Capitolo 1

Successioni e serie di funzioni

Ultimo aggiornamento: 19 aprile 2004

Convergenza puntuale ed uniforme

Differenza tra convergenza puntuale ed uniforme: Si supponga di avere una successione di funzioni $f_n : D \to \mathbf{R}$ tali che $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Ci chiediamo se il limite è anche uniforme: dovrei avere che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

il che è equivalente a dire che (per definizione di limite) per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N = N(\epsilon)$ tale che per ogni $n \geqslant N$ si ha

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\,.$$

Si veda la Figura 1.1 per avere un'idea dal punto di vista grafico: la curva in neretto rappresenta il grafico della funzione limite f, i puntini i grafici di $f+\epsilon$ e $f-\epsilon$, la curva tratteggiata il grafico di una possibile f_n con $n \geqslant N(\epsilon)$.

Considerazioni generali: non esiste un metodo generale (cioè un modo meccanico che valga in ogni situazione) per studiare la convergenza uniforme. La prima osservazione che va fatta è che, se $f_n : D \to \mathbf{R}$ convergono puntualmente ad f in D, il candidato ad essere il limite uniforme è f. La seconda è che lo studio ha come incognita l'insieme (o gli insiemi) sul quale (o sui quali) f_n converge uniformemente. La domanda da porsi è quindi:

$$\text{su quali insiemi } A \subset D \text{ vale} \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0 \;?$$

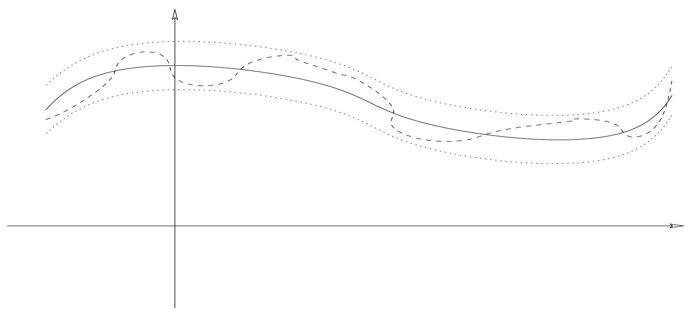

Figura 1.1:

Chiaramente se $f_n \to f$ uniformemente su tutto D convergerà uniformemente anche su tutti i sottoinsiemi A di D.
Un modo per cercare l'estremo superiore di $|f_n - f|$ (dove f è il limite puntuale di f_n) se f e f_n sono di classe C^1 è di cominciare risolvendo l'equazione

$$\frac{d}{dx}(f_n(x) - f(x)) = 0$$

e considerando i punti critici di $f_n - f$: si faccia attenzione che il minimo, se c'è, di $f_n - f$ potrebbe essere il massimo di $|f_n - f|$. Questo però è *un* modo e comunque non sempre fornisce l'estremo superiore (ad esempio il sup potrebbe non essere un massimo, il massimo potrebbe essere assunto agli estremi ecc.).
In generale è spesso utile intuire il comportamento della successione di cui bisogna studiare la convergenza. Un consiglio è quindi quello di studiare qualitativamente, se possibile, il grafico delle funzioni f_n.

Esercizio 1.1 - Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n : [-1, 1] \to \mathbf{R}, \qquad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

Esercizio 1.2 - Studiare convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $f_n(x) = \text{arctg}\,(nx)$, $n \in \mathbf{N}$, definite in $D = \mathbf{R}$.

Esercizio 1.3 - Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f_n(x) = \frac{x + n}{x^2 + n}$$

ESERCIZIO 1.4 - Studiare convergenza puntuale ed uniforme di $f_n(x) = x(1-x)^n \log n$ in $[0,1]$.

ESERCIZIO 1.5 - Studiare convergenza puntuale ed uniforme di $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.

ESERCIZIO 1.6 - Si studino la convergenza puntuale ed uniforme delle funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x+n} \qquad \text{per } x \in [0,+\infty)$$

e si dimostri che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) \operatorname{sen}(nx) dx = 0 \,.$$

ESERCIZIO 1.7 - Si studino la convergenza puntuale ed uniforme delle funzioni

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x^2)^n \qquad \text{per } x \in [0,1] \qquad (\alpha > 0)$$

e si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) dx \,.$$

ESERCIZIO 1.8 - Si studino la convergenza puntuale ed uniforme delle funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{n} + \operatorname{sen}^2 x\right)^n \qquad \text{per } x \in [0,\pi]$$

e si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n(x) dx \,.$$

ESERCIZIO 1.9 - Si studi la convergenza puntuale ed uniforme in $[-1,1]$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = n \log(1 + x/n) \,.$$

ESERCIZIO 1.10 - Si studi la convergenza puntuale ed uniforme in $\mathbf{R}$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+n}} dt \,.$$

Serie di Funzioni

Una serie di funzioni $\sum_n f_n$ è una speciale successione di funzioni $\{g_N\}_N$ dove $g_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$.
Ricordo: per le serie di funzioni si ha che

$$\text{conv. totale su } A \Longrightarrow \text{ conv. uniforme su } A \Longrightarrow \text{ conv. puntuale su } A\,.$$

Non ci sono molti criteri in generale per studiare la convergenza uniforme: in generale, e quindi in particolare se si ha una serie a termini tutti positivi (o tutti negativi), una strategia possibile è studiare prima la convergenza totale della serie, ma questo non garantisce di trovare tutti gli insiemi in cui vi è convergenza uniforme! (si vedano, ad esempio, gli esercizi 1.13 e 1.15), quando si ha una serie a segni alterni si può sfruttare il criterio di Leibniz.
Per quanto riguarda lo studio della convergenza totale: chiaramente la miglior costante che controlla su un insieme A il valore assoluto di $f_n(x)$ è $\sup_A |f_n(x)$. Quindi studiare la convergenza totale su A di $\sum_n f_n$ equivale a studiare la serie

$$\sum_n \sup_{x \in A} |f_n(x)|\,.$$

Esercizio 1.11 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}\,.$$

Esercizio 1.12 - Studiare la conver1cingenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n}{x^2+n^4+\log n}\,.$$

Esercizio 1.13 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)}\,.$$

Esercizio 1.14 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}\,.$$

Esercizio 1.15 - Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si consideri $f_n(x) := \dfrac{1}{n} f(x - \pi n)$. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \, .$$

Esercizio 1.16 - Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-nx}$.

