo relativo in 0 ed un minimo relativo in $2/3$; segue che f ha un massimo vincolato in $(0, 0)$ e due minimi vincolati nei punti $(2/3, \pm 2/3)$, relativi alle funzioni g_+ e g_- .

Si supponga ora che non sia possibile scrivere l'equazione del vincolo in forma esplicita. In questo caso si può ricorrere al *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*.

Tale metodo consiste nel considerare una funzione ausiliaria che dipende da $n + 1$ variabili come di seguito specificato. Si supponga assegnata una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita in un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n e l'equazione di un vincolo $F(x) = 0$ con $F : B \rightarrow \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}^n$. Si consideri la funzione $g : (A \cap B) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $(x, \lambda) = (x_1, \dots, x_n, \lambda) \in (A \cap B) \times \mathbb{R}$,

$$g(x, \lambda) := f(x) + \lambda F(x).$$

Si può dimostrare che se $(x_0, \lambda_0) \in (A \cap B) \times \mathbb{R}$ è un punto di massimo (oppure di minimo) relativo per g , allora x_0 è un punto di massimo (oppure di minimo) vincolato per f .

Conseguentemente, per determinare i punti di massimo e di minimo vincolato, si possono studiare i punti stazionari di g che sono forniti dalle soluzioni del sistema di $n + 1$ equazioni in $n + 1$ incognite

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) + \lambda \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n) + \lambda \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) + \lambda \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial \lambda}(x_1, \dots, x_n, \lambda) = F(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{array} \right.$$

Capitolo 11

L'integrale di Riemann in \mathbb{R}^n

11.1 Cenni sulla teoria della misura di Peano-Jordan in \mathbb{R}^n

La teoria della misura di Peano-Jordan, sulla quale si fonda quella dell'integrazione di Riemann, ha il vantaggio di essere basata su semplici proprietà geometriche ed inoltre la teoria dell'integrazione da essa dedotta sarà sufficiente per il tipo di funzioni di cui si vuole considerare l'integrale.

Si parte dal caso elementare della misura di un intervallo. Sia $I = [a, b]$ un intervallo di estremi a e b in \mathbb{R}^n , con $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$ tali che $a_i \leq b_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Allora, tenendo conto dell'ovvio significato geometrico nei casi $n = 2$ ed $n = 3$, risulta naturale porre in generale

$$m(I) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) .$$

Poiché la misura è nulla se i due punti hanno una delle coordinate uguali, tale misura rimane immutata se si considera un intervallo aperto (o semiaperto) anziché un intervallo chiuso.

Si passa ora a considerare la misura di un plurintervallo di \mathbb{R}^n . Innanzitutto si precisa che un plurintervallo di \mathbb{R}^n è unione di un numero finito di intervalli di \mathbb{R}^n . Quindi $P \subset \mathbb{R}^n$ è un plurintervallo di \mathbb{R}^n se esistono un numero finito di intervalli I_1, \dots, I_m tali che

$$P = \bigcup_{j=1}^m I_j .$$

Per brevità, l'insieme dei plurintervalli di \mathbb{R}^n verrà denotato nel seguito con il simbolo \mathcal{P} .

Se, inoltre, è possibile scegliere gli intervalli I_1, \dots, I_m tutti chiusi (rispettivamente, aperti oppure semiaperti) allora anche il plurintervallo viene denominato chiuso (rispettivamente (aperto, semiaperto)).

Una proprietà importante dei plurintervalli è messa in evidenza della seguente proposizione.

Proposizione 11.1.1 *Sia P un plurintervallo di \mathbb{R}^n . Allora esistono un numero finito I_1, \dots, I_m di intervalli di \mathbb{R}^n tali che*

1. per ogni $j = 1, \dots, m$: $\overset{\circ}{I}_j \neq \emptyset$;
2. per ogni $j, k = 1, \dots, m, j \neq k$: $\overset{\circ}{I}_j \cap \overset{\circ}{I}_k = \emptyset$;
3. $P = \bigcup_{j=1}^m I_j$.

Inoltre, se P è un plurintervallo chiuso (rispettivamente, semiaperto), allora gli intervalli I_1, \dots, I_m possono essere considerati anch'essi chiusi (rispettivamente, semiaperti).

Quindi, ogni plurintervallo P si può esprimere come unione di un numero finito I_1, \dots, I_m di intervalli non vuoti e con interni a due a due disgiunti. Tale proprietà consente anche per i plurintervalli di definire la misura in maniera naturale, ponendo

$$m(P) := \sum_{j=1}^m m(I_j).$$

A questo punto si vuole studiare la misurabilità di un arbitrario sottoinsieme A di \mathbb{R}^n .

Si supponga in una prima fase che A sia limitato e dotato di punti interni. Tali ipotesi consentono rispettivamente di affermare che esistono sia un intervallo che contiene A sia un intervallo contenuto in A e quindi i seguenti insiemi sono non vuoti:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e(A) &:= \{P \in \mathcal{P} \mid A \subset P\}, \\ \mathcal{P}_i(A) &:= \{P \in \mathcal{P} \mid P \subset A\}. \end{aligned}$$

Risulta ovviamente

$$\forall P_1 \in \mathcal{P}_i(A), \forall P_2 \in \mathcal{P}_e(A) : m(P_1) \leq m(P_2),$$

e quindi l'insieme delle misure dei plurintervalli contenuti in A è limitato superiormente e quello delle misure dei plurintervalli contenenti A è limitato inferiormente. Ha senso quindi porre

$$m_i(A) := \sup_{P_1 \in \mathcal{P}_i(A)} m(P_1), \quad m_e(A) := \inf_{P_2 \in \mathcal{P}_e(A)} m(P_2).$$

Il numero $m_i(A)$ viene denominato *misura interna secondo Peano-Jordan di A* , mentre il numero $m_e(A)$ viene denominato *misura esterna secondo Peano-Jordan di A* . Dalle definizioni assunte, segue subito

$$m_i(A) \leq m_e(A).$$

Nel caso in cui valga l'uguaglianza $m_i(A) = m_e(A)$, l'insieme A viene detto *misurabile secondo Peano-Jordan* e in tal caso la sua misura $m(A)$ viene definita ponendo

$$m(A) = m_i(A) = m_e(A).$$

▷ Ad esempio, si consideri l'insieme

$$B := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Q}\}$$

e si definisca l'insieme $A = B \cup ([1, 2] \times [0, 1]^{n-1})$. Ovviamente, l'intervallo $I_1 := [1, 2] \times [0, 1]^{n-1}$ ha misura 1, mentre l'intervallo $I_2 := [0, 2] \times [0, 1]^{n-1}$ ha misura 2 ed inoltre ogni plurintervallo $P_1 \in \mathcal{P}_i(A)$ è contenuto in I_1 mentre ogni intervallo $P_2 \in \mathcal{P}_e(A)$ contiene I_2 . Conseguentemente

$$m_i(A) = m(I_1) = 1, \quad m_e(A) = m(I_2) = 2$$

e quindi A non è misurabile secondo Peano-Jordan.

▷ Come ulteriore esempio, si consideri una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ positiva e limitata in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Si ricorda che il trapezoide di f è il seguente sottoinsieme

$$T(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$$

di \mathbb{R}^2 (vedasi la Sezione 8.1.3 a pag. 244).

Fissata una suddivisione $P \in \Sigma([a, b])$ di $[a, b]$, la somma superiore $S(f, P)$ di f relativa a P rappresenta l'area di un plurintervallo contenente $T(f)$, mentre la somma inferiore $s(f, P)$ di f relativa a P rappresenta l'area di un plurintervallo contenuto in $T(f)$.

Allora si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_{P \in \Sigma([a, b])} S(f, P) = \inf_{P \in \mathcal{P}_e(T(f))} m(P) = m_e(T(f))$$

e analogamente

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_{P \in \Sigma([a,b])} s(f, P) = \sup_{P \in \mathcal{P}_i(T(f))} m(P) = m_i(T(f)).$$

Si deduce, come annunciato nella Sezione 8.1.3, che f è integrabile secondo Riemann se e solo se il trapezoide $T(f)$ è un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 misurabile secondo Peano-Jordan e, in tal caso, si ha anche

$$\int_a^b f(x) dx = m(T(f)).$$

► Un'utile caratterizzazione degli insiemi misurabili viene fornita dalla proposizione seguente.

Proposizione 11.1.2 (Criterio di misurabilità mediante plurintervalli)

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ limitato e dotato di punti interni. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- a) A è misurabile secondo Peano-Jordan;
- b) $\forall \varepsilon > 0 \exists P_1 \in \mathcal{P}_i(A), \exists P_2 \in \mathcal{P}_e(A)$ t.c. $m(P_2) - m(P_1) < \varepsilon$;
- b) $\forall \varepsilon > 0 \exists P \in \mathcal{P}$ t.c. $\text{Fr}(A) \subset P, m(P) < \varepsilon$.

► Si supponga ora che $A \subset \mathbb{R}^n$ sia limitato ma privo di punti interni. In tal caso, esso viene definito misurabile se la sua misura esterna secondo Peano-Jordan è nulla; in tal caso, si pone $m(A) = 0$. Quindi un sottoinsieme limitato A di \mathbb{R}^n privo di punti interni è misurabile se e solo se verifica la seguente condizione

$$\forall \varepsilon > 0 \exists P \in \mathcal{P} \text{ t.c. } A \subset P, m(P) < \varepsilon.$$

Dalla caratterizzazione fornita nella Proposizione 11.1.2 si ricava che un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^n$ limitato e dotato di punti interni è misurabile se e solo se la sua frontiera è misurabile ed ha misura nulla.

► Si supponga infine che A sia un sottoinsieme non limitato di \mathbb{R}^n . si dice che A è misurabile secondo Peano-Jordan se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

- i) Per ogni $r > 0$: $A \cap B_r(0)$ è misurabile;

ii) $\sup_{r>0} m(A \cap B_r(0)) < +\infty$.

In tal caso, si pone

$$m(A) := \sup_{r>0} m(A \cap B_r(0)) \quad (= \lim_{r \rightarrow +\infty} m(A \cap B_r(0))) .$$

Ovviamente, anziché le sfere $B_r(0)$ con centro l'origine si può considerare una qualsiasi famiglia crescente $(A_r)_{r>0}$ di sottoinsiemi misurabili di \mathbb{R}^n la cui unione sia uguale a tutto \mathbb{R}^n .

▷ Ad esempio, si consideri il sottoinsieme di \mathbb{R}^2 (vedasi la Figura 11.1)

$$A_p := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x^p} \right\} .$$

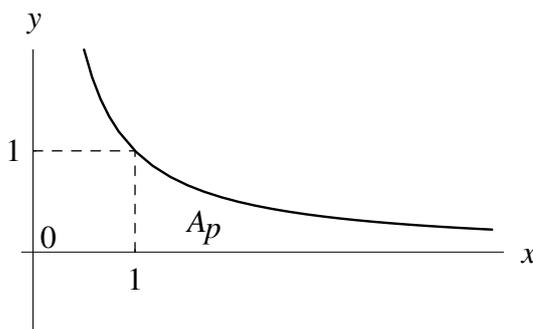


Figura 11.1: Esempio di insieme misurabile illimitato.

Per ogni $r > 1$, l'insieme $A \cap [-r, r]^n$ risulta ovviamente misurabile e inoltre

$$m(A \cap [-r, r]^n) = \int_1^r \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{r^{1-p} - 1}{1-p}, & p \neq 1, \\ \log r, & p = 1. \end{cases}$$

Poiché

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} m(A \cap [-r, r]^n) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1, \\ +\infty, & p \leq 1, \end{cases}$$

si conclude che A_p è misurabile se e solo se $p > 1$ e, in tal caso, si ha $m(A_p) = 1/(p-1)$.

11.2 Cenni sull'integrale di Riemann in \mathbb{R}^n

Sia A un sottoinsieme misurabile e limitato di \mathbb{R}^n . Si definisce *suddivisione di A* una successione finita $P = (A_i)_{i=1, \dots, m}$ di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n tali che

1. per ogni $i = 1, \dots, m$: A_i è non vuoto e misurabile;
2. per ogni $i, j = 1, \dots, m$, $i \neq j$: $\overset{\circ}{A}_i \cap \overset{\circ}{A}_j = \emptyset$ (i sottoinsiemi A_i , $i = 1, \dots, m$, hanno a due a due interni disgiunti);
3. $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$.

Inoltre, il numero

$$|P| := \max_{i=1, \dots, m} m(A_i)$$

viene denominato *ampiezza della suddivisione P* .

L'insieme di tutte le suddivisioni di A viene denotato con $\Sigma(A)$.

▷ Si riconosce facilmente che, fissato $\varepsilon > 0$, esiste sempre una suddivisione di ampiezza minore o uguale ad ε .

Infatti, posto $\delta := \varepsilon^{1/n}$, per ogni $r := (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}^n$, si può considerare l'intervallo

$$I_r := \prod_{i=1}^n [r_i, r_i + \delta].$$

Poiché A è limitato, solamente un numero finito di tali intervalli hanno intersezione non vuota con A ; denotati con I_1, \dots, I_m tali intervalli e posto, per ogni $j = 1, \dots, m$, $A_j := I_j \cap A$, si verifica facilmente che la successione finita $P = (A_i)_{i=1, \dots, m}$ è una suddivisione di A . Inoltre, per ogni $j = 1, \dots, m$, $m(A_j) \leq m(I_j) = \delta^n = \varepsilon$ da cui $|P| \leq \varepsilon$.

▷ Sia A un sottoinsieme misurabile e limitato di \mathbb{R}^n e si consideri una funzione limitata $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Se $P = (A_i)_{i=1, \dots, m}$ è una suddivisione di A , posto

$$\forall i = 1, \dots, m : \quad M_i := \sup_{x \in A_i} f(x), \quad m_i := \inf_{x \in A_i} f(x),$$

si possono definire la *somma superiore* $S(f, P)$ e la *somma inferiore* $s(f, P)$ di f relativa a P nel modo seguente

$$S(f, P) := \sum_{i=1}^m M_i m(A_i), \quad s(f, P) := \sum_{i=1}^m m_i m(A_i).$$

Comunque si considerino due suddivisioni $P_1, P_2 \in \Sigma(A)$, risulta

$$s(f, P_1) \leq S(f, P_2) .$$

Pertanto il sottoinsieme di \mathbb{R}

$$S(f) := \{S(f, P_2) \mid P_2 \in \Sigma(A)\}$$

costituito da tutte le somme superiori di f è limitato inferiormente; l'estremo inferiore di tale sottoinsieme viene denominato *integrale superiore* di f in A e denotato con uno dei simboli

$$\overline{\int}_A f, \quad \overline{\int}_A f(x) dx, \quad \overline{\int} \cdots \overline{\int}_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n .$$

Pertanto, l'integrale superiore di f è l'estremo inferiore delle somme superiori di f e soddisfa la seguente condizione, per ogni $P_1 \in \Sigma(A)$

$$s(f, P_1) \leq \overline{\int}_A f .$$

Da ciò segue che il sottoinsieme di \mathbb{R}

$$s(f) := \{s(f, P) \mid P \in \Sigma(A)\}$$

costituito da tutte le somme inferiori di f è limitato superiormente ed il suo estremo superiore viene denominato *integrale inferiore* di f in A e denotato con uno dei simboli

$$\underline{\int}_A f, \quad \underline{\int}_A f(x) dx, \quad \underline{\int} \cdots \underline{\int}_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n .$$

Quindi l'integrale inferiore di f è l'estremo superiore delle somme inferiori di f ; ma l'integrale superiore è un maggiorante delle somme inferiori e da ciò si ottiene

$$\underline{\int}_A f \leq \overline{\int}_A f .$$

In generale, non ci si può aspettare che nella formula precedente valga un'uguaglianza; per riconoscere ciò si può ricorrere ad esempi analoghi alla funzione di Dirichlet considerata in una variabile, definendo ad esempio la funzione $d : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo, per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$,

$$d(x) := \begin{cases} 1, & \forall i = 1, \dots, n : x_i \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \exists i = 1, \dots, n \text{ t.c. } x_i \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Si riconosce allora che, per ogni suddivisione $P \in \Sigma(A)$, risulta

$$S(d, P) = 1, \quad s(d, P) = 0,$$

e conseguentemente

$$\int_A d = 0, \quad \overline{\int_A d} = 1.$$

Definizione 11.2.1 *Sia A un sottoinsieme misurabile e limitato di \mathbb{R}^n e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Si dice che f è integrabile secondo Riemann in A se l'integrale superiore di f coincide con l'integrale inferiore di f*

$$\int_A f = \overline{\int_A f}.$$

In tal caso il valore comune dell'integrale superiore ed inferiore di f viene denominato integrale (multiplo) di f e denotato con uno dei seguenti simboli

$$\int_A f, \quad \int_A f(x) dx, \quad \int \cdots \int_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

L'insieme delle funzioni $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili secondo Riemann in A viene denotato con il simbolo $\mathcal{R}(A)$.

