

**Programma del corso di Fondamenti di Analisi Matematica 2
per Ingegneria Meccanica e Aerospaziale
Anno Accademico 2011/2012**

Legenda: dove compare (D) si intende che il teorema è stato dimostrato.

Limiti e continuità di funzioni di più variabili

Curve. Curve semplici, chiuse, piane. Sostegno di una curva. Vettore e versore tangente. Curve \mathcal{C}^1 , regolari, \mathcal{C}^1 a tratti e regolari a tratti. Cambiamento di parametro e orientazione di una curva. Curve in forma polare e curve cartesiane. Curve rettificabili e lunghezza di una curva. Indipendenza della lunghezza dal cambiamento di parametro (D). Parametro d'arco. Integrali di prima specie e loro applicazioni: baricentro di una curva e momento d'inerzia rispetto ad un asse.

Topologia in \mathbb{R}^n . Norma euclidea, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e disuguaglianza triangolare. Intorni sferici. Punti di accumulazione e isolati. Insiemi aperti e chiusi. Caratterizzazione dei chiusi con i punti di accumulazione. Insiemi limitati. Insiemi connessi.

Limiti. Definizione di limite per funzioni di più variabili reali. Teoremi di unicità del limite, della permanenza del segno, del confronto e dei due carabinieri. Limiti in coordinate polari.

Funzioni continue. Teorema di Weierstrass. Teorema di Bolzano (D). Teorema dei valori intermedi.

Calcolo differenziale in più variabili

Funzioni reali. Derivate parziali, gradiente e funzioni derivabili. Critica al concetto al concetto di derivabilità. Funzioni differenziabili. Continuità di una funzione differenziabile (D). Caratterizzazione del differenziale di una funzione mediante il gradiente (D). Piano tangente al grafico di una funzione. Derivata lungo una direzione. Formula del gradiente (D). Direzione di massima crescita. Regola della catena. Ortogonalità del gradiente rispetto alle curve di livello (D). Derivate seconde e teorema di Schwarz. Matrice hessiana. Formula di Taylor con il resto di Peano. Teorema della media (D).

Funzioni a valori vettoriali Differenziabilità e derivabilità di funzioni a valori vettoriali. Matrice jacobiana. Coordinate polari nel piano, sferiche e cilin-

driche nello spazio: matrici jacobiane e loro determinante. Differenziabilità della composizione di funzioni differenziabili e regola della catena.

Massimi e minimi per funzioni di più variabili

Massimi e minimi liberi. Teorema di Fermat (D). Determinazione della natura dei punti di critici tramite la matrice hessiana (D per la parte riguardante matrici hessiane definite).

Vincoli in \mathbb{R}^2 . Teorema di Dini in \mathbb{R}^2 (D). Punti regolari di un vincolo e retta tangente. Teorema sui moltiplicatori di Lagrange (D). Lagrangiana di un problema di estremo. Legame tra punti critici vincolati e punti critici della lagrangiana (D).

Vincoli in \mathbb{R}^3 . Teorema di Dini in \mathbb{R}^3 . Derivate della funzione implicita (D). Punti regolari di un vincolo e spazio tangente. Teoremi sui moltiplicatori di Lagrange. Lagrangiana di un problema di estremo. Legame tra punti critici vincolati e punti critici della lagrangiana (D).

Integrazione di funzioni di più variabili

Integrali doppi su un rettangolo. Partizioni puntate di un rettangolo. Funzioni integrabili su un rettangolo e loro integrale. Integrabilità delle funzioni continue. Formule di riduzione (D).

Integrali doppi: caso generale. Definizione di funzione integrabile e proprietà dell'integrale. Insiemi misurabili. Integrabilità delle funzioni continue su un insieme misurabile. Integrabilità su un rettangolo di funzioni continue a meno di insiemi di misura nulla. Teorema della media (D). Domini semplici e regolari e loro misurabilità. Formule di riduzione su un dominio semplice. Teorema del cambiamento di variabili. Baricentro e momento d'inerzia di un insieme misurabile.

Integrali tripli. Definizione di funzione integrabile. Insiemi misurabili. Insiemi semplici e regolari e loro misurabilità. Integrabilità delle funzioni continue e proprietà dell'integrale. Integrazione per fili e per strati. Teorema della media. Baricentro e momento d'inerzia di un insieme misurabile. Teorema del cambiamento di variabili. Teorema di Pappo (D).

Campi vettoriali

Linee di campo. Rotore e divergenza di un campo vettoriale. Integrali di seconda specie e loro comportamento rispetto ad un cambio di parametrizzazione. Campi conservativi e potenziale. Irrotazionalità di un campo conservativo (D). Conservazione dell'energia (D). Dipendenza del lavoro di campi

conservativi solo dai punti iniziale e finale (D). Caratterizzazione dei campi conservativi con gli integrali di seconda specie. Circuiti omotopi. Invarianza dell'integrale di un campo irrotazionale su circuiti omotopi. Insiemi semplicemente connessi. Equivalenza tra campi irrotazionali e campi conservativi su insiemi semplicemente connessi (D).

Superfici e integrali di superficie

Superfici. Superfici parametriche regolari. Equazione del piano tangente ad una superficie regolare. Superfici di rotazione. Superfici cartesiane e loro regolarità (D). Superfici orientabili. Bordo di una superficie e orientazione indotta. Superfici regolari a pezzi.

Integrali superficiali. Area di una superficie. Area di una superficie cartesiana. Teorema di Guldino sull'area di una superficie di rotazione. Definizione di integrale superficiale. Baricentro di una superficie. Momento d'inerzia rispetto ad un asse di una superficie. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie.

Teoremi di Gauss e di Stokes. Domini s-decomponibili o di Green. Formule di Gauss-Green nel piano (D per domini semplici rispetto ad entrambi gli assi). Formule per l'area di un dominio di Green (D). Teorema della divergenza. Teorema del rotore.

Equazioni differenziali ordinarie

Teoria generale. Ordine di un'equazione. Equazioni in forma normale. Sistemi del primo ordine in forma normale. Riduzione di un'equazione di ordine n in forma normale ad un sistema di n equazioni del primo ordine in forma normale. Problema di Cauchy. Teorema di Peano. Funzioni localmente lipschitziane. Teorema di Cauchy-Lipschitz. Teorema di esistenza e unicità globali. Sistemi autonomi e integrali primi. Integrale dell'energia.

Equazioni e sistemi lineari. Spazio vettoriale delle soluzioni di un sistema lineare del primo ordine omogeneo (D). Matrice wronskiana, teorema di Liouville-Jacobi e integrale generale di un sistema lineare del primo ordine. Equazioni lineari di ordine n e spazio delle soluzioni. Integrale generale di un sistema non omogeneo, noto l'integrale del sistema omogeneo associato (D). Metodo della variazione delle costanti (D). Base di soluzioni per un'equazione lineare di ordine n omogenea a coefficienti costanti. Equazioni lineari di ordine n non omogenee e metodo della variazione delle costanti (D).