Esercizio 1.17 - Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.18 - Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen} x + n}{n^2}$, $x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.19 - Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^x}{n}$, $x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.20 - Studiare la convergenza della seguente serie e calcolarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-3) \left(\frac{x+1}{x} \right)^n .$$

Esercizio 1.21 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1} - x^n}{n}$$

e calcolarne la somma.

Esercizio 1.22 - Si determinino gli insiemi di $\mathbf{R}^2$ nei quali vi è convergenze semplice, uniforme e totale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^2 + n^2)}{1 + n^2 y} \, .$$

Serie di potenze

Ricordo: le serie di potenze sono particolari serie di funzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \, .$$

Il raggio di convergenza di $\sum_n a_n x^n$ è dato da $\rho = \dfrac{1}{\lim_n |a_n|^{1/n}}$ se tale limite esiste (si vedano le dispense di teoria per la definizione di raggio di convergenza e l'Esercizio 1.43 per un esempio in cui il limite non esiste).

Esercizio 1.23 - Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^n$$

e calcolarne la somma.

Esercizio 1.24 - Studiare la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha + e^{\alpha n}}{n} x^n$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.25 - Sviluppare in serie di Taylor in $x = 0$ la funzione $f(x) = e^x$ e studiarne la convergenza.

Esercizio 1.26 - Calcolare lo sviluppo di Taylor nel punto $x = 1$ della funzione $\log x$ e calcolare il valore della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.

Esercizio 1.27 - Studiare la convergenza e calcolare la somma (ove converge) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \frac{x^n}{(1+x^2)^n} \, .$$

Esercizio 1.28 - Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n \, .$$

Esercizio 1.29 - Sviluppare in serie di Taylor in $x = 0$ la funzione $f(x) = \operatorname{arctg}\ x$ e studiarne la convergenza.

Esercizio 1.30 - Calcolare gli sviluppi di seno e coseno in $x = 0$.

Esercizio 1.31 - Studiare la convergenza e calcolare la somma di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right] x^n .$$

Esercizio 1.32 - Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{4 - x}{x^2 - 5x + 6} .$$

Esercizio 1.33 - Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{1 + 3x^2}{(1 - x)^3} .$$

Esercizio 1.34 - Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \log \left(\frac{x - 2}{3x - 2} \right)$$

precisandone l'insieme di convergenza.

Esercizio 1.35 - Calcolare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + n^{\alpha})}{\sqrt{n}}\ x^n$$

al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.36 - Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \log \left(\frac{2 + x}{1 + x^2} \right)$$

precisandone l'insieme di convergenza.

Esercizio 1.37 - Mostrare che $\log \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}$.

Esercizio 1.38 - Trovare una serie di potenze la cui somma, in un opportuno intervallo, sia $\log(1+x-2x^2)$.

Esercizio 1.39 - Studiare la serie di potenze $\sum_n \Big(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\Big)x^n$.

Esercizio 1.40 - Che differenza c'è fra la due serie di potenze

$$\sum_n \frac{1}{n^2}\, x^n \qquad \text{e} \qquad \sum_n \frac{1}{n^2}\, x^{n^2} \ ?$$

Esercizio 1.41 - Studiare le serie di potenze

$$\sum_n \frac{(n!)^3}{3n!}\, x^n \qquad \text{e} \qquad \sum_n \frac{(n!)^3}{3n!}\, x^{n^2}\,.$$

Esercizio 1.42 - Studiare la serie di potenze $\sum_n \frac{x^{n^n}}{n^n}$.

$*$ Esercizio 1.43 Studiare la serie di potenze $\sum_n (2+\operatorname{sen} n\pi/2)^n x^n$.

Serie di Fourier

Ricordo: se T è il semiperiodo la serie è data da

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n \cos\frac{n\pi}{T}x + a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{T}x\Big]$$

dove i coefficienti sono dati da ($n \in \mathbf{N}$)

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x dx \qquad b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{T}x dx\,.$$

Uguaglianza di Parseval:

$$\int_{-T}^{T}|f(x)|^2 dx = T\Big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 + |b_n|^2\Big)\,. \tag{1.1}$$

Integrazione della serie di Fourier - Si supponga di avere f continua a tratti e $F(x) = \int_{-T}^{x}(f(t) - a_0/2)dt$. Se denotiamo con a_n e b_n i coefficienti di f, con A_n e B_n quelli di F valgono le relazioni

$$A_n = -\frac{b_n}{n}\,, \qquad B_n = \frac{a_n}{n}\,. \tag{1.2}$$

Per quanto riguarda la convergenza della serie (vedi dispense di teoria): per ogni funzione limitata, continua a tratti e derivabile a tratti la serie converge puntualmente ovunque (alla media $\tilde{f}$ definita nelle dispense di teoria), uniformemente in ogni intervallo chiuso in cui f è continua e totalmente se converge la serie dei coefficienti

$$\sum_n (|a_n| + |b_n|)$$

visto che $\sup |a_n \cos nx| = |a_n|$ e $\sup |b_n \operatorname{sen} nx| = |b_n|$.

Esercizio 1.44 - Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$, $f(x) = -1$ in $[-\pi, 0]$, $f(x) = 1$ in $(0, \pi]$. Studiarne la convergenza puntuale ed uniforme.
Calcolare poi lo sviluppo di Fourier della funzione $g : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$, $g(x) = |x|$.