La definizione adottata generalizza in modo naturale quella già vista per le funzioni di una variabile.

Sussiste anche un criterio di integrabilità mediante suddivisioni del tutto analogo al caso di funzioni di una sola variabile.

Proposizione 11.2.2 (Criterio di integrabilità mediante suddivisioni)

Sia A un sottoinsieme misurabile e limitato di \mathbb{R}^n e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- a) f è integrabile secondo Riemann in A .
- b) $\forall \varepsilon > 0 \exists P_1, P_2 \in \Sigma(A)$ t.c. $S(f, P_2) - s(f, P_1) < \varepsilon$.
- c) $\forall \varepsilon > 0 \exists P \in \Sigma(A)$ t.c. $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.

Il criterio di integrabilità precedente è sufficiente per stabilire l'integrabilità di alcune classi di funzioni, tra cui quelle continue.

Teorema 11.2.3 (Integrabilità delle funzioni continue)

Sia A un sottoinsieme misurabile e limitato di \mathbb{R}^n e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata.¹ Allora f è integrabile secondo Riemann in A .

¹L'ipotesi che f sia limitata è automaticamente soddisfatta, per il teorema di Weierstrass, se si suppone che A sia chiuso.

▷ Anche per gli integrali multipli si può fornire un'interpretazione geometrica.

Sia A un sottoinsieme misurabile e limitato di \mathbb{R}^n e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e positiva.

Si denomina *trapezoide* relativo ad f di base A e lo si denota con $T(f)$ il seguente sottoinsieme di \mathbb{R}^{n+1}

$$T(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in A, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Dal criterio di integrabilità mediante suddivisioni (Proposizione 11.2.2) e dal criterio di misurabilità mediante plurintervalli (Proposizione 11.1.2) segue che f è integrabile secondo Riemann in A se e solo se $T(f)$ è un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^{n+1} e, in tal caso, si ha

$$\int_A f = m(T(f)).$$

Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è negativa, si può applicare quanto sopra alla funzione $-f$ e riconoscere che f è integrabile se e solo se il trapezoide $T(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in A, f(x) \leq y \leq 0\}$ è un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^{n+1} ; in tal caso, si ha

$$\int_A f = -m(T(f)).$$

Nel caso in cui f non abbia segno costante, si può applicare quanto sopra alla parte positiva $f_+ := \sup\{f, 0\}$ ed alla parte negativa $f_- := \inf\{f, 0\}$ di f .

Vista la definizione adottata, l'integrale multiplo soddisfa proprietà analoghe a quelle viste nella Proposizione 8.1.6 e nel Teorema 8.1.7; per brevità si omette di elencare tali proprietà.

Per quanto riguarda invece il calcolo degli integrali multipli non si può ricorrere a metodi analoghi a quelli utilizzati per le funzioni di una variabile in quanto non vi è un analogo del concetto di primitiva per una funzione di più variabili.

Gli strumenti maggiormente utilizzati sono l'integrazione su domini normali ed il cambiamento di variabili.

11.2.1 Integrazione su domini normali

In maniera preliminare si considera separatamente il caso di 2 variabili. Sia A un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 . Si dice che A è un *dominio normale rispetto all'asse x* (oppure *secondo l'asse y*) se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e due funzioni continue $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\alpha \leq \beta$ e

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}.$$

Un dominio normale rispetto all'asse x è sicuramente chiuso, limitato e misurabile ed inoltre la sua misura è data da

$$m(A) = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x)) dx .$$

Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua sul dominio normale A rispetto all'asse x vale la seguente *formula di riduzione degli integrali doppi*

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx . \quad (11.2.1)$$

L'integrale a secondo membro viene spesso denotato con

$$\int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$$

e quindi la formula di riduzione precedente viene scritta come segue

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy .$$

► In maniera del tutto analoga si può considerare una formula di riduzione per domini normali rispetto all'asse y .

Si dice che un sottoinsieme A di \mathbb{R}^2 è un *dominio normale rispetto all'asse y* (oppure *secondo l'asse x*) se esistono $c, d \in \mathbb{R}$ con $c < d$ e due funzioni continue $\gamma, \delta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\gamma \leq \delta$ e

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d], \gamma(x) \leq x \leq \delta(x)\} .$$

Un dominio normale rispetto all'asse y è chiuso, limitato e misurabile ed inoltre

$$m(A) = \int_c^d (\delta(x) - \gamma(x)) dx .$$

Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua sul dominio normale A rispetto all'asse y vale la seguente *formula di riduzione degli integrali doppi*

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx \right) dy . \quad (11.2.2)$$

Anche in questo caso l'integrale a secondo membro viene denotato con

$$\int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

e quindi la formula di riduzione diventa

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx .$$

▷ Si considera ora il caso generale.

Sia A un sottoinsieme di \mathbb{R}^n e sia $j=1, \dots, n$ fissato; si dice che A è normale rispetto al piano $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ individuato dai vettori $e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_n$ della base canonica (oppure secondo l'asse x_j) se esistono un sottoinsieme chiuso, limitato e misurabile $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ e due funzioni $\alpha, \beta : B \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\alpha \leq \beta$ e inoltre, posto per brevità $\hat{x}_j = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$A = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \hat{x}_j \in B, \alpha(\hat{x}_j) \leq x_j \leq \beta(\hat{x}_j)\} .$$

Se A è un dominio normale secondo l'asse x_j , allora A è chiuso, limitato e misurabile ed inoltre

$$m(A) = \int \cdots \int_B (\beta(\hat{x}_j) - \alpha(\hat{x}_j)) dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_n .$$

Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua sul dominio normale A secondo l'asse x_j vale la seguente *formula di riduzione degli integrali multipli*

$$\begin{aligned} \int \cdots \int_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n & \quad (11.2.3) \\ &= \int_B \left(\int_{\alpha(\hat{x}_j)}^{\beta(\hat{x}_j)} f(x_1, \dots, x_n) dx_j \right) dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_n . \end{aligned}$$

Anche in questo caso l'integrale a secondo membro viene denotato con

$$\int_B dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_n \int_{\alpha(\hat{x}_j)}^{\beta(\hat{x}_j)} f(x_1, \dots, x_n) dx_j$$

e quindi la formula di riduzione diventa

$$\begin{aligned} \int \cdots \int_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_B dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_n \int_{\alpha(\hat{x}_j)}^{\beta(\hat{x}_j)} f(x_1, \dots, x_n) dx_j \end{aligned}$$

Esempi 11.2.4 1. Si consideri l'integrale doppio

$$\iint_A x \sin y \, dx \, dy ,$$

con $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$. Allora, dalle formule di riduzione per gli integrali doppi si ottiene

$$\begin{aligned} \iint_A x \sin y \, dx \, dy &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x x \sin y \, dy \\ &= \int_0^1 dx [-x \cos y]_{x^2}^x \\ &= \int_0^1 (-x \cos x + x \cos x^2) \, dx \\ &= \int_0^1 -x \cos x \, dx + \frac{1}{2} \int_0^1 2x \cos x^2 \, dx \\ &= [-x \sin x]_0^1 + \int_0^1 \sin x \, dx + \frac{1}{2} [\sin x^2]_0^1 \\ &= \sin 1 - \cos 1 + 1 + \frac{1}{2} \sin 1 = \frac{3}{2} \sin 1 - \cos 1 + 1 . \end{aligned}$$

2. Si consideri l'integrale triplo

$$\iiint_A xyz \, dx \, dy \, dz ,$$

dove A è il cilindro che ha come base il cerchio unitario C con centro l'origine nel piano xy ed altezza l'intervallo $[0, 1]$ sull'asse z . Quindi

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

ed inoltre, denotata dalle formule di riduzione per gli integrali multipli si ottiene

$$\begin{aligned} \iiint_A xyz \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 z \, dz \iint_C xy \, dx \, dy \\ &= \iint_C xy \, dx \, dy \\ &= \int_{-1}^1 x \, dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \\ &= \int_{-1}^1 x(1-x^2) \, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0 . \end{aligned}$$

Il risultato poteva anche essere dedotto dalla simmetria dell'insieme di integrazione e della funzione integranda.

11.2.2 Cambiamento di variabile negli integrali multipli

Siano A e B sottoinsiemi misurabili, chiusi e limitati di \mathbb{R}^n e sia $\varphi : B \rightarrow A$ una funzione verificante le seguenti condizioni:

1. φ è invertibile;
2. $\varphi(\text{Fr}(B)) = \text{Fr}(A)$;
3. φ è derivabile parzialmente rispetto a tutte le variabili in ogni punto interno y_0 di B ;
4. φ è regolare in ogni punto y_0 interno a B , cioè il determinante della matrice jacobiana $J(\varphi, y_0)$ di φ in y_0 è diverso da 0:

$$\forall (y_1, \dots, y_n) \in \overset{\circ}{B} : \quad \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} := \det J(\varphi, (y_1, \dots, y_n)) \neq 0 .$$

Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora vale la seguente formula di cambiamento di variabile degli integrali multipli:

$$\begin{aligned} \int \cdots \int_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n & \quad (11.2.4) \\ = \int \cdots \int_B f \circ \varphi(y_1, \dots, y_n) \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right| dy_1 \cdots dy_n , \end{aligned}$$

dove $\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}$ denota il determinante jacobiano $\det J(\varphi, (y_1, \dots, y_n))$ della trasformazione φ .

Conviene osservare che la formula precedente continua a valere se le condizioni imposte alla trasformazione φ valgono in $B \setminus H$, con H insieme di misura nulla. In particolare, la formula sul cambiamento di variabili rimane valida se il determinante jacobiano si annulla in un numero finito di punti.

▷ Si osservi che la funzione φ esprime il seguente cambiamento di variabili

$$\begin{cases} x_1 := \varphi_1(y_1, \dots, y_n) , \\ x_2 := \varphi_2(y_1, \dots, y_n) , \\ \vdots \\ x_n := \varphi_n(y_1, \dots, y_n) , \end{cases}$$

dove $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sono le componenti della funzione φ .

► Un esempio spesso utilizzato di cambiamento di variabili in \mathbb{R}^2 è quello in coordinate polari, ponendo

$$\begin{cases} x := \rho \cos \theta, \\ y := \rho \sin \theta, \end{cases}$$

Lo jacobiano $J(\rho, \theta)$ di tale trasformazione è quindi dato da

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix},$$

ed il determinante jacobiano è $\det J(\rho, \theta) = \rho$.

Poiché il determinante jacobiano si annulla solamente nell'origine, si può sempre usare la trasformazione in coordinate polari. Pertanto, se A è un sottoinsieme chiuso, limitato e misurabile di \mathbb{R}^2 e se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, si ha

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta,$$

con $B := \{(\rho, \theta) \in [0, +\infty] \times [-\pi, \pi] \mid (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in A\}$.

► Ad esempio, si consideri il seguente integrale doppio

$$\iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

dove D è il settore circolare del cerchio unitario con centro nell'origine delimitato dalle semirette $y = \pm x$, $x \geq 0$.

Utilizzando il cambiamento di variabili in coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases}$$

il dominio D è l'immagine del dominio

$$\begin{aligned} B &:= \{(\rho, \theta) \in [0, +\infty] \times [-\pi, \pi] \mid 0 \leq \rho \leq 1, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\} \\ &= [0, 1] \times \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \end{aligned}$$

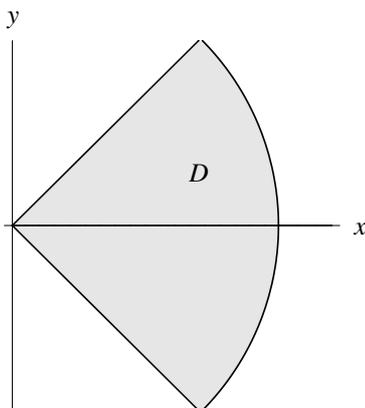


Figura 11.2: Dominio di integrazione con trasformazione in coordinate polari.

e quindi, usando anche le formule di riduzione per gli integrali doppi,

$$\begin{aligned}
 \iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_B \rho \cos \theta \rho^2 d\rho d\theta \\
 &= \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{4} [\sin \theta]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4}.
 \end{aligned}$$

► Anche per gli integrali tripli viene spesso utilizzata la trasformazione in coordinate polari (o coordinate sferiche); considerato un punto P di \mathbb{R}^3 di coordinate (x, y, z) , si considera la variabile ρ data dalla distanza di P dall'origine ($\rho \geq 0$), la variabile θ data dall'arco di circonferenza unitaria tra il semiasse positivo dell'asse x e la semiretta passante per l'origine e la proiezione $Q(x, y, 0)$ di P sul piano xy ($-\pi < \theta \leq \pi$) e la variabile φ data dall'arco di circonferenza unitaria tra il semiasse positivo dell'asse z e la semiretta passante per l'origine ed il punto P ($0 \leq \varphi \leq \pi$). Quindi

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi, \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \cos \varphi. \end{cases}$$

Lo jacobiano di tale trasformazione è dato da

$$J(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{pmatrix},$$

ed il suo determinante è

$$-\rho^2 \sin \varphi ,$$

che si annulla sull'asse z e quindi in un insieme di misura nulla; quindi la formula di riduzione per gli integrali multipli può essere applicata.

▷ Ad esempio, si vuole calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_D x^2(y-z) dx dy dz ,$$

dove D è la semisfera unitaria con centro l'origine situata nel semispazio positivo dell'asse z . Utilizzando la trasformazione in coordinate polari, il dominio D è l'immagine del seguente dominio

$$B := \left\{ (\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \rho \leq 1, -\pi \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

e quindi l'integrale triplo diventa

$$\begin{aligned} & \iiint_B \rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \rho (\sin \theta \sin \varphi - \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 \theta \sin^4 \varphi \sin \theta - \cos^2 \theta \sin^3 \varphi \cos \varphi) d\theta \int_0^1 \rho^5 d\rho \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta \sin^4 \varphi - \frac{1}{2} (\theta + \cos \theta \sin \theta) \sin^3 \varphi \cos \varphi \right]_{-\pi}^{\pi} d\varphi \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{3} \sin^4 \varphi - \frac{\pi}{2} \sin^3 \varphi \cos \varphi - \frac{1}{3} \sin^4 \varphi - \frac{\pi}{2} \sin^3 \varphi \cos \varphi \right) d\varphi \\ &= -\frac{\pi}{6} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi \\ &= -\frac{\pi}{6} \left[-\frac{1}{8} \cos(2\varphi) + \frac{1}{32} \cos(4\varphi) \right]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{24} . \end{aligned}$$

▷ Un'altra trasformazione spesso utilizzata è quella in coordinate cilindriche, che consistono nel trasformare in coordinate polari (nel piano xy) le variabili x ed y lasciando invariata l'ultima variabile z :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta , \\ y = \rho \sin \theta , \\ z = z . \end{cases}$$

Lo jacobiano di tale trasformazione è dato da

$$J(\rho, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

ed il suo determinante è ρ ; il determinante jacobiano pertanto si annulla solamente sull'asse z e quindi la formula di riduzione per gli integrali multipli può essere applicata.

▷ Ad esempio, si vuole calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} z \, dx \, dy \, dz ,$$

dove D è il cilindro che ha come base il cerchio unitario con centro l'origine nel piano xy ed altezza l'intervallo $[0, 1]$ sull'asse z . Utilizzando la trasformazione in coordinate cilindriche, il dominio D è l'immagine del seguente dominio

$$B := \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \rho \leq 1, -\pi \leq \theta \leq \pi, 0 \leq z \leq 1\}$$

e quindi l'integrale triplo diventa

$$\iiint_B \rho z \, d\rho \, d\theta \, dz = \int_0^1 \rho \, d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^1 z \, dz = 1 \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^1 = \pi .$$

Capitolo 12

Curve, campi vettoriali e superfici

12.1 Curve regolari e lunghezza

Una *curva* in \mathbb{R}^n è una funzione vettoriale continua $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita in un intervallo I di \mathbb{R} .

L'intervallo I viene denominato intervallo *intervallo base* della curva φ mentre l'immagine $\varphi^* = \varphi(I) \subset \mathbb{R}^n$ viene denominata *sostegno* della curva φ .

Assegnare quindi la curva $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ equivale ad assegnare n funzioni continue $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ (le componenti di φ) che forniscono le seguenti *equazioni parametriche* di φ

$$\begin{cases} x_1 := \varphi_1(t), \\ x_2 := \varphi_2(t), \\ \vdots \\ x_n := \varphi_n(t), \end{cases} \quad t \in I.$$

Assegnate le funzioni continue $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, la curva $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ avente tali componenti viene data da

$$\varphi(t) := \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) e_i, \quad t \in I.$$

Una curva $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ viene denominata *semplice* se può assumere lo stesso valore solamente negli estremi, cioè se verifica la seguente condizione

$$\forall t_1, t_2 \in I, t_1 < t_2 : \quad \varphi(t_1) = \varphi(t_2) \implies I = [t_1, t_2].$$

Inoltre, una curva si dice *chiusa* se il suo intervallo base è un intervallo chiuso e limitato agli estremi del quale la curva assume lo stesso valore; quindi $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è chiusa se $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Esempi 12.1.1 1. Si considerino $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ e $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. La curva $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita ponendo, per ogni $t \in [0, 1]$, $\varphi(t) := a + t(b - a)$ ha come sostegno il segmento $S[a, b]$ di estremi a e b .

Se $a \neq b$, essa è una curva semplice ma non chiusa.

2. Assegnati i punti distinti $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, si può considerare la *poligonale* $p[a_0, \dots, a_m] : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ congiungente i punti a_0, a_1, \dots, a_m definita ponendo, per ogni $t \in [0, 1]$,

$$p[a_0, \dots, a_m](t) := \begin{cases} a_i + m \left(t - \frac{i}{m} \right) (a_{i+1} - a_i), & t \in \left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m} \right[, \\ a_m, & i = 0, \dots, m-1, \\ & t = 1. \end{cases}$$

Il supporto della poligonale $p[a_0, \dots, a_m]$ è costituito dall'unione dei segmenti congiungenti a_i ed a_{i+1} , $i = 0, \dots, m-1$, cioè

$$p[a_0, \dots, a_m]^* = \bigcup_{i=0}^{m-1} S[a_i, a_{i+1}].$$

La poligonale $p[a_0, \dots, a_m]$ è chiusa se e solo se $a_0 = a_m$ ed è semplice se e solo se i segmenti che ne costituiscono il supporto possono avere in comune solamente i vertici ed ognuno di questi ultimi appartiene al più a due segmenti distinti.

3. La curva $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo, per ogni $t \in [0, 2\pi]$,

$$\gamma(t) := (\cos t, \sin t),$$

ha come supporto la circonferenza unitaria con centro l'origine nel piano.

Più in generale, si può considerare la *circonferenza di centro* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e *raggio* $r > 0$ data dal supporto della curva $\gamma_{(x_0, y_0), r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo, per ogni $t \in [0, 2\pi]$,

$$\gamma_{(x_0, y_0), r}(t) := (x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t).$$

4. **Curve in coordinate cartesiane** Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, si può considerare in maniera naturale una curva $\varphi_f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ad essa associata definita ponendo, per ogni $t \in I$,

$$\varphi_f(t) := (t, f(t)) .$$

La curva φ_f è sempre semplice e non chiusa e fornisce le coordinate parametriche della funzione f .

5. **Curve in coordinate polari** Se $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua e positiva, si può considerare in maniera naturale una curva $\gamma_\rho : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ad essa associata definita ponendo, per ogni $\theta \in I$,

$$\gamma_\rho(\theta) := (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta) .$$

La curva γ_ρ fornisce le coordinate parametriche polari della funzione ρ .

▷ Assegnate due curve $\varphi : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi : [c, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tali che $\varphi(c) = \psi(c)$, si può considerare la *curva unione* $\varphi \cup \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita ponendo, per ogni $t \in [a, b]$,

$$(\varphi \cup \psi)(t) := \begin{cases} \varphi(t) , & t \in [a, c] , \\ \psi(t) , & t \in]c, b] . \end{cases} \quad (12.1.1)$$

La denominazione adottata è giustificata dal fatto che il supporto della curva unione $\varphi \cup \psi$ è l'unione dei supporti delle curve φ e ψ , cioè $(\varphi \cup \psi)^* = (\varphi^*) \cup (\psi^*)$.

▷ Una curva $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice *regolare* se è derivabile con derivata φ' continua e, per ogni $t \in I$, si ha $\varphi'(t) \neq 0$.

Quindi φ è regolare se e solo se le sue componenti $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono derivabili in I e le loro derivate sono continue e non si annullano contemporaneamente in alcun punto di I (infatti, per ogni $t \in I$, deve essere $\sum_{i=1}^n \varphi'_i(t)^2 > 0$).

Inoltre, una curva $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice *regolare a tratti* se è unione di un numero finito di curve regolari e quindi se e solo se esistono $t_0, \dots, t_m \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che $\inf I = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = \sup I$ (se I non è limitato inferiormente si pone $t_0 = -\infty$ e se I non è limitato superiormente si pone $t_m = +\infty$) e inoltre, per ogni $i = 0, \dots, m-1$, la curva $\varphi|_{I \cap [t_i, t_{i+1}]}$ è regolare.

Pertanto, una curva $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è regolare se e solo se φ è derivabile con derivata non nulla tranne al più che in un numero finito di punti nei quali tuttavia esistono le derivate sinistre e destre e sono entrambe non nulle.

▷ La condizione di regolarità è utile per definire la tangente ad una curva in un punto, come di seguito precisato.

Si supponga che $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sia una curva regolare e sia $t_0 \in I$. Per ogni $t_1 \in I \setminus \{t_0\}$ la retta secante il grafico di φ nei punti $(t_0, \varphi(t_0)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $(t_1, \varphi(t_1)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ha equazione

$$y = \varphi(t_0) + (t - t_0) \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}{t_1 - t_0}, \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

e considerando il limite per $t_1 \rightarrow t_0$ si ottiene l'equazione della *retta tangente* al sostegno di φ nel punto $(t_0, \varphi(t_0))$

$$y = \varphi(t_0) + (t - t_0) \varphi'(t_0), \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \quad (12.1.2)$$

► Nel caso delle curve regolari a tratti, si possono definire in ogni punto le equazioni delle rette tangenti a sinistra e a destra.

Si verifica facilmente che le curve considerate negli Esempi 12.1.1 precedenti sono regolari a tratti.

Ad esempio, nel caso dell'Esempio 12.1.1, 1., per ogni $t_0 \in [0, 1]$ si ha $\varphi'(t) = b - a$ e quindi la retta tangente al sostegno di φ nel punto $(t_0, \varphi(t_0))$ ha equazione

$$y = \varphi(t_0) + (t - t_0)(b - a) = a + t_0(b - a) + (t - t_0)(b - a) = a + t(b - a),$$

$$(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Si considerino ora i punti distinti $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ e sia $p[a_0, \dots, a_m] : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la poligonale congiungente i punti a_0, a_1, \dots, a_m definita nell'Esempio 12.1.1, 2.; allora $p[a_0, \dots, a_m]$ è una curva regolare a tratti e, per ogni $i = 0, \dots, m - 1$ e $t \in]i/m, (i + 1)/m[$ si ha $p[a_0, \dots, a_m]'(t) = (a_{i+1} - a_i)$. Per ogni $i = 0, \dots, m - 1$ e $t_0 \in]i/m, (i + 1)/m[$, la retta tangente al sostegno di $p[a_0, \dots, a_m]$ in $(t_0, \varphi(t_0))$ ha equazione $y = a_i + t(a_{i+1} - a_i)$, $t \in \mathbb{R}$; tale equazione rappresenta anche la retta tangente a destra in $(a_i, p[a_0, \dots, a_m](a_i))$ ed a sinistra in $(a_{i+1}, p[a_0, \dots, a_m](a_{i+1}))$.

Si consideri infine la curva $\gamma_{(x_0, y_0), r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita nell'Esempio 12.1.1, 3. Essa è regolare e, per ogni $t_0 \in [0, 1]$,

$$\gamma'_{(x_0, y_0), r}(t_0) := (-r \sin t, r \cos t).$$

L'equazione della retta tangente in $(t_0, \gamma_{(x_0, y_0), r}(t_0))$ ha equazione

$$\begin{aligned} (x, y) &= \gamma_{(x_0, y_0), r}(t_0) + (t - t_0) \gamma'_{(x_0, y_0), r}(t_0) \\ &= (x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) + (t - t_0) (-r \sin t, r \cos t) \\ &= (x_0 + r \cos t - r(t - t_0) \sin t, y_0 + r \sin t + r(t - t_0) \cos t), \end{aligned}$$

$t \in \mathbb{R}$. In forma parametrica la retta tangente ha quindi le seguenti equazioni

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos t - r(t - t_0) \sin t, \\ y = y_0 + r \sin t + r(t - t_0) \cos t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

▷ Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e si consideri la curva $\varphi_f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ad essa associata definita ponendo, per ogni $t \in I$,

$$\varphi_f(t) := (t, f(t)).$$

Se f è derivabile e con derivata continua allora la curva φ_f è regolare e si ha, per ogni $t \in I$,

$$\varphi_f'(t) = (1, f'(t)) \quad (\neq (0, 0)).$$

Se $t_0 \in I$, l'equazione della retta tangente in $(t_0, \varphi_f(t_0))$ ha equazione

$$\begin{aligned} (x, y) &= \varphi_f(t_0) + (t - t_0) \varphi_f'(t_0) \\ &= (t_0, f(t_0)) + (t - t_0) (1, f'(t_0)) \\ &= (t, f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)), \end{aligned}$$

$t \in \mathbb{R}$. In forma parametrica la retta tangente ha quindi le seguenti equazioni

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

ed eliminando il parametro t tra le due equazioni, si ottiene

$$y = f(t_0) + f'(t_0)(x - t_0),$$

cioè l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(t_0, f(t_0))$ (vedasi la (7.1.4)).

▷ Sia $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e positiva e si consideri la curva $\gamma_\rho : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo, per ogni $\theta \in I$,

$$\gamma_\rho(\theta) := (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta).$$

Se ρ è derivabile con derivata continua e se ρ e ρ' non si annullano mai contemporaneamente, allora γ_ρ è regolare.

Infatti, per ogni $\theta \in I$,

$$\gamma_\rho'(\theta) = (\rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta, \rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta)$$

e poiché $\|\gamma_\rho'(\theta)\| = \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} \neq 0$, la curva γ_ρ è regolare.

Per ogni $\theta_0 \in I$, l'equazione della retta tangente in $(\theta_0, \gamma_\rho(\theta_0))$ ha equazione

$$\begin{aligned} (x, y) &= \gamma_\rho(\theta_0) + (\theta - \theta_0) \gamma'_\rho(\theta_0) \\ &= (\rho(\theta_0) \cos \theta_0, \rho(\theta_0) \sin \theta_0) \\ &\quad + (\theta - \theta_0) (\rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta, \rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta) \\ &= (\rho(\theta_0) \cos \theta_0 + (\theta - \theta_0) (\rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta), \\ &\quad \rho(\theta_0) \sin \theta_0 + (\theta - \theta_0) (\rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta)), \end{aligned}$$

$\theta \in \mathbb{R}$. In forma parametrica la retta tangente ha quindi le seguenti equazioni

$$\begin{cases} x = \rho(\theta_0) \cos \theta_0 + (\theta - \theta_0) (\rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta), \\ y = \rho(\theta_0) \sin \theta_0 + (\theta - \theta_0) (\rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta), \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

► Si osservi che l'intervallo base di una curva può essere modificato a seconda delle necessità considerando una opportuna trasformazione lineare. Ad esempio, se $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva definita in un intervallo chiuso e limitato con $a < b$ e se $[c, d]$ è un ulteriore intervallo di \mathbb{R} con $c < d$ si può considerare la funzione $j : [c, d] \rightarrow [a, b]$ definita ponendo, per ogni $s \in [c, d]$,

$$j(s) := \frac{b-a}{d-c} s + \frac{ad-bc}{d-c}.$$

Allora, la curva $\psi := \varphi \circ j : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ha lo stesso sostegno di φ e inoltre, poiché j e j^{-1} sono derivabili e le loro derivate sono sempre diverse da zero, la curva ψ è regolare (rispettivamente, regolare a tratti) se e solo se φ è regolare (rispettivamente, regolare a tratti).

Sia ora $t_0 \in [a, b]$ tale che φ sia derivabile in t_0 con $\varphi'(t_0) \neq 0$. Considerato $s_0 := j^{-1}(t_0)$, si ha che ψ è derivabile in s_0 e la sua derivata è $\psi'(s_0) = (d-c)/(b-a)$. Conseguentemente, la retta tangente al supporto di ψ in $(s_0, \psi(s_0))$ ha equazione

$$y = \psi(s_0) + (s - s_0) \psi'(s_0) = \varphi(t_0) + (s - s_0) \frac{d-c}{b-a} \varphi'(t_0) = \varphi(t_0) + (t - t_0) \varphi'(t_0),$$

$(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, e quindi l'equazione della retta tangente non dipende dalla scelta dell'intervallo base.

► Più in generale, le proprietà precedenti possono essere verificate per le curve equivalenti, nel senso di seguito specificato.

Si dice che due curve $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono *equivalenti* se esiste una funzione $j : J \rightarrow I$ invertibile e di classe C^1 insieme alla sua inversa (cioè sia j che j^{-1} sono derivabili e con derivata continua) tale che, per ogni $s \in J$, si abbia $j'(s) \neq 0$ ed inoltre $\psi = \varphi \circ j$.

Si verifica facilmente che se due curve sono equivalenti, esse hanno lo stesso sostegno (e quindi se una è chiusa o rispettivamente semplice anche l'altra lo è) ed inoltre la regolarità (rispettivamente, la regolarità a tratti) dell'una comporta quella dell'altra; in tal caso, le rette tangenti dipendono solamente dal punto del sostegno e non dalla curva equivalente considerata.

Assegnate due curve equivalenti $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\psi = \varphi \circ j$, si dice che φ e ψ hanno lo *stesso verso di percorrenza* (rispettivamente, che hanno *versi di percorrenza opposti*) se, per ogni $s_0 \in J$, posto $t_0 := j(s_0) \in I$, si ha

$$\begin{aligned} & \psi(J \cap [s_0, +\infty[) = \varphi(I \cap [t_0, +\infty[) \\ \text{rispettivamente, } & \psi(J \cap [s_0, +\infty[) = \varphi(I \cap]-\infty, t_0]) . \end{aligned}$$

Il primo caso si verifica quando j ha derivata strettamente positiva, mentre il secondo quando j ha derivata strettamente negativa.

▷ Assegnata una curva $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, si può considerare la *curva opposta* $\varphi^\circ : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita ponendo, per ogni $t \in [a, b]$,

$$\varphi^\circ(t) := \varphi(a + b - t) . \quad (12.1.3)$$

La curva opposta φ° è equivalente a φ ma ha verso di percorrenza opposto.

▷ Un'altra proprietà invariante delle curve equivalenti viene messa in evidenza dal concetto di lunghezza di una curva, di cui ci si vuole ora occupare.