Esercizio 1.45 - Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione $f(x) = x^2$ con $x \in [-\pi, \pi]$. Studiarne la convergenza puntuale ed uniforme.
Calcolare poi il valore della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Esercizio 1.46 - Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ x & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases}$$

e studiarne la convergenza. Calcolare poi la somma delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}.$$

Esercizio 1.47 - Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, \pi] \\ -x + 2\pi & \text{se } x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

studiarne la convergenza, scrivere uno sviluppo della stessa funzione in soli seni, nfine calcolare il valore delle serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ e $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$. Sfruttando lo sviluppo della funzione f scrivere inoltre lo sviluppo in serie di Fourier della funzione

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-\pi, 0] \\ 1 & \text{se } x \in (0, \pi] \end{cases}$$

ESERCIZIO 1.48 - Determinare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione

$$f(x) = 1 - \frac{2|x|}{\pi}, \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

Studiarne poi la convergenza in $[-\pi, \pi]$. Infine calcolare la somma delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4},$$

Soluzioni

Soluzione 1.1 - Limite puntuale:

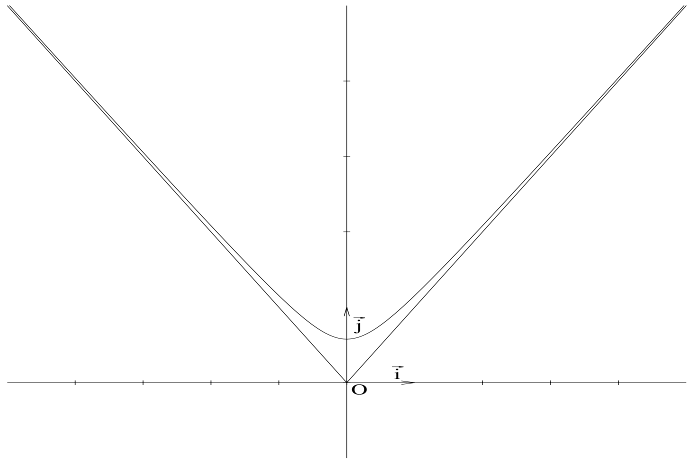

Figura 1.2:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = |x| \qquad\qquad \text{per ogni } x \in [-1,1]\,.$$

Limite uniforme:

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - |x|\right| = \sup_{x\in[-1,1]} \left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - |x|\right) \leqslant \sup_{x\in[-1,1]} \sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

Osservazione - Nell'ultimo passaggio si è usata la diseguaglianza $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (lasciata per esercizio).

Osservazione - Le funzioni f_n sono tutte funzioni C^1, ma il limite è solo continuo: la convergenza uniforme si trascina al limite la continuità, ma non la derivabilità.

Soluzione 1.2 - Il limite puntuale è dato da (si veda la Figura 1.3)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} \pi/2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\pi/2 & x < 0 \end{cases}$$

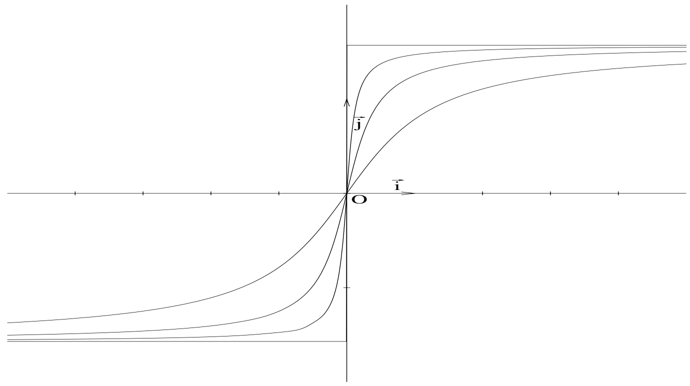

Figura 1.3:

Usiamo il Teorema 1.5 (continuità della funzione limite) delle dispense che qui ricordiamo brevemente.

Teorema 1.1 *Se una successione di funzioni continue in D converge uniformemente ad f in D allora f è continua in D.*

Questo può essere usato anche in negativo: cioè se $\{f_n\}_n$ è una successione di funzioni continue che converge puntualmente ad una funzione f non continua, la convergenza non può essere uniforme.
Concludiamo che se $D = \mathbf{R}$ f_n non converge uniformemente ad f. Ci si può chiedere se ci sono insiemi strettamente contenuti in $\mathbf{R}$ sui quali la convergenza è uniforme. Si consideri $A = [a, +\infty)$ con $a > 0$. La derivata di $|f_n - f| = f - f_n$ è sempre negativa (per cui non ci sono punti stazionari). Questo però ci dice che il massimo è assunto per $x_n = a$. Per cui

$$\sup_{x \in [a,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \pi/2 - f_n(a) = \pi/2 - \operatorname{arctg}(nx) \,.$$

Dalla convergenza puntuale concludiamo che questa quantità converge a zero. Poiché analogamente si può trattare il caso in cui $A = (-\infty, b]$ con $b < 0$ concludiamo che f_n converge uniformemente ad f su tutti gli insiemi del tipo $(-\infty, b] \cup [a, +\infty)$ con $b < 0$ e $a > 0$ e solo in quelli.

Soluzione 1.3 - Il limite puntuale è $f \equiv 1$ su tutto $\mathbf{R}$. Prima di tutto si osservi che

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0 \,, \qquad \lim_{x \to -\infty} f_n(x) = 0$$

e anche che

$$f_n(x) = 0 \quad \text{per } x_n = -n \,.$$

Per ognuna di queste ragioni

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)| \geqslant 1$$

e quindi non vi può essere convergenza uniforme su tutto $\mathbf{R}$ e nemmeno su semirette. Vediamo che succede se consideriamo un compatto $[a, b]$. Calcoliamo la derivata e poniamola uguale a zero. Si ha

$$f_n'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + 2n - n = 0$$

che ha come soluzioni $x_n = -n + \sqrt{n^2+n}$ e $y_n = -n - \sqrt{n^2+n}$. Si osservi che $x_n \to 1/2$ mentre $y_n \to -\infty$, quindi, qualunque sia $[a, b]$, y_n definitivamente non appartiene ad $[a, b]$. Se $1/2 \in (a, b)$ allora x_n definitivamente appartiene ad $[a, b]$. In $[a, b]$ quindi o non ci sono punti stazionari o c'è solamente x_n, nel quale f_n assume il suo valore massimo che vale

$$f_n(x_n) = \frac{\sqrt{n^2+n}}{2n(n+1-\sqrt{n^2+n})} = \frac{n+\sqrt{n^2+n}}{2n} \to 1\,.$$