Innanzitutto, si osserva che la definizione di lunghezza si può dare in maniera immediata per il segmento $p[a, b]$ congiungente due punti $a, b \in \mathbb{R}^n$. Infatti, si può porre

$$\ell(p[a, b]) := \|b - a\| .$$

Conseguentemente, la lunghezza di una poligonale $p[a, \dots, a_m]$ di vertici a_0, \dots, a_m può essere definita come segue

$$\ell(p[a_0, \dots, a_m]) := \sum_{i=0}^{m-1} \|a_{i+1} - a_i\| .$$

Si consideri una curva arbitraria $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Una *poligonale* $p[a_0, \dots, a_m]$ si dice *inscritta alla curva* φ se esistono $t_0, \dots, t_m \in I$ tali che $t_0 < t_1 < \dots < t_m$ e inoltre, per ogni $i = 0, \dots, m$, $\varphi(t_i) = a_i$.

Si denoti ora con \mathcal{P}_φ l'insieme di tutte le poligonali inscritte alla curva φ . Per ogni poligonale $p \in \mathcal{P}_\varphi$, ha senso per quanto già visto considerare la lunghezza $\ell(p)$ di p e ciò giustifica la seguente definizione.

Si dice che la curva $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è *rettificabile* se

$$\sup_{p \in \mathcal{P}_\varphi} \ell(p) < +\infty .$$

In tal caso, la *lunghezza* di φ è definita ponendo

$$\ell(\varphi) := \sup_{p \in \mathcal{P}_\varphi} \ell(p) .$$

Per le curve regolari a tratti, vale il seguente risultato.

Teorema 12.1.2 *Sia $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti definita in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora, φ è rettificabile e si ha¹*

$$\ell(\varphi) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt . \quad (12.1.4)$$

▷ Ad esempio, si consideri la curva $\gamma_{(x_0, y_0), r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita nell'Esempio 12.1.1, 3. Dal Teorema 12.1.2, essa è rettificabile e la sua lunghezza è data da

$$\ell(\gamma_{(x_0, y_0), r}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = 2\pi r .$$

▷ Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e con derivata continua e si consideri la curva $\varphi_f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ad essa associata definita ponendo, per ogni $t \in [a, b]$,

$$\varphi_f(t) := (t, f(t)) .$$

Allora, dal Teorema 12.1.2, φ_f è rettificabile e

$$\begin{aligned} \ell(\varphi) &= \int_a^b \|\varphi_f'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \|(1, f'(t))\| dt \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt . \end{aligned}$$

▷ Sia $\rho : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione positiva derivabile con derivata continua e tale che ρ e ρ' non si annullino mai contemporaneamente.

¹Si osservi che la funzione φ' è continua tranne che in un numero finito di punti di discontinuità di prima specie; pertanto φ' è integrabile in $[a, b]$ e conseguentemente lo è anche $\|\varphi'\|$.

Si consideri la curva $\gamma_\rho : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo, per ogni $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$,

$$\gamma_\rho(\theta) := (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta) .$$

Dal Teorema 12.1.2, γ_ρ è rettificabile e si ha

$$\ell(\gamma_\rho) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta .$$

► Tra le proprietà della lunghezza di una curva, conviene segnalare le seguenti, di immediata verifica

1. Siano $\varphi : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi : [c, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ due curve tali che $\varphi(c) = \psi(c)$ e si consideri la curva unione $\varphi \cup \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita dalla (12.1.1). Se φ e ψ sono entrambe regolari a tratti, allora anche $\varphi \cup \psi$ è regolare a tratti e la sua lunghezza è data da

$$\ell(\varphi \cup \psi) = \ell(\varphi) + \ell(\psi) .$$

2. Sia $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti. Allora

$$\ell(\varphi) \leq (b - a) \max_{t \in [a, b]} \|\varphi'(t)\| .$$

12.2 Integrali curvilinei e campi vettoriali conservativi

12.2.1 Integrali curvilinei

Sia $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti e si consideri una funzione reale continua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ in un sottoinsieme aperto A di \mathbb{R}^n contenente il supporto della curva φ (cioè $\varphi^* \subset A$). Si osservi che la funzione $(f \circ \varphi) \|\varphi'\|$ è integrabile in $[a, b]$ in quanto prodotto di una funzione continua con una funzione continua a tratti.

Si definisce *integrale curvilineo di f lungo la curva φ* il seguente numero reale

$$\int_\varphi f ds := \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt . \quad (12.2.1)$$

Si osservi che l'integrale curvilineo della funzione costante di costante valore 1 è uguale alla lunghezza della curva.

L'integrale curvilineo dipende dai valori della funzione f sul supporto della curva φ , ma non dal suo orientamento, come si evince dalle proprietà di seguito enunciate.

Proposizione 12.2.1 *Valgono le seguenti proprietà degli integrali curvilinei:*

1. **Proprietà di linearità** *Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue in un sottoinsieme aperto A di \mathbb{R}^n e $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti tale che $\varphi^* \subset A$. Allora, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\int_{\varphi} (f + g) ds = \int_{\varphi} f ds + \int_{\varphi} g ds, \quad \int_{\varphi} (\lambda f) ds = \lambda \int_{\varphi} f ds.$$

2. **Proprietà di monotonia** *Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue in un sottoinsieme aperto A di \mathbb{R}^n e $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti tale che $\varphi^* \subset A$. Se $f \leq g$ (cioè, per ogni $x \in A$, $f(x) \leq g(x)$), allora si ha anche*

$$\int_{\varphi} f ds \leq \int_{\varphi} g ds.$$

3. *Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in un sottoinsieme aperto A di \mathbb{R}^n e $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti tale che $\varphi^* \subset A$. Allora*

$$\left| \int_{\varphi} f ds \right| \leq \sup_{x \in \varphi^*} |f(x)| \ell(\varphi).$$

4. *Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in un sottoinsieme aperto A di \mathbb{R}^n e $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti tale che $\varphi^* \subset A$. Considerata la curva opposta $\varphi^{\circ} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita dalla (12.1.3), si ha che φ° è anch'essa regolare a tratti ed inoltre*

$$\int_{\varphi} f ds = \int_{\varphi^{\circ}} f ds.$$

5. *Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in un sottoinsieme aperto A di \mathbb{R}^n e $\varphi : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi : [c, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ due curve regolari a tratti tali che $\varphi(c) = \psi(c)$ e $\varphi^* \subset A$, $\psi^* \subset A$. Si consideri la curva unione $\varphi \cup \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita dalla (12.1.1); allora anche $\varphi \cup \psi$ è regolare a tratti, $(\varphi \cup \psi)^* \subset A$ ed inoltre*

$$\int_{\varphi \cup \psi} f ds = \int_{\varphi} f ds + \int_{\psi} f ds.$$

DIMOSTRAZIONE. Le proprietà 1. e 2. sono immediata conseguenza della definizione di integrale curvilineo.

Per quanto riguarda la proprietà 3. basta osservare che

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varphi} f ds \right| &= \left| \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt \right| \leq \int_a^b |f(\varphi(t))| \|\varphi'(t)\| dt \\ &\leq \sup_{x \in \varphi^*} |f(x)| \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt \leq \sup_{x \in \varphi^*} |f(x)| \ell(\varphi). \end{aligned}$$

Nelle ipotesi della proprietà 4. si ha

$$\begin{aligned} \int_{\varphi^o} f ds &= \int_a^b f(\varphi^o(t)) \|(\varphi^o)'(t)\| dt = \int_a^b f(\varphi(a+b-t)) \|\varphi'(a+b-t)\| dt \\ &= \int_b^a f(\varphi(u)) \|\varphi'(u)\| (-du) = \int_a^b f(\varphi(u)) \|\varphi'(u)\| du = \int_{\varphi} f ds. \end{aligned}$$

Infine, la proprietà 5. segue direttamente dalle definizioni di integrale curvilineo e di curva unione. \square

12.2.2 Integrali curvilinei di un campo vettoriale

Una funzione continua vettoriale $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita in un sottoinsieme aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ viene denominata *campo vettoriale*.

Se $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva regolare a tratti tale che $\varphi^* \subset A$, si può definire l'*integrale curvilineo del campo vettoriale* F ponendo

$$\int_{\varphi} F \cdot d\ell := \int_a^b (F(\varphi(t)) | \varphi'(t)) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\varphi(t)) \varphi_i'(t) dt \quad (12.2.2)$$

(nell'ultima uguaglianza si sono denotate con $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ le componenti di φ).

Per evidenziare il fatto che l'integrale curvilineo dipende dal verso di percorrenza della curva, spesso si precisa che l'integrale curvilineo deve essere inteso nel verso da $\varphi(a)$ a $\varphi(b)$.

Nonostante l'analogia delle notazioni usate per l'integrale curvilineo di una funzione e di un campo vettoriale nel caso $n = 1$, sarà comunque chiaro dal contesto l'integrale curvilineo da considerare.

Inoltre l'integrale curvilineo di un campo vettoriale F viene spesso denotato anche con il simbolo

$$\int_{\varphi} (F | d\ell),$$

intendendo $d\ell$ come il differenziale vettoriale (dx_1, \dots, dx_n) .

Alcune proprietà degli integrali curvilinei di campi vettoriali sono enunciate nella seguente proposizione.

Proposizione 12.2.2 *Valgono le seguenti proprietà degli integrali curvilinei di un campo vettoriale:*

1. **Proprietà di linearità** *Siano $F, G : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ campi vettoriali in un sottoinsieme aperto A di \mathbb{R}^n e sia $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti tale che $\varphi^* \subset A$. Allora, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\int_{\varphi} (F+G) \cdot d\ell = \int_{\varphi} F \cdot d\ell + \int_{\varphi} G \cdot d\ell, \quad \int_{\varphi} (\lambda F + G) \cdot d\ell = \lambda \int_{\varphi} F \cdot d\ell.$$

2. *Siano $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale in un sottoinsieme aperto A di \mathbb{R}^n e $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti tale che $\varphi^* \subset A$. Allora*

$$\left| \int_{\varphi} F \cdot d\ell \right| \leq \sup_{x \in \varphi^*} \|F(x)\| \ell(\varphi).$$

3. *Siano $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale in un sottoinsieme aperto A di \mathbb{R}^n e $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti tale che $\varphi^* \subset A$. Considerata la curva opposta $\varphi^{\circ} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita dalla (12.1.3), si ha*

$$\int_{\varphi^{\circ}} F \cdot d\ell = - \int_{\varphi} F \cdot d\ell.$$

4. *Siano $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale in un sottoinsieme aperto A di \mathbb{R}^n e $\varphi : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi : [c, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ due curve regolari a tratti tali che $\varphi(c) = \psi(c)$ e $\varphi^* \subset A$, $\psi^* \subset A$. Si consideri la curva unione $\varphi \cup \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita dalla (12.1.1); allora*

$$\int_{\varphi \cup \psi} F \cdot d\ell = \int_{\varphi} F \cdot d\ell + \int_{\psi} F \cdot d\ell.$$

DIMOSTRAZIONE. La proprietà 1. è ovvia in base alla definizione di integrale curvilineo.

Per quanto riguarda la proprietà 2. basta osservare che, dalla disuguaglianza (10.1.1) di Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varphi} F \cdot d\ell \right| &= \left| \int_a^b (F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)) dt \right| \leq \int_a^b |(F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t))| dt \\ &\leq \int_a^b \|F(\varphi(t))\| \|\varphi'(t)\| dt \leq \sup_{x \in \varphi^*} \|F(x)\| \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt \\ &= \sup_{x \in \varphi^*} \|F(x)\| \ell(\varphi). \end{aligned}$$

Nelle ipotesi della proprietà 3. si ha

$$\begin{aligned} \int_{\varphi^o} F \cdot dl &= \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\varphi^o(t)) (\varphi_i^o)'(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\varphi(a+b-t)) (-\varphi_i'(a+b-t)) dt \\ &= \int_b^a \sum_{i=1}^n F_i(\varphi(u)) (-\varphi_i'(u)) (-du) = \int_b^a \sum_{i=1}^n F_i(\varphi(u)) \varphi_i'(u) du \\ &= - \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\varphi(u)) \varphi_i'(u) du = - \int_{\varphi} F \cdot dl. \end{aligned}$$

Infine, la proprietà 4. segue direttamente dalle definizioni. \square

12.2.3 Campi vettoriali conservativi

Un campo vettoriale $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ su un insieme aperto connesso $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice *conservativo* se esiste una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile parzialmente in A e con derivate parziali continue tale che, per ogni $i = 1, \dots, n$, denotata con F_i a componente i -esima di f , si abbia

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = F_i \quad (12.2.3)$$

(cioè $\nabla f = F$).

Ogni funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ verificante la (12.2.3) viene denominata *potenziale* oppure *primitiva* del campo vettoriale F .

► Nel seguito, per ogni $k \in \mathbb{N}$, si denoterà per brevità con $C^k(A)$ l'insieme di tutte le funzioni dotate di tutte le derivate parziali continue fino all'ordine k in A , con la convenzione $C^0(A) = C(A)$. Una funzione appartenente a $C^k(A)$ verrà più brevemente denominata *di classe* $C^k(A)$. Tali notazioni si applicano ovviamente anche alle funzioni vettoriali intendendole vere per ogni componente (quindi $F \in C^k(A)$ significa che tutte le componenti di F sono dotate di tutte le derivate parziali continue fino all'ordine k in A).

► Poiché F è continua, affinché valga la (12.2.3), un potenziale deve necessariamente avere tutte le derivate parziali continue e quindi, in base alle notazioni assunte, $f \in C^1(A)$.

► I potenziali di un campo vettoriale su un insieme aperto connesso sono determinati a meno di una costante, nel senso che aggiungendo una funzione costante ad un potenziale si ottiene ancora un potenziale e viceversa due potenziali differiscono sempre per una costante.

I campi vettoriali conservativi sono caratterizzati mediante proprietà degli integrali curvilinei.

Teorema 12.2.3 *Siano A un sottoinsieme aperto connesso di \mathbb{R}^n ed $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) F è conservativo;

b) Se $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono curve regolari a tratti tali che $\varphi^* \subset A$, $\psi^* \subset A$ e $\varphi(a) = \psi(c)$, $\varphi(b) = \psi(d)$, allora

$$\int_{\varphi} F \cdot d\ell = \int_{\psi} F \cdot d\ell ;$$

c) Se $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva chiusa tale che $\varphi^* \subset A$, si ha

$$\int_{\varphi} F \cdot d\ell = 0 .$$

▷ Dal risultato precedente segue che l'integrale curvilineo di un campo vettoriale conservativo dipende solo dai punti estremi del supporto della curva e non dal percorso che li congiunge.

Se $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale conservativo su un sottoinsieme aperto connesso A e se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è un potenziale di F allora, per ogni curva regolare a tratti $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\varphi^* \subset A$, si ha

$$\int_{\varphi} F \cdot d\ell = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) .$$

Infatti

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} F \cdot d\ell &= \int_a^b (F(\varphi(t)) | \varphi'(t)) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\varphi(t)) \varphi'_i(t) dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t)) \varphi'_i(t) dt = \int_a^b (f \circ \varphi)'(t) dt = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) . \end{aligned}$$

▷ Il risultato precedente tuttavia viene solitamente applicato per riconoscere che un campo vettoriale non è conservativo. Data l'arbitrarietà delle curve regolari a tratti previste nelle condizioni b) e c), non risulta infatti percorribile la verifica di tali condizioni, mentre trovarne una per cui la b) o la c) non vale significa dimostrare che il campo vettoriale non è conservativo.

▷ Per riconoscere che un campo vettoriale è conservativo bisogna quindi ricorrere ad ulteriori strumenti che ora ci cercherà di approfondire.

Si supponga che A sia un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n e che $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ sia un campo vettoriale di classe $C^1(A)$. Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è un potenziale di F allora, dalla (12.2.3), si ricava che $f \in C^2(A)$ e inoltre, per ogni $i, j = 1, \dots, n$, dal Teorema 10.3.8 sull'invertibilità dell'ordine di derivazione segue

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}.$$

Un campo vettoriale $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe $C^1(A)$ viene denominato *irrotazionale* se verifica la seguente condizione

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}. \quad (12.2.4)$$

Quindi ogni campo vettoriale conservativo $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe $C^1(A)$ è irrotazionale. Il viceversa non è sempre vero e bisogna aggiungere delle condizioni sulla struttura dell'insieme A per poter assicurare che un campo irrotazionale sia conservativo.

▷ Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ ed $x_0 \in A$. Si dice che A è un *insieme stellato rispetto ad* x_0 se, per ogni $x \in A$, il segmento congiungente x_0 ed x è contenuto in A , cioè

$$\forall x \in A \forall t \in [0, 1] : x_0 + t(x - x_0) \in A. \quad (12.2.5)$$

Inoltre, un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice *stellato* se esiste $x_0 \in A$ rispetto al quale A è stellato.

▷ Si osservi che ogni insieme convesso è stellato; più precisamente, un insieme è convesso se e solo se esso è stellato rispetto ad ogni suo punto.

Teorema 12.2.4 *Se $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale irrotazionale di classe $C^1(A)$ su un insieme aperto stellato, allora F è conservativo.*

Il risultato precedente consente di affermare che un campo vettoriale di classe $C^1(A)$ su un insieme aperto stellato è conservativo se e solo se esso è irrotazionale. La condizione (12.2.4) è di immediata verifica e fornisce un metodo elementare per riconoscere che un campo vettoriale è conservativo.

Tuttavia, una volta stabilito che un campo vettoriale è conservativo, rimane aperto il problema di determinarne un potenziale.

A tal fine, i metodi utilizzati più frequentemente sono i seguenti:

1. Si supponga che A sia un sottoinsieme aperto stellato di \mathbb{R}^n rispetto al punto $x_0 \in A$ e sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale conservativo. Allora la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in A$,

$$f(x) := \int_{\varphi} F \cdot d\ell,$$

dove $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una qualsiasi curva regolare a tratti con supporto contenuto in A e congiungente i punti x_0 ed x (cioè $\varphi(a) = x_0$ e $\varphi(b) = x$),² è un potenziale di F ; precisamente, è il potenziale di F che si annulla in x_0 .

2. Si supponga che $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ sia un campo vettoriale conservativo su un sottoinsieme aperto connesso A di \mathbb{R}^n . Si consideri la prima componente $F_1 : A \rightarrow \mathbb{R}$ e, per ogni $(x_1, \dots, x_n) \in A$, una sua primitiva $f_1 : A \rightarrow \mathbb{R}$ rispetto alla variabile x_1 ; tale primitiva dipende ovviamente da x_2, \dots, x_n al pari quindi della costante arbitraria. Si ha pertanto

$$\int F(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(x_2, \dots, x_n),$$

dove g è una funzione arbitraria delle variabili x_2, \dots, x_n . Per determinare la funzione g si impongono le ulteriori condizioni previste nella (12.2.4)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i} = F_i, \quad i = 2, \dots, n.$$

Una volta risolte le equazioni precedenti la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$,

$$f(x_1, \dots, x_n) := f_1(x_1, \dots, x_n) + g(x_2, \dots, x_n),$$

è un potenziale di F .

12.3 Superfici ed integrali superficiali

Sia A un sottoinsieme aperto connesso di \mathbb{R}^2 . Si dice che una funzione $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una *superficie regolare* se essa verifica le seguenti condizioni

1. φ è iniettiva;
2. $\varphi \in C^1(A)$, cioè le componenti di φ sono derivabili parzialmente rispetto a tutte le variabili in A e le derivate parziali sono continue;
3. Per ogni $(u, v) \in A$, la matrice jacobiana

$$J(\varphi, (u, v)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

²Si osservi che la funzione f è ben definita in quanto, dal Teorema 12.2.3, l'integrale curvilineo non dipende dalla curva ma solamente dai punti x_0 ed x .

di φ ha rango 2.

Si supponga che $K \subset \mathbb{R}^2$ sia chiuso, limitato e connesso e coincida con la chiusura del proprio interno ($\overset{\circ}{K} = K$); una funzione $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dice *superficie regolare compatta* se la sua restrizione all'interno di K è una superficie regolare. Inoltre, una superficie regolare compatta si dice *chiusa* se esiste un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 la cui frontiera coincide con $\varphi(K)$, cioè

$$\exists B \subset \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } \partial B = \varphi(K) .$$

► Un esempio molto importante di superficie regolare viene fornito dalle *superfici regolari cartesiane*. Sia $K \subset \mathbb{R}^2$ chiuso, limitato e connesso e tale che $\overset{\circ}{K} = K$. Se $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe $C^1(\overset{\circ}{K})$, allora la funzione $\varphi_f : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo, per ogni $(x, y) \in K$,

$$\varphi_f(x, y) := (x, y, f(x, y)) , \quad (12.3.1)$$

è una superficie regolare compatta. Infatti essa è ovviamente iniettiva e inoltre, per ogni $(x, y) \in \overset{\circ}{K}$, la matrice jacobiana di φ_f

$$J(\varphi_f, (x, y)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

ha rango 2 in quanto la matrice da essa estratta e costituita dalle prime due righe ha determinante sempre uguale ad 1.

► Assegnata ora una superficie regolare compatta $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^3$, se ne vuole definire l'area.

Innanzitutto, per ogni $(u, v) \in \overset{\circ}{K}$, si pone

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) &:= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u, v) \right) , \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) &:= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u, v) \right) . \end{aligned}$$

A questo punto, l'area della superficie compatta φ viene definita come segue³

³Si ricorda che il *prodotto vettoriale* $x \wedge y$ di due elementi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ è definito come segue

$$x \wedge y := (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_3) ;$$

$$A(\varphi) := \iint_K \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv. \quad (12.3.2)$$

▷ Sia $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(\overset{\circ}{K})$ e si consideri la funzione $\varphi_f : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita dalla (12.3.1).

Utilizzando la (12.3.2), l'area della superficie φ_f , cioè del grafico di f , è data da

$$A(\varphi_f) = \iint_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)^2} dx dy.$$

▷ Si consideri ora una superficie regolare compatta $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ e sia A un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^3 tale che $\varphi(K) \subset A$.

Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, si può definire l'*integrale superficiale di f* come segue

$$\int_{\varphi} f d\sigma := \iint_K f(\varphi(u, v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv. \quad (12.3.3)$$

Analogamente, se $F : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale, si può definire il *flusso di F* ponendo

$$\int_{\varphi} F \cdot \nu d\sigma := \iint_K \left(F(\varphi(u, v)) \mid \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right) du dv. \quad (12.3.4)$$

Le proprietà generali dell'integrale superficiale e del flusso possono essere ottenute in maniera simile a quanto già svolto per gli integrali curvilinei di una funzione e di un campo vettoriale e per brevità vengono omesse.

12.4 Il teorema della divergenza e la formula di Stokes

Sia D un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 chiuso, limitato e connesso e tale che $\overline{(\overset{\circ}{D})} = D$. Si dice che D è regolare se la sua frontiera è localmente il grafico di una curva regolare; ciò significa che, per ogni $x_0 \in \partial D$, esistono $\delta > 0$ ed una curva regolare $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi^* = \partial D \cap B_{\delta}(x_0)$.

nel caso in esame

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right).$$

Teorema 12.4.1 (Teorema della divergenza in \mathbb{R}^2)

Sia D un dominio regolare di \mathbb{R}^2 e sia $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe $C^1(\overset{\circ}{D})$. Denotato con ν il versore normale esterno al dominio D , si ha⁴

$$\iint_D \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy = \int_{\partial D} (F|\nu) \, ds .$$

Teorema 12.4.2 (Formula di Stokes in \mathbb{R}^2)

Sia D un dominio regolare di \mathbb{R}^2 e sia $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe $C^1(\overset{\circ}{D})$. Denotato con ν il versore normale esterno al dominio D , si ha

$$\iint_{+\partial D} F \cdot d\ell = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dx \, dy .$$

In \mathbb{R}^3 valgono i seguenti risultati analoghi.

⁴Si ricorda che

$$\operatorname{div} F(x, y) := \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y) .$$

Capitolo 13

Equazioni differenziali ordinarie

13.1 Introduzione e problema di Cauchy

Un'equazione differenziale ordinaria si presenta nella forma

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x)) = 0$$

con $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definita in un sottoinsieme Ω di \mathbb{R}^{m+2} ed esprime una relazione tra la variabile indipendente x ed il valore in x di una funzione incognita e di quello delle sue derivate fino ad un certo ordine. L'ordine più grande m delle derivate coinvolte nell'equazione differenziale viene denominato *ordine* dell'equazione differenziale.

Lo studio di innumerevoli problemi in tutti i settori scientifici conduce ad equazioni differenziali e l'obiettivo è quello di determinarne le possibili *soluzioni*, cioè le funzioni $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ definite in un intervallo I di \mathbb{R} che verificano le seguenti condizioni

1. u è derivabile m volte in I ;
2. per ogni $x \in I$, si ha $(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x)) \in \Omega$;
3. per ogni $x \in I$, si ha $F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x)) = 0$.

In diverse circostanze, viene richiesto che più equazioni differenziali siano soddisfatte simultaneamente ed in questi casi la soluzione può essere una funzione vettoriale in cui ogni componente soddisfa un'assegnata equazione differenziale. Un'equazione differenziale vettoriale si presenta quindi nella forma

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x)) = 0$$

con $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita in un sottoinsieme Ω di $\mathbb{R}^{(m+1)n+1}$ in quanto le funzioni incognite $y = (y_1, \dots, y_n)$ sono a valori in \mathbb{R}^n . Quindi la funzione

F è a valori in \mathbb{R}^n e, denotate con $F_1, \dots, F_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ le sue componenti, l'equazione differenziale può essere scritta nella seguente forma di un sistema di n equazioni differenziali

$$\begin{cases} F_1(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x)) = 0, \\ F_2(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x)) = 0, \\ \vdots \\ F_n(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x)) = 0. \end{cases}$$

In questo caso una soluzione è una funzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita in un intervallo I di \mathbb{R} (quindi $u = (u_1, \dots, u_n)$ con $u_1, \dots, u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$) che verifica le seguenti condizioni

1. u è derivabile m volte in I (cioè, u_1, \dots, u_n sono derivabili m volte in I);

2. per ogni $x \in I$, si ha $(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x)) \in \Omega$ (cioè

$$(x, u_1(x), \dots, u_n(x), u_1'(x), \dots, u_n'(x), \dots, u_1^{(m)}(x), \dots, u_n^{(m)}(x)) \in \Omega);$$

3. per ogni $x \in I$, si ha $F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x)) = 0$ (cioè

$$F(x, u_1(x), \dots, u_n(x), u_1'(x), \dots, u_n'(x), \dots, u_1^{(m)}(x), \dots, u_n^{(m)}(x)) = 0).$$

L'ultima equazione può essere espressa in maniera equivalente sotto forma di un sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} F_1(x, u_1(x), \dots, u_n(x), u_1'(x), \dots, u_n'(x), \dots, u_1^{(m)}(x), \dots, u_n^{(m)}(x)) = 0, \\ F_2(x, u_1(x), \dots, u_n(x), u_1'(x), \dots, u_n'(x), \dots, u_1^{(m)}(x), \dots, u_n^{(m)}(x)) = 0, \\ \vdots \\ F_n(x, u_1(x), \dots, u_n(x), u_1'(x), \dots, u_n'(x), \dots, u_1^{(m)}(x), \dots, u_n^{(m)}(x)) = 0. \end{cases}$$

Nel seguito si cercherà di tenere conto di tali esigenze e pertanto verranno prese in considerazione equazioni differenziali in cui le funzioni incognite sono funzioni vettoriali.

Più in generale, un'equazione differenziale potrebbe esprimere una relazione in cui sono coinvolte le derivate parziali di una funzione di più variabili; queste equazioni differenziali vengono denominate *a derivate parziali* ed il loro studio richiede degli strumenti specifici che esulano da una trattazione introduttiva. Ci si limiterà pertanto a considerare equazioni differenziali ordinarie in cui la funzione incognita dipende da una sola variabile.

▷ Per applicare diversi risultati riguardanti l'esistenza e l'unicità della soluzione, è opportuno riuscire ad esplicitare le derivate di ordine massimo e scrivere l'equazione differenziale *in forma normale*

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{m-1}) \quad (13.1.1)$$

con $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita in un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^{m \cdot n + 1}$.

La funzione f viene denominata *secondo membro dell'equazione differenziale* (13.1.1).

Nella relazione precedente si è usata la convenzione universalmente adottata di denotare con $y, \dots, y^{(m)}$ i valori incogniti $y(x), \dots, y^{(m)}(x)$ in x . Denotate con $f_1, \dots, f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ le componenti di f si ha quindi il seguente sistema di n equazioni differenziali

$$\begin{cases} y_1^{(m)} = f_1(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}), \\ y_2^{(m)} = f_2(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}), \\ \vdots \\ y_n^{(m)} = f_n(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}). \end{cases} \quad (13.1.2)$$

▷ Assegnato un punto $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(m-1)}) \in A$ (si osservi che

$$y_0 \in \mathbb{R}^n, \quad y_0' \in \mathbb{R}^n, \quad \dots, \quad y_0^{(m-1)} \in \mathbb{R}^n)$$

il *problema di Cauchy* per l'equazione differenziale (13.1.1)

$$\begin{cases} y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{m-1}), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0', \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(x_0) = y_0^{(m-1)}, \end{cases}$$

consiste nel determinare una soluzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dell'equazione differenziale (13.1.1) tale che

1. $x_0 \in I$;
2. $u(x_0) = y_0, u'(x_0) = y_0', \dots, u^{(m-1)}(x_0) = y_0^{(m-1)}$.

Con riferimento al sistema di equazioni differenziali (13.1.2), il problema di Cauchy si scrive come segue

$$\begin{cases} y_1^{(m)} = f_1(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}), \\ y_2^{(m)} = f_2(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}), \\ \vdots \\ y_n^{(m)} = f_n(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}), \\ (y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)) = y_0, \\ \vdots \\ (y_1^{(m-1)}(x_0), \dots, y_n^{(m-1)}(x_0)) = y_0^{(m-1)}, \end{cases}$$

e consiste nel determinare una soluzione $u := (u_1, \dots, u_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ del sistema di equazioni differenziali (13.1.2) tale che

1. $x_0 \in I$;
2. $(u_1(x_0), \dots, u_n(x_0)) = y_0$;
 $(u_1'(x_0), \dots, u_n'(x_0)) = y_0'$;
- \vdots
- $(u_1^{(m-1)}(x_0), \dots, u_n^{(m-1)}(x_0)) = y_0^{(m-1)}$.

► Si riconosce ora che un'equazione differenziale di ordine m può essere ricondotta ad un sistema di m equazioni differenziali del primo ordine.

Proposizione 13.1.1 *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione definita in un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^{m \cdot n + 1}$ e si consideri l'equazione differenziale in forma normale*

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{m-1}). \quad (13.1.3)$$

Si considerino ora le funzioni $g_1, \dots, g_m : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ definite ponendo, per ogni $(x, z_1, z_2, \dots, z_m) \in A$ (quindi $z_i \in \mathbb{R}^n$ per ogni $i = 1, \dots, m$),

$$\begin{aligned} g_1(x, z_1, z_2, \dots, z_m) &:= z_2, \\ g_2(x, z_1, z_2, \dots, z_m) &:= z_3, \\ &\vdots \\ g_{m-1}(x, z_1, z_2, \dots, z_m) &:= z_m, \\ g_m(x, z_1, z_2, \dots, z_m) &:= f(x, z_1, z_2, \dots, z_m), \end{aligned}$$

ed il sistema di m equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} z_1' = g_1(x, z_1, z_2, \dots, z_m), \\ z_2' = g_2(x, z_1, z_2, \dots, z_m), \\ \vdots \\ z_m' = g_m(x, z_1, z_2, \dots, z_m). \end{cases} \quad (13.1.4)$$

Se $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una soluzione dell'equazione differenziale (13.1.3) allora, posto

$$z_1 := u, \quad z_2 := u', \quad \dots, \quad z_m := u^{(m-1)},$$

si ha che $z := (z_1, \dots, z_m)$ è soluzione del sistema di equazioni differenziali (13.1.4).