Attenzione: il massimo di $|f_n - f|$ non è detto sia assunto in x_n. Infatti si ha

$$f_n(x) - f(x) = \frac{x(1-x)}{x^2+n}$$

che è positiva per $x \in (0, 1)$ (e negativa altrimenti). Quindi

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} \dfrac{-x(1-x)}{x^2+n} & x \in [a, 0] \\ \dfrac{x(1-x)}{x^2+n} & x \in [0, 1] \\ \dfrac{-x(1-x)}{x^2+n} & x \in [1, b] \end{cases}$$

Per cui l'estremo superiore (che in realtà è un massimo) è sicuramente assunto in $x = a$ o $x = b$ oppure $x = x_n$. Per cui

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \max\{f_n(a) - 1, f_n(b) - 1, f_n(x_n) - 1\}\,.$$

Poiché tutti e tre i valori dell'insieme a sinistra convergono a zero si conclude che $\{f_n\}_n$ converge uniformemente sui compatti.

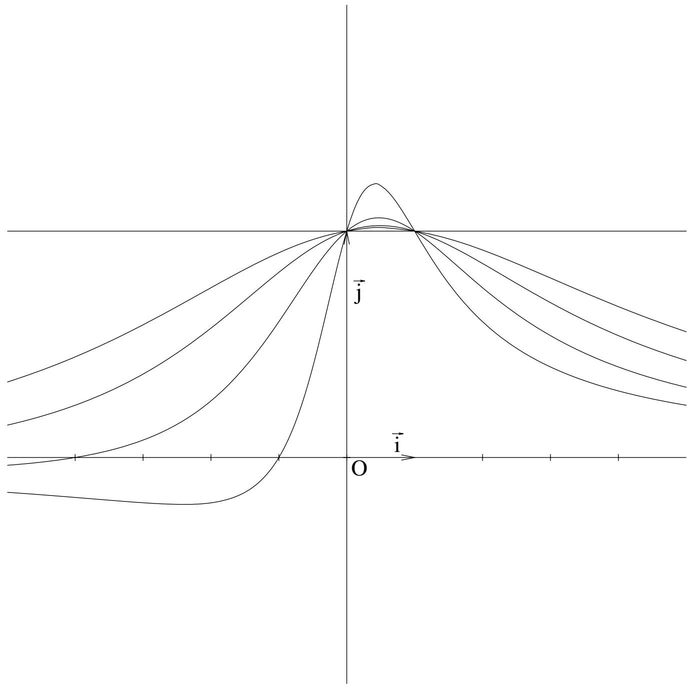

Figura 1.4:

Soluzione 1.4 - Convergenza puntuale: $f_n(x) \to 0$ per ogni $x \in [0,1]$. Per l'uniforme calcoliamo la derivata di f_n:

$$f_n'(x) = (1-x)^{n-1} \log n[(1-x) - nx]$$

e questa si annulla per $x_n = 1/(n+1)$ (la funzione è non negativa e nulla agli estremi, x_n è quindi di massimo). Il valore

$$f_n(x_n) = \frac{\log n}{n+1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n \to 0\,.$$

Soluzione 1.5 - Il limite puntuale è (in figura sono riportati i grafici di alcune f_n)

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \qquad\qquad \text{per ogni } x \in [0,1]\,.$$

Vediamo se il limite è anche uniforme:

$$f_n'(x) = \frac{n(1+n^2x^2) - 2n^3x^2}{(1+(nx)^2)^2} = \frac{n - n^3x^2}{(1+(nx)^2)^2}$$

che si annulla per $x_n = 1/n$. Ora $f_n(x_n) = 1/2$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ per cui

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Osservazione - Si osservi che il limite puntuale di funzioni continue può

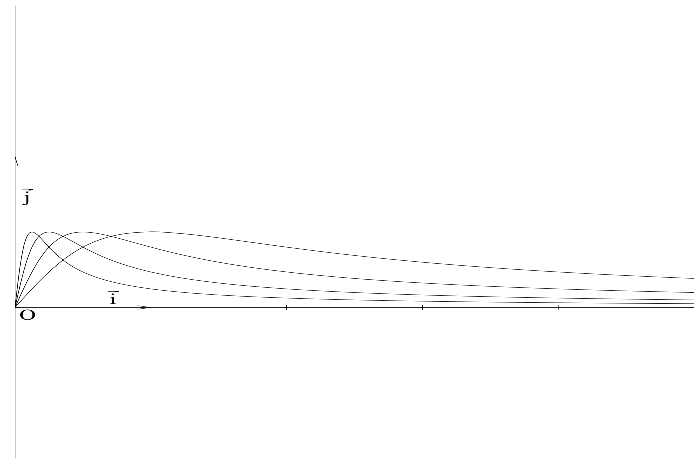

Figura 1.5:

essere continuo anche se il limite non è uniforme.

Soluzione 1.6 - Facilmente si ha che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad \text{per ogni } x \in [0, +\infty)$$

La convergenza non è però uniforme. Infatti

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x)| = +\infty .$$

È uniforme però sui limitati. Si consideri, ad esempio, un intervallo $[0, a]$ con $a > 0$:

$$f_n'(x) = \frac{x^2 + 2nx}{(x+n)^2} \geqslant 0$$

per cui le funzioni sono crescenti e quindi assumono il massimo in $x = a$:

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| = \frac{a^2}{a+n} \to 0 \qquad \text{per ogni } a \in (0, +\infty) .$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \int_0^1 f_n(x) \operatorname{sen} nx dx \right| &\leqslant \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x)| |\operatorname{sen}(nx)| dx \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x)| dx = 0
\end{aligned}$$

grazie al fatto che $f_n \to 0$ uniformemente in $[0,1]$.