Viceversa, se $z := (z_1, \dots, z_m)$ è soluzione del sistema di equazioni differenziali (13.1.4), allora $u := z_1$ è soluzione dell'equazione differenziale (13.1.3).

Infine, se $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(m-1)}) \in A$, la soluzione u dell'equazione differenziale (13.1.3) soddisfa le condizioni iniziali

$$u(x_0) = y_0, \quad u'(x_0) = y_0', \quad \dots, \quad u^{(m-1)}(x_0) = y_0^{(m-1)},$$

se e solo se la corrispondente soluzione $z = (z_1, \dots, z_m)$ del sistema di equazioni differenziali (13.1.4) soddisfa la condizione iniziale $z'(x_0) = z_0$ con $z_0 := (y_0, y_0', \dots, y_0^{(m-1)})$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è immediata tenendo presente che, dalla definizione di g_1, \dots, g_m , le equazioni del sistema di equazioni differenziali considerato si ottengono imponendo che le m variabili $z_1 = y, y' = z_2, \dots, y^{(m-1)} = z_m$ siano ognuna la derivata della precedente e inoltre che la derivata di z_m (cioè $z_m' = (y^{(m-1)})' = y^{(m)}$) coincida con $f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}) = g_m(x, z_1, z_2, \dots, z_m)$. Anche la verifica delle condizioni iniziali segue direttamente dalle definizioni adottate. \square

A questo punto si può anche riconoscere che un sistema di equazioni differenziali composto da n equazioni del primo ordine si può ricondurre ad un'unica equazione differenziale del primo ordine vettoriale a valori in \mathbb{R}^n .

Proposizione 13.1.2 Siano $f_1, \dots, f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ definite in un sottoinsieme A di \mathbb{R}^{n+1} e si consideri la funzione $f := (f_1, \dots, f_n) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ di componenti f_1, \dots, f_n .

Allora, una funzione $u := (u_1, \dots, u_n) : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una soluzione del sistema di n equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n), \end{cases} \quad (13.1.5)$$

se e solo se essa è una soluzione dell'equazione differenziale vettoriale

$$y' = f(x, y), \quad y := (y_1, \dots, y_n). \quad (13.1.6)$$

Inoltre, se $(x_0, y_{0,1}, \dots, y_{0,n}) \in A$, la funzione u considerata come soluzione del sistema di equazioni differenziali (13.1.3) soddisfa le condizioni iniziali

$$u_1(x_0) = y_{0,1}, \quad \dots, \quad u_n(x_0) = y_{0,n},$$

se e solo se soddisfa la condizione iniziale $u(x_0) = y_0$ come soluzione dell'equazione differenziale (13.1.6) (si è posto per comodità $y_0 := (y_{0,1}, \dots, y_{0,n})$).

DIMOSTRAZIONE. Anche in questo caso la dimostrazione è immediata in base alle definizioni adottate. \square

► Pertanto, in base alle proposizioni precedenti, non sarà restrittivo considerare nel seguito equazioni differenziali del primo ordine (vettoriali) in forma normale del tipo

$$y' = f(x, y) \tag{13.1.7}$$

con $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita in un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (la scrittura $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ al posto di \mathbb{R}^{n+1} mette in evidenza il fatto che la variabile x è un numero reale mentre y è una variabile vettoriale in \mathbb{R}^n).

In base alle definizioni adottate, una soluzione dell'equazione differenziale (13.1.7) è una funzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita in un intervallo I di \mathbb{R} che soddisfa le seguenti condizioni

1. u è derivabile in I ;
2. per ogni $x \in I$ si ha $(x, u(x)) \in A$;
3. per ogni $x \in I$ si ha $u'(x) = f(x, u(x))$.

Assegnato $(x_0, y_0) \in A$, il *problema di Cauchy* per l'equazione differenziale (13.1.7)

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{13.1.8}$$

consiste nel determinare una soluzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dell'equazione differenziale (13.1.7) che verifica le ulteriori condizioni

1. $x_0 \in I$;
2. $u(x_0) = y_0$.

► La proposizione successiva mette in relazione le soluzioni del problema di Cauchy con quelle di un'opportuna equazione integrale.

Si precisa che, se $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione vettoriale continua, cioè le sue componenti $u_1, \dots, u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni reali continue e se $a, b \in I$, si pone

$$\int_a^b u(x) dx := \left(\int_a^b u_1(x) dx, \dots, \int_a^b u_n(x) dx \right) .$$

Proposizione 13.1.3 *Siano $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua ed $(x_0, y_0) \in A$.*

Se $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione continua in un intervallo I e tale che, per ogni $x \in I$, si abbia $(x, u(x)) \in A$, allora le seguenti proposizioni sono equivalenti

a) u è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) , \\ y(x_0) = y_0 ; \end{cases}$$

b) u soddisfa la seguente equazione integrale, per ogni $x \in I$,

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt . \quad (13.1.9)$$

DIMOSTRAZIONE. Si supponga che u sia soluzione del problema di Cauchy. Allora u è derivabile ed inoltre, poiché per ogni $x \in I$, $u'(x) = f(x, u(x))$ e sia u che f sono continue, si ha che u' è continua. Conseguentemente, per ogni $x \in I$,

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^x u'(t) dt = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt .$$

Viceversa, si supponga che u soddisfi l'equazione integrale (13.1.9). Poiché u è continua, la funzione $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita ponendo, per ogni $x \in I$, $g(x) := f(x, u(x))$, è anch'essa continua e conseguentemente la sua funzione integrale di punto iniziale x_0 (cioè la funzione $x \mapsto \int_{x_0}^x g(t) dt$) è una primitiva di g per cui è derivabile; dalla (13.1.9) si deduce che anche u deve essere derivabile (infatti, per ogni $x \in I$, risulta $u(x) = y_0 + \int_{x_0}^x g(t) dt$) e inoltre $u'(x) = g(x) = f(x, u(x))$ da cui la tesi. \square

L'equazione integrale (13.1.9) viene denominata *equazione integrale di Volterra* ed il problema di determinarne una soluzione viene spesso indicato come *problema di Liouville*.

Al fine di utilizzare la Proposizione 13.1.3 precedente per ottenere l'esistenza di soluzioni dell'equazione differenziale $y' = f(x, y)$, l'ipotesi di continuità del secondo membro f dell'equazione differenziale verrà usualmente richiesta in tutti i risultati successivi.

13.2 Unicità della soluzione del problema di Cauchy

Lo studio dell'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy è basato sul seguente risultato, noto come *lemma di Gronwall*.

Proposizione 13.2.1 (Lemma di Gronwall)

Sia $w : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale continua e positiva in un intervallo I e si supponga che esistano $x_0 \in I$ ed $L > 0$ tali che, per ogni $x \in I$,

$$w(x) \leq L \left| \int_{x_0}^x w(t) dt \right| .$$

Allora $w = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\varepsilon > 0$ e si consideri la funzione $v_\varepsilon : I \cap [x_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in I \cap [x_0, +\infty[$

$$v_\varepsilon(x) := \varepsilon + L \int_{x_0}^x w(t) dt .$$

Allora v_ε è derivabile in quanto w è continua ed inoltre, per ogni $x \in I \cap [x_0, +\infty[$, si ha $v_\varepsilon(x) > 0$ e, dalle ipotesi assunte,

$$\frac{v'_\varepsilon(x)}{v_\varepsilon(x)} = L \frac{w(x)}{\varepsilon + L \int_{x_0}^x w(t) dt} \leq L \frac{L \int_{x_0}^x w(t) dt}{\varepsilon + L \int_{x_0}^x w(t) dt} \leq L .$$

Dalla proprietà di monotonia dell'integrale segue, per ogni $x \in I$,

$$\int_{x_0}^x \frac{v'_\varepsilon(t)}{v_\varepsilon(t)} dt \leq L \int_{x_0}^x dt = L(x - x_0) ,$$

e quindi, poiché

$$\int_{x_0}^x \frac{v'_\varepsilon(t)}{v_\varepsilon(t)} dt = \log \frac{v_\varepsilon(x)}{v_\varepsilon(x_0)} ,$$

si ha

$$v_\varepsilon(x) \leq v_\varepsilon(x_0) e^{L(x-x_0)} = \varepsilon e^{L(x-x_0)} .$$

Essendo, per ipotesi, $w(x) \leq v_\varepsilon(x)$, risulta anche $w(x) \leq \varepsilon e^{L(x-x_0)}$ e dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, si ottiene $w(x) = 0$.

Nell'intervallo $I \cap]-\infty, x_0]$ si procede in maniera analoga oppure applicando quanto già dimostrato alla funzione $\tilde{w}(x) := w(x_0 - x)$. \square

► Al fine di applicare il lemma di Gronwall per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy, si definiscono ulteriori proprietà del secondo membro di un'equazione differenziale.

Si considerino un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ed una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Si dice che f è *lipschitziana rispetto alla seconda variabile* se esiste una costante $L > 0$ tale che

$$\forall (x, y) \in A \quad \forall (x, z) \in A : \quad \|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L \|y - z\|. \quad (13.2.1)$$

La costante $L > 0$ viene anche denominata *costante di Lipschitz rispetto alla seconda variabile* di f e per evidenziare ciò si dice anche che f è *L-lipschitziana rispetto alla seconda variabile*.¹

▷ Si può stabilire a questo il seguente risultato di unicità della soluzione del problema di Cauchy.

Teorema 13.2.2 (Teorema di unicità)

Siano $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua ed *L-lipschitziana rispetto alla seconda variabile* ed $(x_0, y_0) \in A$.

Se $u_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $u_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

allora, per ogni $x \in I_1 \cap I_2$, risulta $u_1(x) = u_2(x)$.

DIMOSTRAZIONE. Si ponga $I := I_1 \cap I_2$ e si consideri la funzione $w : I \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in I$,

$$w(x) = \|u_1(x) - u_2(x)\|.$$

Allora w è continua e positiva e inoltre dalla continuità di f si ottiene, per ogni $x \in I$,

$$\begin{aligned} w(x) &= \|u_1(x) - u_2(x)\| = \left\| \int_{x_0}^x (u_1'(t) - u_2'(t)) dt \right\| \leq \left| \int_{x_0}^x \|u_1'(t) - u_2'(t)\| dt \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x \|f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t))\| dt \right| \leq L \left| \int_{x_0}^x \|u_1(t) - u_2(t)\| dt \right| \\ &= L \left| \int_{x_0}^x w(t) dt \right|. \end{aligned}$$

¹La definizione adottata è basata sulla definizione generale di funzione lipschitziana. Se E ed F sono spazi normati ed $f : A \rightarrow F$ è una funzione definita in un sottoinsieme A di E , si dice che f è *lipschitziana* se esiste una costante $L > 0$ tale che, per ogni $x, y \in A$, risulti

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|.$$

Il numero L viene denominato *costante di Lipschitz* di f ed f viene anche denominata *funzione L-lipschitziana*.

Pertanto, f è lipschitziana se tutti i rapporti incrementali

$$\frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|}, \quad x, y \in A, \quad x \neq y,$$

sono limitati ed in questo caso l'estremo superiore di tali rapporti incrementali risulta essere una costante di Lipschitz per f .

Dal lemma di Gronwall (Proposizione 13.2.1) segue allora $w = 0$ e conseguentemente $u_1 = u_2$ in I . \square

Osservazione 13.2.3 Le ipotesi del risultato precedente assicurano la validità dell'unicità *in grande* cioè l'uguaglianza di due soluzioni dello stesso problema di Cauchy in tutti i punti in cui esse sono entrambe definite.

Si supponga ora che valga la proprietà di unicità *in piccolo*, cioè che $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione continua definita in $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e che, per ogni $(x_0, y_0) \in A$ e per ogni $u_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $u_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) , \\ y(x_0) = y_0 , \end{cases}$$

esista un intorno J di x_0 tale che, per ogni $x \in J \cap I_1 \cap I_2$, risulti $u_1(x) = u_2(x)$.

Si riconosce allora che vale anche la proprietà di unicità in grande.

Infatti, siano $u_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $u_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ soluzioni dello stesso problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) , \\ y(x_0) = y_0 , \end{cases}$$

e si consideri l'insieme $U := \{x \in I_1 \cap I_2 \mid u_1(x) = u_2(x)\}$. Allora $U \neq \emptyset$ in quanto $x_0 \in U$; inoltre U è chiuso in $I_1 \cap I_2$ in quanto u_1 e u_2 sono funzioni continue. Infine si riconosce che U è anche aperto in $I_1 \cap I_2$; infatti, se $x_1 \in U$, posto $y_1 := u_1(x_1) = u_2(x_1)$, si può considerare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) , \\ y(x_1) = y_1 , \end{cases}$$

ed u_1 ed u_2 sono due sue soluzioni; dalla proprietà di unicità locale segue allora che $u_1 = u_2$ in un intorno $J \cap I_1 \cap I_2$ di x_1 in $I_1 \cap I_2$. Poiché $I_1 \cap I_2$ è un intervallo ed U è un suo sottoinsieme non vuoto contemporaneamente chiuso ed aperto in $I_1 \cap I_2$, deve essere $U = I_1 \cap I_2$, da cui $u_1 = u_2$ in $I_1 \cap I_2$.

▷ Dall'Osservazione 13.2.3 precedente segue che il teorema di unicità può essere ottenuto anche assicurando l'unicità locale della soluzione con ipotesi quindi locali sulla funzione f .

Si introduce quindi la seguente definizione di funzione localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile.

Si considerino un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ed una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Si dice che f è *localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile* se, per ogni $(x_0, y_0) \in A$, esistono $\delta > 0$, $r > 0$ ed una costante $L > 0$ tali che, per ogni $(x, y) \in A \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\times B_r(y_0))$ e $(x, z) \in A \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\times B_r(y_0))$, si abbia

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L \|y - z\| . \quad (13.2.2)$$

Da quanto osservato si ottiene allora il seguente ulteriore teorema di unicità.

Teorema 13.2.4 (Teorema di unicità nel caso localmente lipschitziano rispetto alla seconda variabile)

Siano $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua e localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile ed $(x_0, y_0) \in A$.

Se $u_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $u_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) , \\ y(x_0) = y_0 , \end{cases}$$

allora, per ogni $x \in I_1 \cap I_2$, risulta $u_1(x) = u_2(x)$.

▷ Per verificare la condizione di locale lipschitzianeità rispetto alla seconda variabile, si può usare il fatto che tale condizione equivale alla limitatezza dei rapporti incrementali relativi alla seconda variabile; se f è pertanto derivabile parzialmente rispetto alla seconda variabile y (cioè rispetto alle variabili y_1, \dots, y_n se $n > 1$) con derivate parziali continue in A , allora i rapporti incrementali relativi alla seconda variabile devono essere localmente limitati e quindi la funzione risulta essere localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile.

▷ Un'altra questione legata all'unicità della soluzione del problema di Cauchy è la possibilità di prolungare le soluzioni ottenendo soluzioni massimali, che non possono essere cioè ulteriormente prolungate.

Siano $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua. Se $u_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $u_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono soluzioni dell'equazione differenziale $y' = f(x, y)$, si dice che u_2 è un *prolungamento* di u_1 se $I_1 \subset I_2$ e, per ogni $x \in I_1$, risulta $u_2(x) = u_1(x)$ (in effetti, la nozione di prolungamento può essere fornita anche nel caso in cui u_1 ed u_2 non siano necessariamente soluzioni di un'equazione differenziale).

Inoltre, si dice che una soluzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ di $y' = f(x, y)$ è *massimale* se essa non ammette alcun prolungamento $\bar{u} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ che sia ancora una soluzione di $y' = f(x, y)$ e definito in un intervallo \bar{I} contenente propriamente I .

Si osserva che se $u_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $u_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono soluzioni dell'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ che coincidono in $I_1 \cap I_2$, allora, posto $I := I_1 \cup I_2$, si può definire la funzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ponendo, per ogni $x \in I$,

$$u(x) := \begin{cases} u_1(x) , & x \in I_1 , \\ u_2(x) , & x \in I_2 . \end{cases}$$

Osservato che la funzione u è derivabile in I in quanto, se $x \in I_1 \cap I_2$, risulta $u'_1(x) = f(x, u_1(x)) = f(x, u_2(x)) = u'_2(x)$, si ottiene che u è ancora una soluzione dell'equazione differenziale.