Soluzione 1.7 - Il limite puntuale è $f \equiv 0$. Per studiare la convergenza uniforme calcoliamo il massimo delle f_n.

$$f_n'(x) = n^\alpha (1-x^2)^{n-1}[1 - x^2(1+2n)] = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{1+2n}}$$

Valutiamo il massimo di $|f_n - f|$:

$$M_n(\alpha) = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = n^\alpha \frac{1}{\sqrt{1+2n}} \Big(1 - \frac{1}{1+2n}\Big)\,.$$

Si ha che

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} M_n(\alpha) = 0 && \text{per } 0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2} \\
&\lim_{n\to\infty} M_n(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2e}} && \text{per } \alpha = \frac{1}{2} \\
&\lim_{n\to\infty} M_n(\alpha) = +\infty && \text{per } \alpha > \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

e quindi vi è convergenza uniforme solo per $0 \leqslant \alpha < 1/2$. Calcoliamo l'integrale. Per $0 \leqslant \alpha < 1/2$

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_n f_n(x)dx = 0$$

grazie alla convergenza uniforme. Negli altri casi calcolo la primitiva che è data da

$$\int_0^1 f_n = -n^\alpha \frac{1}{2(n+1)}(1-x^2)^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{n^\alpha}{2(n+1)}\,.$$

Si ha allora che

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 0 && \text{per } 0 \leqslant \alpha < 1 \\
&\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \frac{1}{2} && \text{per } \alpha = 1 \\
&\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = +\infty && \text{per } \alpha > 1\,.
\end{aligned}$$

Soluzione 1.8 - Facilmente si vede che $f_n(0) = f_n(\pi) \to 0$.
Se $x \in (0, \pi)$, $x \neq \pi/2$ si ha che $\operatorname{sen}^2 x < 1$ e quindi si ha che esiste $a < 1$ per il quale definitivamente vale

$$\frac{1}{n} + \operatorname{sen}^2 x \leqslant a < 1$$

per cui $f_n(x) \to 0$ se $x \neq \pi/2$. Se $x = \pi/2$ si ha che

$$f_n(\pi/2) = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n \to e$$

quindi il limite puntuale è (si veda la Figura 1.6)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} e & x = \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & x \neq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Può convergere uniformemente? NO! Perché le f_n sono continue e f non lo

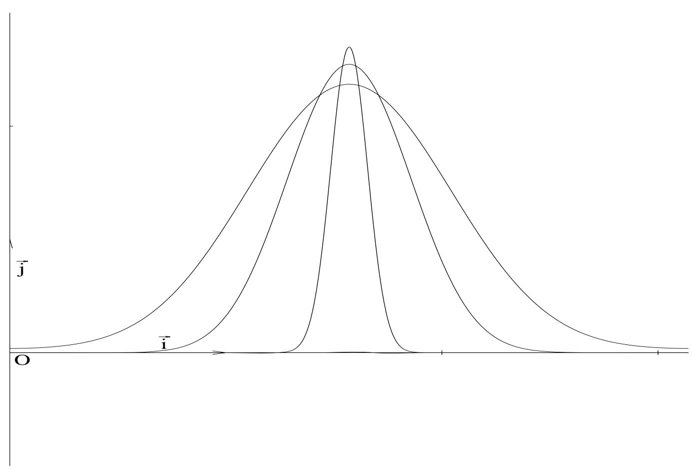

Figura 1.6:

è. Vediamo che succede se togliamo un intorno di $\pi/2$. Fisso $\delta > 0$ (e minore di $\pi/2$): in $[0, \pi/2 - \delta]$ f_n è crescente per ogni $n \in \mathbf{N}$ per cui il massimo è assunto per $x = \pi/2 - \delta$. Detto α il valore $\operatorname{sen}^2(\pi/2 - \delta) < 1$ si ha che esiste $\epsilon > 0$ tale che

$$\alpha + \epsilon < 1$$

e quindi

$$\max_{x\in[0,\pi/2-\delta]} |f_n(x)| \leqslant \left(\frac{1}{n}+\alpha\right)^n \leqslant (\alpha+\epsilon)^n \to 0\,.$$

Allo stesso modo si può procedere in $[\pi/2+\delta,\pi]$. Conclusione: f_n convergono uniformemente a $f\equiv 0$ in tutti gli insiemi del tipo $A_\delta = [0,\pi/2-\delta]\cup[\pi/2+\delta,\pi]$. Calcoliamo l'integrale:

$$|\int_0^\pi f_n(x)dx| = |\int_{A_\delta} f_n(x)dx + \int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2+\delta} f_n(x)dx| \leqslant \int_{A_\delta} |f_n|(x)dx + 2e\delta\,.$$

Passando al limite si ha che in A_δ, grazie alla convergenza uniforme, l'integrale tende a 0. Concludendo si ha che:

$$\forall\delta>0 \quad \lim_{n\to\infty} |\int_0^\pi f_n(x)dx| < 2e\delta$$

il che significa che l'integrale tende a 0.

Soluzione 1.9 - Proponiamo due svolgimenti. Il primo: scrivendo $f_n(x)$ come $\log(1+x/n)^n$ si ottiene che il limite puntuale è la funzione $f(x)=x$. Vediamo se è uniforme. Prendiamo in considerazione le funzioni $g_n(x) = (1+x/n)^n$. Sappiamo dal primo corso di analisi che

$$\begin{array}{l} (1+x/n)^n \text{ è crescente in } n \text{ per } x \text{ positivo} \\ (1+x/n)^n \text{ è decrescente in } n \text{ per } x \text{ negativo} \end{array}$$

e converge alla funzione $g(x)=e^x$. Derivando si ottiene

$$g'(x)-g_n'(x) = e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \begin{cases} >0 & \text{se } x>0 \\ =0 & \text{se } x=0 \\ <0 & \text{se } x<0\,. \end{cases}$$

Si osservi però che $g_n(0)=g(0)=1$ per cui $|g(x)-g_n(x)|>0$ tranne che per $x=0$ che risulta essere un punto di minimo. È chiaro che il massimo è assunto quindi per $x=-1$ oppure per $x=1$ e si ha

$$\sup_{x\in[-1,1]} |g_n(x)-g(x)| \leqslant \max\{|g_n(-1)-e^{-1}|, |g_n(1)-e|\} \to 0\,.$$

Per cui $\{g_n\}$ converge uniformemente a g in $[-1,1]$. Poiché la funzione $x\mapsto \log x$ è continua nell'intervallo $[e^{-1},e]$ (nel quale assumono valori le g_n) e $\log g_n(x) = f_n(x)$, $\log g(x) = f(x)$, concludiamo che anche $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in $[-1,1]$.

Che succede in $[-1,+\infty)$?

Il secondo svolgimento fa uso del seguente risultato (teorema **non visto** a lezione).

Teorema 1.2 *Sia $(f_n)_n$ una successione in $C^1([a,b])$ tale che*

1) f_n' converge uniformemente ad una funzione g in $[a,b]$;

2) esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che $f_n(x_0)$ converge.

Allora la successione $(f_n)_n$ converge uniformemente ad una funzione f. Inoltre $f \in C^1([a,b])$ e $f' = g$.

Usiamo questo teorema per risolvere l'esercizio. Calcoliamo direttamente il limite uniforme di

$$f_n(x) = n\log(1 + x/n)$$

in $[-1,1]$. Si ha che $f_n'(x) = \frac{n}{x+n}$ che converge uniformemente alla costante 1, inoltre $f_n(0)$ converge a 0. Per cui f_n converge uniformemente alla funzione f data da

$$f(x) = 0 + \int_0^x 1dt = x$$

Soluzione 1.10 - La successione converge puntualmente alla funzione nulla su tutto $\mathbf{R}$, uniformemente solo sui compatti.

Soluzione 1.11 - Poiché la serie data è il limite, per $N \to +\infty$, di $\sum_{n=1}^N \frac{x}{(1+x)^n}$ per le somme finite si ha

$$\sum_{n=1}^N \frac{x}{(1+x)^n} = x\sum_{n=1}^N \frac{1}{(1+x)^n}$$

per cui possiamo studiare $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(1+x)^n}$. Sappiamo che la serie geometrica

$$\sum_{n=1}^\infty q^n = \frac{q}{1-q} = \sum_{n=0}^\infty q^n - 1 \qquad \text{per } |q| < 1\,.$$

Per cui per $|1+x| > 1$, cioè per $x < -2$ o per $x > 0$, la serie converge. Il limite, per tali valori di x, è

$$x\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(1+x)^n} = x\frac{\frac{1}{1+x}}{1-\frac{1}{1+x}} = 1$$

Ci si può limitare a studiare la convergenza (uniforme) della serie $\sum_{n=1}^{\infty} y^n$ cambiando poi y con $\frac{1}{1+x}$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} y^n$ non converge uniformemente nell'intervallo $(-1,1)$, ma nemmeno in $(-1,0]$ e $[0,1)$. Non può esserci perché vi è convergenza puntuale solo in $(-1,1)$ e per $x=1$ la serie diverge a $+\infty$, per $x=-1$ diverge. Quindi

$$\sup_{y\in[0,1)}\Big|\sum_{n=1}^{\infty} y^n - \sum_{n=N}^{\infty} y^n\Big| = \sup_{y\in[0,1)}\Big|\sum_{n=N+1}^{\infty} y^n\Big| = +\infty$$

e anche

$$\sup_{y\in(-1,0]}\Big|\sum_{n=1}^{\infty} y^n - \sum_{n=N}^{\infty} y^n\Big| = \sup_{y\in(-1,0]}\Big|\sum_{n=N+1}^{\infty} y^n\Big| = \sup_{y\in[0,1)}\Big|\frac{y^{N+1}}{1-y}\Big| = +\infty\,.$$

Vediamo ora che negli intervalli $[a,b]\subset(-1,1)$ si ha convergenza uniforme. Infatti: si consideri per semplicità $[0,b]$ con $0<b<1$. Denotiamo con $g(y)$ il limite di g_N, cioè $g(y)=\sum_{n=1}^{\infty} y^n$. Si ha

$$\begin{aligned}\sup_{[0,b]}|g_N(y)-g(y)| &= \sup_{[0,b]}|\sum_{n=1}^{N} y^n - \sum_{n=1}^{\infty} y^n| = \sup_{[0,b]}|\sum_{n=N+1}^{\infty} y^n| \\ &\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} b^n = \tfrac{b^{N+1}}{1-b}\end{aligned}$$

Considerando il limite per $N\to\infty$ si ottiene la convergenza uniforme. Analogamente si ottiene in $[a,0]$ con $-1<a<0$ e quindi in ogni $[a,b]\subset(-1,1)$. Tornando alla variabile x: $-1<y<1$ se e solo se $-1<\frac{1}{1+x}<1$ se e solo se $x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$. Gli insiemi del $[a,0]$ con $-1<a<0$ nella variabile y diventano $(-\infty,-2-\delta]$, $\delta>0$, nella variabile x; gli insiemi del $[0,b]$ con $0<b<1$ nella variabile y diventano $[\epsilon,+\infty)$, $\epsilon>0$, nella variabile x. Concludendo si ha quindi convergenza uniforme alla funzione costante $f\equiv 1$ della serie negli insiemi $(-\infty,-2-\delta]\cup[\epsilon,+\infty)$ per ogni $\epsilon,\delta>0$.