Pertanto, nelle ipotesi in cui valga l'unicità della soluzione, si può affermare che ogni soluzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ di $y' = f(x, y)$ ammette un prolungamento massimale, cioè esiste un prolungamento $\bar{u} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ di u che è soluzione massimale di $y' = f(x, y)$ (si osservi che tale risultato non assicura l'esistenza di soluzioni, ma solamente il fatto che, assegnata una soluzione, essa possa essere prolungata ad una soluzione massimale).

Infatti, è sufficiente considerare l'insieme $\mathcal{P}(u) := \{v : I_v \rightarrow \mathbb{R}^n \mid v \text{ è un prolungamento di } u \text{ ed è soluzione di } y' = f(x, y)\}$ e, posto

$$\tilde{I} := \bigcup_{v \in \mathcal{P}(u)} I_v ,$$

definire la funzione $\tilde{u} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ponendo, per ogni $x \in I$, $\tilde{u}(x) := v(x)$ dove $v \in \mathcal{P}(u)$ e $x \in I_v$. Allora si verifica direttamente che \tilde{u} è un prolungamento di u ed è una soluzione massimale di $y' = f(x, y)$.

▷ Dalla discussione precedente segue che, se $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ è continua e localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile, allora ogni soluzione di $y' = f(x, y)$ ammette un prolungamento massimale.

In particolare, tale proprietà è verificata se si suppone che f sia derivabile parzialmente e con derivate parziali continue rispetto alle variabili y_1, \dots, y_n .

▷ Si osservi infine che le soluzioni massimali non devono essere confuse con le soluzioni in grande che sono le soluzioni definite in tutto l'intervallo $I := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } (x, y) \in A\}$.

13.3 Esistenza della soluzione del problema di Cauchy

Per quanto riguarda l'esistenza di soluzioni del problema di Cauchy, i risultati più importanti sono i seguenti teoremi di esistenza in piccolo ed in grande.

Teorema 13.3.1 (Teorema di Peano di esistenza di soluzioni in piccolo)

Siano $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua ed $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{A}$. Allora esiste un intervallo I tale che $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ ed esiste una soluzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) , \\ y(x_0) = y_0 . \end{cases}$$

Nel teorema precedente non è possibile specificare l'ampiezza dell'intervallo in cui esiste una soluzione del problema di Cauchy né si può affermare che tale soluzione sia unica. Con l'aggiunta di ulteriori ipotesi sulla funzione f si può invece ottenere il seguente risultato.

Teorema 13.3.2 *Siano $A := [a, b] \times B'_r(y_0)$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua ed L -lipschitziana rispetto alla seconda variabile e si ponga² $M := \sup_{x \in [a, b]} \|f(x, y_0)\|$. Allora, per ogni $x_0 \in]a, b[$, posto $\delta_1 := \min\{x_0 - a, r/M\}$ e $\delta_2 := \min\{b - x_0, r/M\}$, esiste una ed sola soluzione $u : [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) , \\ y(x_0) = y_0 . \end{cases}$$

La dimostrazione del risultato precedente è basata sul metodo delle approssimazioni successive di Peano-Picard.

Dal risultato precedente si deduce il seguente teorema di esistenza in grande.

Teorema 13.3.3 (Teorema di Cauchy-Lipschitz di esistenza di soluzioni in grande)

Siano $A := [a, b] \times \mathbb{R}^n$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua, limitata ed L -lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Allora, per ogni $(x_0, y_0) \in]a, b[\times \mathbb{R}^n$, esiste una ed sola soluzione $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) , \\ y(x_0) = y_0 . \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Si ponga $M := \sup_{x \in [a, b]} \|f(x, y_0)\|$ e si consideri $r > 0$ tale che $r > M(b - a)$. A questo punto il Teorema 13.3.2 precedente fornisce un'unica soluzione nell'intervallo $[a, b]$ in quanto risulta $\delta_1 := \min\{x_0 - a, r/M\} = x_0 - a$ e $\delta_2 := \min\{b - x_0, r/M\} = b - x_0$. \square

Conviene osservare che l'ipotesi che l'intervallo $[a, b]$ sia chiuso e limitato può essere rimossa considerando un intervallo I arbitrario.

Teorema 13.3.4 *Siano I un intervallo di \mathbb{R} , $A := I \times \mathbb{R}^n$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua e tale che, per ogni intervallo $[a, b] \subset I$, la sua restrizione ad $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ sia lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Allora, per ogni $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{I} \times \mathbb{R}^n$, esiste una ed sola soluzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) , \\ y(x_0) = y_0 . \end{cases}$$

²La funzione f è limitata per il teorema di Weierstrass, essendo continua in un insieme chiuso e limitato.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, dal Teorema 13.3.3, per ogni $[a, b] \subset I$ tale che $x_0 \in]a, b[$, esiste una ed una sola soluzione $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ del problema di Cauchy assegnato. Si consideri ora una successione crescente $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di intervalli chiusi e limitati tali che x_0 sia interno a ciascuno di essi e tale che l'unione sia coincida con I . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si denoti con $u_n : J_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'unica soluzione nell'intervallo J_n del problema di Cauchy assegnato. Si riconosce allora facilmente che la funzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita ponendo, per ogni $x \in I$, $u(x) := u_n(x)$ dove $n \in \mathbb{N}$ è tale che $x \in J_n$ è ben definita ed è l'unica soluzione del problema di Cauchy assegnato definita in I . \square

13.4 Equazioni differenziali lineari

Sia I un intervallo di \mathbb{R} e si considerino $n + 1$ funzioni $a_0, \dots, a_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ con $a_n(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$ ed un'ulteriore funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si consideri l'equazione differenziale di ordine n

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x). \quad (13.4.1)$$

essa viene denominata *equazione differenziale lineare di ordine n con coefficienti a_0, \dots, a_n e termine noto f* .

Se $f = 0$, l'equazione (13.4.1) viene denominata *omogenea*, mentre se $f \neq 0$, essa viene denominata *completa*.

Poiché a_n assume valori sempre diversi da 0, si può dividere primo e secondo membro per $a_n(x)$ ed ottenere la (13.4.1) in forma normale.

Non è pertanto restrittivo supporre $a_n(x) = 1$ e considerare l'equazione differenziale lineare in forma normale

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x). \quad (13.4.2)$$

Una soluzione $u : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ dell'equazione differenziale (13.4.2) è pertanto una funzione derivabile n volte in un intervallo $J \subset I$ e tale che, per ogni $x \in J$, si abbia

$$u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) u^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) u'(x) + a_0(x) u(x) = f(x).$$

Il problema di Cauchy per l'equazione differenziale lineare (13.4.2) si ottiene considerando $x_0 \in I$ ed una n -pla $(y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$ e le condizioni

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \quad (13.4.3)$$

In questo caso una soluzione $u : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ del problema di Cauchy (13.4.3) è una soluzione dell'equazione differenziale (13.4.2) tale che $x_0 \in J$ ed inoltre

$$u(x_0) = y_0, \quad u'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad u^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Per studiare l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di Cauchy, nel seguito si supporrà che le funzioni a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 ed f siano continue in I .

Si è visto in precedenza che le equazioni differenziali di ordine n possono essere ricondotte ad un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine che nel caso dell'equazione differenziale (13.4.2) è il seguente

$$\begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = y_3, \\ \vdots \\ y'_{n-1} = y_n, \\ y'_n = -a_{n-1}(x)y_n - \dots - a_1(x)y_2 - a_0(x)y_1 + f(x), \end{cases}$$

Inoltre, il problema di Cauchy (13.4.3) si ottiene imponendo le ulteriori condizioni

$$y_1(x_0) = y_0, \quad y_2(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Infine, il sistema precedente può essere espresso come un'unica equazione differenziale del primo ordine (vettoriale) $y' = g(x, y)$ dove il secondo membro è la funzione $g : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita ponendo, per ogni $(x, y_1, \dots, y_n) \in I \times \mathbb{R}^n$,

$$g(x, y_1, \dots, y_n) := (y_2, y_3, \dots, y_n, -a_{n-1}(x)y_n - \dots - a_1(x)y_2 - a_0(x)y_1 + f(x)).$$

Quindi le componenti di g sono date dalle funzioni $g_1, \dots, g_n : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definite ponendo, per ogni $(x, y_1, \dots, y_n) \in I \times \mathbb{R}^n$,

$$\begin{cases} g_1(x, y_1, \dots, y_n) := y_2, \\ g_2(x, y_1, \dots, y_n) := y_3, \\ \vdots \\ g_{n-1}(x, y_1, \dots, y_n) := y_n, \\ g_n(x, y_1, \dots, y_n) := -a_{n-1}(x)y_n - \dots - a_1(x)y_2 - a_0(x)y_1 + f(x). \end{cases}$$

Si dimostra ora che la funzione g verifica le ipotesi del Teorema 13.3.4. Infatti, g è ovviamente continua ed inoltre, considerato un intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset I$ e posto

$$M := \max_{x \in [a, b]} \max\{|a_0(x)|, \dots, |a_{n-1}(x)|\},$$

(tale massimo esiste per il teorema di Weierstrass, essendo i coefficienti ed il termine noto continui nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$), si ha, per ogni $x \in [a, b]$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \|g(x, y) - g(x, z)\|^2 &= |g_1(x, y) - g_1(x, z)|^2 + \dots \\ &\quad + |g_{n-1}(x, y) - g_{n-1}(x, z)|^2 + |g_n(x, y) - g_n(x, z)|^2 \\ &= (y_2 - z_2)^2 + \dots + (y_n - z_n)^2 \\ &\quad + |a_{n-1}(x)(y_n - z_n) + \dots \\ &\quad + a_1(x)(y_2 - z_2) + a_0(x)(y_1 - z_1)|^2 \\ &\leq \|y - z\|^2 + M^2 (|y_n - z_n| + \dots \\ &\quad + |y_2 - z_2| + |y_1 - z_1|)^2 \\ &\leq \|y - z\|^2 + n^2 M^2 \|y - z\|^2 \\ &= (1 + n^2 M^2) \|y - z\|^2, \end{aligned}$$

da cui $\|g(x, y) - g(x, z)\| \leq \sqrt{1 + n^2 M^2} \|y - z\|$. Quindi g è lipschitziana rispetto alla seconda variabile in $[a, b] \times \mathbb{R}^n$.

Conseguentemente, tenendo conto delle Proposizioni 13.1.2 e 13.1.1, esiste sempre una ed una sola soluzione del problema di Cauchy (13.4.3) e tale soluzione è definita in tutto l'intervallo I .

► Si studia ora come determinare le soluzioni dell'equazione differenziale lineare (13.4.2).

Si considera innanzitutto l'equazione omogenea

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad (13.4.4)$$

ottenuta dalla (13.4.2) e si osserva che l'insieme S delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale di $C(I)$ di dimensione n .

Infatti S è ovviamente un sottospazio vettoriale di $C(I)$. Sia ora $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ e, per ogni $i = 1, \dots, n$, si denoti con u_i l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \\ (y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)) = e_i. \end{cases}$$

Si riconosce ora che le soluzioni u_1, \dots, u_n sono linearmente indipendenti.

Infatti, se $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^n c_i u_i = 0$, anche per le combinazioni lineari delle derivate si ha

$$\sum_{i=1}^n c_i u_i^{(j-1)} = D^{j-1} \left(\sum_{i=1}^n c_i u_i \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

e calcolandole in x_0 si ottiene, per ogni $j = 1, \dots, n$,

$$\sum_{i=1}^n c_i u_i^{(j-1)}(x_0) = c_j$$

da cui $c_j = 0$.

Infine, considerata $u \in S$ e posto

$$c_1 := u(x_0), \quad c_2 := u'(x_0), \quad \dots, \quad c_n := u^{(n-1)}(x_0),$$

dall'unicità della soluzione del problema di Cauchy segue $u = \sum_{i=1}^n c_i u_i$ (infatti le due soluzioni verificano le stesse condizioni iniziali in x_0). Quindi le funzioni u_1, \dots, u_n costituiscono una base di S e ciò completa la dimostrazione.

▷ Per determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea (13.4.4), è quindi sufficiente trovare n soluzioni linearmente indipendenti u_1, \dots, u_n . La soluzione generale della (13.4.4) sarà data da

$$y = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Assegnate n soluzioni u_1, \dots, u_n della (13.4.4), si considera il *Wronskiano* $W : I \rightarrow \mathcal{M}_n$ (\mathcal{M}_n denota l'insieme delle matrici reali quadrate di ordine n) definito ponendo, per ogni $x \in I$,

$$W(x) := \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \dots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \dots & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}. \quad (13.4.5)$$

Il seguente risultato riassume le proprietà più importanti del wronskiano.

Proposizione 13.4.1 (Teorema del Wronskiano)

Siano I un intervallo di \mathbb{R} ed $a_0, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue e si consideri l'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0.$$

Se $u_1, \dots, u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono sue soluzioni, allora le seguenti proposizioni sono equivalenti

- a) u_1, \dots, u_n sono linearmente indipendenti;
- b) esiste $x_0 \in I$ tale che $\det W(x_0) \neq 0$;
- c) per ogni $x \in I$ si ha $\det W(x) \neq 0$.

▷ Una volta determinate le soluzioni dell'equazione omogenea (13.4.4), cioè n sue soluzioni indipendenti u_1, \dots, u_n , per risolvere l'equazione completa

(13.4.2) è sufficiente trovare una sua soluzione particolare \bar{u} . Infatti, in tal caso, tutte le soluzioni della (13.4.2) sono date da

$$y = c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n + \bar{u}, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

► Tuttavia il metodo descritto risulta in generale di difficile applicazione in quanto anche per le equazioni differenziali del secondo ordine non è immediato determinare due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea.

Nel seguito si considerano alcuni casi in cui si può determinare facilmente la soluzione generale.

13.4.1 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Siano I un intervallo di \mathbb{R} , $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue e si consideri l'equazione differenziale lineare del primo ordine

$$y' = a(x)y + b(x). \quad (13.4.6)$$

Si verifica direttamente che, denotata con $A : I \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva di a , la funzione $w : I \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in I$,

$$w(x) = e^{A(x)}$$

è una soluzione dell'equazione omogenea $y' = a(x)y$ (infatti w è derivabile in I e per ogni $x \in I$ si ha $w'(x) = A'(x)e^{A(x)} = a(x)w(x)$).

Quindi tutte le soluzioni dell'omogenea sono date da

$$y = cw, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, una soluzione particolare dell'equazione completa (13.4.6) è la funzione $\bar{u} : I \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in I$,

$$\bar{u}(x) = w(x)B(x),$$

dove $B : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una primitiva della funzione $b(x) \cdot e^{-A(x)}$ (infatti, \bar{u} è derivabile in I e, per ogni $x \in I$,

$$\begin{aligned} \bar{u}'(x) &= w'(x)B(x) + w(x)B'(x) = a(x)w(x)B(x) + b(x)w(x)e^{-A(x)} \\ &= a(x)\bar{u}(x) + b(x)e^{A(x)}e^{-A(x)} = a(x)\bar{u}(x) + b(x). \end{aligned}$$

Pertanto, la soluzione generale della (13.4.6) è data da

$$y = cw + \bar{u} = w \cdot (c + B), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Se $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, si riconosce inoltre direttamente che l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

è la funzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in I$,

$$u(x) := e^{\int_{x_0}^x a(t) dt} \left(y_0 + \int_{x_0}^x b(t) e^{-\int_{x_0}^t a(s) ds} dt \right).$$

13.4.2 Equazioni differenziali lineari di ordine n a coefficienti costanti

Siano $a_0, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ con $a_n \neq 0$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in un intervallo I di \mathbb{R} e si consideri l'equazione differenziale lineare di ordine n a coefficienti costanti

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x). \quad (13.4.7)$$

Anche in questo caso per determinarne le soluzioni conviene dapprima considerare l'equazione omogenea

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0. \quad (13.4.8)$$

L'equazione precedente viene discussa considerando il *polinomio caratteristico* $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ad essa associato che è definito ponendo, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$p(\lambda) := a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i.$$

Poiché p è un polinomio di grado n , esso ammette esattamente n zeri contati ognuno con la propria molteplicità e poiché i coefficienti di p sono reali, gli zeri saranno reali oppure complessi coniugati con la stessa molteplicità.

Ad ogni zero del polinomio caratteristico di molteplicità $h \geq 1$ vengono fatte corrispondere esattamente h soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea (13.4.8) come precisato di seguito:

- i) se $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ è uno zero reale di molteplicità $h \geq 1$ di p , allora le funzioni $u_1, \dots, u_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$u_1(x) := e^{\lambda_0 x}, \quad u_2(x) := x e^{\lambda_0 x}, \quad \dots, \quad u_h(x) := x^{h-1} e^{\lambda_0 x}$$

(se $h = 1$ si considera ovviamente solamente la funzione u_1) sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea (13.4.8);

ii) se $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ con $\beta \neq 0$ è uno zero complesso di molteplicità $h \geq 1$ di p , allora anche $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ è uno zero di molteplicità h di p e ai due zeri $\alpha \pm i\beta$ di molteplicità h si fanno corrispondere le $2h$ soluzioni linearmente indipendenti $u_1, \dots, u_h, v_1, \dots, v_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ della (13.4.8) definite ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u_1(x) &:= e^{\alpha x} \cos(\beta x), & v_1(x) &:= e^{\alpha x} \sin(\beta x), \\ u_2(x) &:= x e^{\alpha x} \cos(\beta x), & v_2(x) &:= x e^{\alpha x} \sin(\beta x), \\ &\vdots & &\vdots \\ u_h(x) &:= x^{h-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x), & v_h(x) &:= x^{h-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x) \end{aligned}$$

(se $h = 1$ si considerano ovviamente solamente le funzioni u_1 e v_1).

Applicando il metodo sopra indicato ad ogni zero del polinomio caratteristico, si ottengono esattamente n soluzioni indipendenti u_1, \dots, u_n dell'equazione omogenea ed a questo punto la soluzione generale della (13.4.8) è data da

$$y = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

► Si discute infine la determinazione di una soluzione particolare dell'equazione completa (13.4.7). A tale proposito si può cercare di applicare uno dei due metodi discussi di seguito.

Termine noto particolare

Si supponga che P_1 e P_2 siano polinomi di grado r e rispettivamente s e siano inoltre $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) := P_1(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + P_2(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Allora, una soluzione particolare dell'equazione differenziale completa

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$

può essere cercata nella forma

$$\bar{u}(x) := x^h (Q_1(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + Q_2(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)), \quad x \in \mathbb{R},$$

dove h è la molteplicità di $\alpha \pm i\beta$ come soluzione del polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea (se $\alpha \pm i\beta$ non è soluzione del polinomio caratteristico si pone per convenzione $h = 0$) e Q_1 e Q_2 sono entrambi polinomi di grado uguale ad $m := \max\{r, s\}$ con coefficienti da determinare. Per determinare i coefficienti di Q_1 e Q_2 e quindi la soluzione particolare, si procede come segue

1. Si calcolano le derivate $\bar{u}', \dots, \bar{u}^{(n)}$ fino all'ordine n di \bar{u} ;
2. Si sostituiscono \bar{u} e le sue derivate nell'equazione completa e si impone che \bar{u} sia una soluzione dell'equazione completa;
3. Si semplifica primo e secondo membro per $e^{\alpha x}$;
4. Se $\beta = 0$, si ottiene l'uguaglianza di due polinomi di grado m e dal principio di uguaglianza dei polinomi, imponendo che i coefficienti dei termini dello stesso grado di entrambi i membri siano uguali, si ottiene un sistema lineare di m equazioni nelle m incognite costituite dai coefficienti di Q_1 (in questo caso $Q_2 = 0$); risolvendo tale sistema, si ottengono i coefficienti di Q_1 e quindi la soluzione particolare \bar{u} ;
5. Se $\beta \neq 0$, si scrivono due equazioni ottenute considerando nella prima solamente i termini con $\cos(\beta x)$ e nella seconda quelli con $\sin(\beta x)$; si ottengono due equazioni che prevedono ciascuna l'uguaglianza di due polinomi di grado m (dopo aver semplificato la prima per $\cos(\beta x)$ e la seconda per $\sin(\beta x)$); ancora dal principio di uguaglianza dei polinomi, imponendo che i coefficienti dei termini dello stesso grado di entrambi i membri siano uguali, si ottiene un sistema lineare di $2m$ equazioni nelle $2m$ incognite costituite dai coefficienti di Q_1 e $Q_2 = 0$; risolvendo tale sistema, si ottengono i coefficienti di Q_1 e Q_2 e quindi la soluzione particolare \bar{u} .

Il presente metodo si può applicare anche nel caso in cui il termine noto sia somma di due funzioni f_1 ed f_2 del tipo sopra considerato. In questo caso si considerano una soluzione particolare \bar{u}_1 relativa ad f_1 ed una soluzione particolare \bar{u}_2 relativa ad f_2 e la soluzione particolare relativa alla somma $f_1 + f_2$ viene data da $\bar{u}_1 + \bar{u}_2$.

Metodo della variazione delle costanti arbitrarie di Lagrange

Si supponga ora che il termine noto $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dell'equazione differenziale completa

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

sia una funzione continua che non rientra tra quelle considerate nel caso precedente. Si può allora ricorrere al *metodo della variazione delle costanti arbitrarie di Lagrange*. Una volta determinate le n soluzioni linearmente indipendenti u_1, \dots, u_n dell'equazione omogenea, tale metodo consiste nel cercare una soluzione particolare della forma

$$\bar{u}(x) := c_1(x) u_1(x) + \dots + c_n(x) u_n(x), \quad (13.4.9)$$

dove $c_1, \dots, c_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni da determinare (da qui deriva la denominazione del metodo).

Imponendo le condizioni previste nel seguente sistema di n equazioni nelle incognite $c'_1(x), \dots, c'_n(x)$

$$\begin{cases} c'_1(x) u_1(x) + \dots + c'_n(x) u_n(x) = 0, \\ c'_1(x) u'_1(x) + \dots + c'_n(x) u'_n(x) = 0, \\ \vdots \\ c'_1(x) u_1^{(n-2)}(x) + \dots + c'_n(x) u_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ c'_1(x) u_1^{(n-1)}(x) + \dots + c'_n(x) u_n^{(n-1)}(x) = f(x), \end{cases} \quad (13.4.10)$$

si riconosce che la corrispondente funzione \bar{u} è una soluzione dell'equazione completa.

Infatti, utilizzando le relazioni previste in (13.4.10), per le derivate della funzione $\bar{u} = \sum_{i=1}^n c_i u_i$, si ha

$$\begin{aligned} \bar{u}' &= \sum_{i=1}^n c'_i u_i + \sum_{i=1}^n c_i u'_i = \sum_{i=1}^n c_i u'_i, \\ \bar{u}'' &= \sum_{i=1}^n c'_i u'_i + \sum_{i=1}^n c_i u''_i = \sum_{i=1}^n c_i u''_i, \\ &\vdots \\ \bar{u}^{(n-1)} &= \sum_{i=1}^n c'_i u_i^{(n-2)} + \sum_{i=1}^n c_i u_i^{(n-1)} = \sum_{i=1}^n c_i u_i^{(n-1)}, \\ \bar{u}^{(n)} &= \sum_{i=1}^n c'_i u_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^n c_i u_i^{(n)} = f + \sum_{i=1}^n c_i u_i^{(n)}, \end{aligned}$$

(il calcolo di ogni derivata utilizza l'espressione ottenuta nel passaggio precedente). A questo punto si osserva che

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(n)} + a_{n-1} \bar{u}^{(n-1)} + \dots + a_1 \bar{u}' + a_0 \bar{u} \\ = f + c_1 (u_1^{(n)} + a_{n-1} u_1^{(n-1)} + \dots + a_1 u'_1 + a_0 u_1) \\ + c_2 (u_2^{(n)} + a_{n-1} u_2^{(n-1)} + \dots + a_1 u'_2 + a_0 u_2) \\ + \dots \\ + c_n (u_n^{(n)} + a_{n-1} u_n^{(n-1)} + \dots + a_1 u'_n + a_0 u_n) \end{aligned}$$

e tenendo conto del fatto che u_1, \dots, u_n sono soluzioni dell'equazione omogenea, si ha

$$\bar{u}^{(n)} + a_{n-1} \bar{u}^{(n-1)} + \dots + a_1 \bar{u}' + a_0 \bar{u} = f,$$

e quindi \bar{u} è soluzione dell'equazione completa.

Il determinante dei coefficienti del sistema lineare (13.4.10) è proprio il determinante della matrice Wronskiana $W(x)$ e poiché le soluzioni u_1, \dots, u_n

sono linearmente indipendenti, esso è diverso da 0. Segue che il sistema (13.4.10) ammette un'unica soluzione $c'_1(x), \dots, c'_n(x)$ e considerandone una loro primitiva, da quanto osservato si ottiene la soluzione particolare (13.4.9).

Ulteriori riferimenti

L'elenco seguente può essere utile per un approfondimento degli argomenti trattati e per ulteriori esempi ed esercizi.

- [1] T. M. APOSTOL, *Calcolo*, Vol. I e II, *Boringhieri, Torino, 1977.*
- [2] A. AVANTAGGIATI, *Analisi Matematica I*, *Editrice Ambrosiana, Milano, 1994.*
- [3] G. C. BAROZZI, S. MATARASSO, *Analisi Matematica I*, *Zanichelli, Bologna, 1986.*
- [4] P. BOIERI, G. CHITI, *Precorso di Matematica*, *Zanichelli, Bologna, 1994.*
- [5] V. E. BONONCINI, G. FANTI, *Esercizi di Analisi Matematica*, Vol. I, *Cedam, Padova, 1970.*
- [6] N. BOURBAKI, *Elementi di storia della matematica*, *Feltrinelli, Milano, 1963.*
- [7] R. CACCIOPPOLI, *Lezioni di Analisi Matematica*, Vol. I, *Treves, Napoli, 1959.*
- [8] F. CAFIERO, A. ZITAROSA, *Lezioni di Analisi Matematica*, *Liguori Editore, Napoli, 1970.*
- [9] S. CAMPANATO, *Lezioni di Analisi Matematica*, prima parte, *Libreria Scientifica G. Pellegrini, Pisa, 1977.*
- [10] S. CAMPANATO, *Esercizi e complementi di Analisi Matematica*, prima parte, *Libreria Scientifica G. Pellegrini, Pisa, 1975.*
- [11] M. CAMPITI, *Analisi Matematica I*, *Teoria ed Esercizi*, *Liguori Editore, Napoli, 1995.*

- [12] E. CASARI, Questioni di filosofia della matematica, *Feltrinelli, Milano, 1964*.
- [13] J. P. CECCONI, G. STAMPACCHIA, Analisi Matematica, I: Funzioni di una variabile, *Liguori Editore, Napoli, 1974*.
- [14] J. P. CECCONI, G. STAMPACCHIA, Esercizi e problemi di Analisi Matematica, I: Funzioni di una variabile, *Liguori Editore, Napoli, 1979*.
- [15] P. O. COHEN, La teoria degli insiemi e l'ipotesi del continuo, *Feltrinelli, Milano, 1973*.
- [16] F. CONTI, Calcolo, *Mc Graw-Hill, Milano, 1993*.
- [17] R. COURANT, H. ROBBINS, Che cos'è la matematica?, *Boringhieri, Torino, 1971*.
- [18] P. DE LUCIA, R. FIORENZA, Esercizi di Analisi Matematica, *Liguori Editore, Napoli*.
- [19] N. FEDELE, Corso di Analisi Matematica, Vol. I, *Liguori Editore, Napoli, 1988*.
- [20] R. FIORENZA, D. GRECO, Lezioni di Analisi Matematica, Vol. I, *Liguori Editore, Napoli, 1985*.
- [21] P. R. HALMOS, Teoria elementare degli insiemi, *Feltrinelli, Milano, 1970*.
- [22] G. GEYMONAT, Lezioni di Analisi Matematica I, *Editrice Levrotto & Bella, Torino, 1981*.
- [23] A. GHIZZETTI, Complementi ed esercizi di Analisi Matematica, Vol. I, *Libreria Veschi, Roma, 1956*.
- [24] A. GIANNONE, V. CONSERVA, Esercitazioni di Matematica, *Adriatica Editrice Salentina, Lecce, 1985*.
- [25] G. GILARDI, Analisi Uno, *Mc Graw-Hill, Milano, 1991*.
- [26] E. GIUSTI, Analisi Matematica I, *Boringhieri, Torino, 1983*.
- [27] D. GRECO, G. STAMPACCHIA, Esercitazioni di Matematica, *Liguori Editore, Napoli, 1966*.

-
- [28] H. J. KEISLER, Elementi di Analisi Matematica, Vol. I, *Piccin Editore, Padova, 1982.*
- [29] E. MARCANTE, M. MONTAGNANA, Lezioni di Analisi Matematica I, Vol. I e II, *Celid, Torino.*
- [30] P. MARCELLINI, C. SBORDONE, Esercitazioni di Matematica, Vol. I, *Liguori Editore, Napoli, 1988.*
- [31] E. MENDELSON, Introduzione alla logica matematica, *Boringhieri, Torino, 1972.*
- [32] C. MIRANDA, Lezioni di Analisi Matematica, Parte prima, *Liguori Editore, Napoli, 1966.*
- [33] C. D. PAGANI, S. SALSA, Analisi Matematica I, *Masson, Milano, 1994.*
- [34] E. R. PEGNA, Studio analitico e grafico delle funzioni, *Editrice Giorgio, Torino.*
- [35] G. PELLACANI, G. PETTINI, C. VETTORI, Istituzioni di Matematica, *Editrice Clueb, Bologna, 1977.*
- [36] M. PICONE, G. FICHERA, Corso di Analisi Matematica, Vol. I, *Libreria Veschi, Roma, 1975.*
- [37] G. PRODI, Analisi Matematica, *Boringhieri, Torino, 1970.*
- [38] A. SCHIAFFINO, Analisi Matematica I, *Unitor, Roma, 1990.*
- [39] G. SCORZA DRAGONI, Elementi di Analisi Matematica, *Cedam, Padova, 1966.*
- [40] V. I. SMIRNOV, Corso di Matematica Superiore I, Vol. I, *Editori Riuniti, Roma, 1977.*
- [41] F. SPERANZA, Relazioni e strutture, *Zanichelli, Bologna, 1970.*
- [42] M. STOKA, Esercizi e problemi di Analisi Matematica I, *Editrice Levrotto & Bella, Torino, 1989.*
- [43] M. STOKA, V. PIPITONE, Esercizi e problemi di Matematica, *Cedam, Padova, 1988.*
- [44] M. STOKA, G. SANTORO, Esercizi e complementi di Matematica (per i precorsi universitari), *Cedam, Padova, 1988.*

- [45] M. TROISI, *Analisi Matematica I*, *Liguori Editore, Napoli, 1985*.
- [46] THE OPEN UNIVERSITY, *Introduzione all'analisi e all'algebra*, *Analisi, Mondadori, Milano, 1974*.
- [47] F. G. TRICOMI, *Esercizi e complementi di Analisi Matematica*, *Cedam, Padova, 1965*.
- [48] T. VIOLA, *Introduzione alla teoria degli insiemi*, *Boringhieri, Torino, 1975*.
- [49] F. WAISMANN, *Introduzione al pensiero matematico*, *Boringhieri, Torino, 1971*.
- [50] M. ZAMANSKY, *Introduzione all'algebra e all'analisi moderna*, *Feltrinelli, Milano, 1966*.
- [51] G. ZWIRNER, *Esercizi e complementi di Analisi Matematica, parte prima*, *Cedam, Padova*.

MICHELE CAMPITI
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "E. DE GIORGI"
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE
P.O.BOX 193
73100 LECCE
E-Mail: michele.campiti@unile.it