Soluzione 1.12 - Puntuale per ogni $x\in\mathbf{R}$ perché, ad esempio,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\frac{x+n}{x^2+n^4+\log n}\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x+n|}{n^4}$$

In generale vale, per $a,b>0$, che $a^2+b^2\geqslant 2ab$, per cui $2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$, da cui

$$\Big|\frac{x+n}{x^2+n^4+\log n}\Big| \leqslant 2\frac{|x+n|}{2(x^2+n^4)} \leqslant 2\frac{|x+n|}{(|x|+n^2)^2} \leqslant \frac{2}{|x|+n^2} \leqslant \frac{2}{n^2}$$

per cui la serie converge totalmente in $\mathbf{R}$.

Soluzione 1.13 - Per ogni $x \in \mathbf{R}$ $1/\log(n+x^2)$ è decrescente in n per cui la serie è convergente per ogni x. La stima del resto

$$\Big|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)}\Big| \leqslant \frac{1}{\log(m+x^2)} \leqslant \frac{1}{\log m} \to 0$$

quindi vi è convergenza uniforme su tutto $\mathbf{R}$. Ovviamente non vi è la totale: si ha che

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \Big|\frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)}\Big| = \frac{1}{\log n}$$

(il massimo è assunto per $x = 0$, **fare la derivata per esercizio!**) e la serie $\sum_n (\log n)^{-1}$ diverge. Non c'è convergenza totale nemmeno in nessun intervallo (a, b) (o $[a, b]$) poiché

$$\sup_{x\in(a,b)} \Big|\frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)}\Big| = \max\left\{\frac{1}{\log(n+a^2)}, \frac{1}{\log(n+b^2)}\right\}.$$

Soluzione 1.14 - Per $x \geqslant 1$ si ha che

$$\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} \geqslant \frac{nx^n}{2|x|^n n^2} = \frac{1}{2n}$$

per cui la serie diverge. Per $x \in (-1, 1)$ si ha che

$$\Big|\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}\Big| \leqslant n|x|^n$$

per cui vi è convergenza assoluta. Per $x \leqslant -1$

$$\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} = (-1)^n \frac{n|x|^n}{1+|x|^n n^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{n|x|^n}{1+|x|^n n^2} \leqslant \frac{1}{n}$$

Verifichiamo che è monotona decrescente in n: mi chiedo se

$$\frac{(n+1)|x|^{n+1}}{1+|x|^{n+1}(n+1)^2} \leqslant \frac{n|x|^n}{1+|x|^n n^2}$$

cioè se

$$n|x|^n + n(n+1)^2|x|^{2n+1} \geqslant (n+1)|x|^{n+1} + (n+1)n^2|x|^{2n+1}$$

il che è equivalente a

$$(n+1)|x| \leqslant n(n+1)|x|^{n+1} + n$$

che è vero per ogni $x \leqslant -1$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$. Usando il criterio di Leibniz si conclude che la serie converge in $(-\infty, -1]$.
Quindi converge puntualmente in $(-\infty, 1)$.
Dalla stima in $(-1,1)$ si vede che vi è convergenza totale in $[0,a]$ per ogni $0 < a < 1$, ma non può esservi in $[0,1)$. Infatti

$$\sup_{[0,1)} \Big| \sum_{n=1}^{N} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} \Big| = \sup_{[0,1)} \Big| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} \Big| = +\infty$$

in quanto le funzioni $\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}$ sono continue (anche in $x = 1$!!), ma la loro somma su n diverge a $+\infty$ in $x = 1$. Per x negativo si ha:

$$\Big| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} \Big| \leqslant \frac{m|x|^m}{1+|x|^m m^2} \leqslant \frac{1}{m} \to 0\,.$$

Conclusione: vi è convergenza puntuale in $(-\infty, 1)$ e totale su tutti gli insiemi del tipo $(-\infty, a]$ con $a < 1$.

Soluzione 1.15 - Questo è un esempio molto semplice si serie di funzioni non negative che converge uniformemente, ma non totalmente.
La funzione f è a supporto compatto e le f_n non sono altro che traslazioni di f. Di conseguenza $\sum f_n(x)$ in realtà è una somma finita, per cui c'è convergenza puntuale (e assoluta, visto che le f_n sono tutte non negative) su tutto $\mathbf{R}$. C'è convergenza uniforme? Si, su tutto $\mathbf{R}$, perché

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \Big| \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=N}^{\infty} f_n(x) \Big| = \sup_{x\in\mathbf{R}} \Big| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \Big| \leqslant \frac{1}{N+1}\,.$$

C'è convergenza totale? NO! perché il massimo di f_n è ovviamente $1/n$ assunto per $x_n = \pi/2 + n$ e la serie $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$. Converge, però, totalmente sui sottoinsiemi del tipo $(-\infty, a]$.
Ex: modificare le f_n in modo tale da avere convergenza totale su $\mathbf{R}$.

Soluzione 1.16 - Per $x < 0$ $\lim_{n\to\infty} xn^{-1}e^{-nx} = -\infty$ per cui la serie diverge. Per $x \geqslant 0$ la serie invece converge (per $x = 0$ è identicamente nulla, per $x > 0$ si può usare, ad esempio, il criterio del rapporto). Vediamo che in $[0,+\infty)$ la serie converge totalmente. Derivando si ottiene che il punto $x_n = 1/n$ è stazionario. Poiché $f_n(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ e $f_n \geqslant 0$ x_n risulta punto di massimo. Quindi

$$|f_n(x)| \leqslant f_n(1/n) = \frac{1}{n^2}\frac{1}{e} \to 0\,.$$

Soluzione 1.17 - Per $x > 1$ converge e per $x \leqslant 1$ diverge a $+\infty$. Poiché la funzione $f_n(x) = n^{-x}$ è decrescente si ha che

$$\sup_{x\in(1,+\infty)} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n}$$

e la serie $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Idem per la convergenza uniforme:

$$\sup_{x\in(1,+\infty)} \Big| \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \Big| = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = +\infty\,.$$

Se invece si considera un qualunque insieme del tipo $[a,+\infty)$ con $a > 1$ si ha, sempre per il fatto che f_n è decrescente, che $\sup_{x\in[a,+\infty)} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^a}$ e $\sum \frac{1}{n^a}$ converge per ogni $a > 1$. Concludendo si ha convergenza totale, e quindi anche uniforme, in tutti gli insiemi del tipo $[a,+\infty)$ con $a > 1$.

Soluzione 1.20 - Posso fare il cambio $y = (x+1)/x$ e studiare $\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)y^n$. Il raggio di convergenza è (si vede facilmente) 1, per cui la serie converge puntualmente per $y \in (-1,1)$. La convergenza, al solito, è totale nei compatti $[a,b] \subset (-1,1)$, ma non in $(-1,1)$. Posso scrivere

$$(n-3)y^n = y^4(n-3)y^{n-4}$$

e vedere $(n-3)y^{n-4}$ come la derivata di y^{n-3}. Abbiamo

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)y^n &= -3 - 2y - y^2 + \sum_{n=4}^{\infty}(n-3)y^n \\ &= -3 - 2y - y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k y^{3+k}\end{aligned}$$

e

$$y^4 \sum_{k=1}^{\infty} k y^{k-1} = y^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dy} y^k = y^4 \frac{d}{dy} \sum_{k=1}^{\infty} y^k = y^4 \frac{d}{dy} \frac{y}{y-1} = \frac{y^4}{(1-y)^2}$$

Conclusione:
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)y^n = -3 - 2y - y^2 + \frac{y^4}{(1-y)^2}$$
dove la convergenza è puntuale per $y \in (-1,1)$ e totale sui compatti $[a,b] \subset (-1,1)$. La funzione $f(x) = (x+1)/x$ ha il grafico in Figura 1.7 per cui,

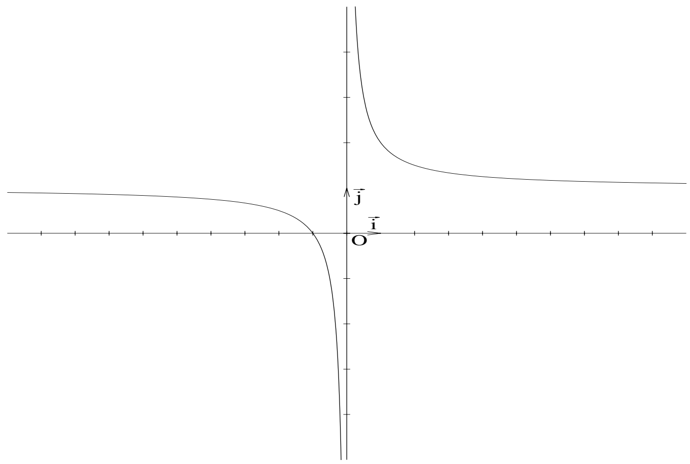

Figura 1.7:

tornando a considerare x, si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)\Big(\frac{x+1}{x}\Big)^n = -3 - 2\frac{x+1}{x} - \Big(\frac{x+1}{x}\Big)^2 + \frac{(x+1)^4}{x^2}$$

dove la convergenza è puntuale per $x \in (-\infty, -1/2)$ e totale negli insiemi del tipo $[a,b] \subset (-\infty, -1/2)$. Infatti

$$\Big|\frac{x+1}{x}\Big| < 1 \quad \text{per} \quad x \in (-\infty, -1/2)\,.$$

Soluzione 1.23 - Calcolando il seguente limite

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}$$

si ha che il raggio è 3. Conclusione: la serie converge (puntualmente) in $(-3,3)$ e non converge (puntualmente) in $(-\infty,-3) \cup (3,+\infty)$. Vediamo in

3 e -3 che succede.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}(-3)^n \quad \text{non converge,} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} 3^n \quad \text{diverge}$$

Conclusione: si ha convergenza puntuale (solo) in $(-3,3)$. Vediamo gli altri tipi di convergenza.

Teorema 1.3 *Una serie di potenze centrata in* 0 *converge totalmente in ogni intervallo chiuso del tipo* $[-a,a]$ *con* $a < \rho$.

Si ha di conseguenza convergenza totale, e quindi uniforme, in ogni intervallo $[-a,a]$ con $a < 3$. Vediamo se si ha convergenza uniforme anche in $(-3,3)$. Ragionando come al solito (si veda, ad esempio, la risoluzione dell'esercizio 1.11) si deduce che la serie non può convergere uniformemente in $(-3,3)$ e quindi nemmeno totalmente.
Si osservi che la serie ha come somma la funzione

$$f(x) = \frac{3}{3-x}.$$

Soluzione 1.24 - Si può fare il limite della radice n-esima di $\frac{n^\alpha + e^{\alpha n}}{n}$ oppure pensare la serie come (**perché?**)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha n}}{n} x^n$$

e studiare separatamente le due serie. Seguiamo quest'ultima strada. Il primo termine:

$$\sqrt[n]{n^{\alpha-1}} \to 1 \qquad \text{quindi il raggio di convergenza è } 1\,,$$

il secondo termine:

$$\sqrt[n]{\frac{e^{\alpha n}}{n}} \to e^\alpha \qquad \text{quindi il raggio di convergenza è } \frac{1}{e^\alpha}\,.$$

Se $\alpha = 0$: il raggio è lo stesso e la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} x^n$. Vediamo gli estremi: per $x = -1$ si, per $x = 1$ no. Insieme di convergenza puntuale $[-1,1)$. La convergenza è uniforme? Non può esserlo dappertutto (vedi esercizio precedente).

Teorema 1.4 (Leibniz) *Sia $(a_n)_n$ una serie a termini positivi. Se $a_n \to 0$ ed è decrescente allora $\sum(-1)^n a_n$ converge. Inoltre*

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{m}(-1)^n a_n\Big| \leqslant |a_{m+1}|\,.$$

Sicuramente abbiamo convergenza totale negli insiemi del tipo $[a,b]$ con $-1 < a < b < 1$, non abbiamo convergenza uniforme, e quindi nemmeno totale, in $[0,1)$. Vediamo in $[-1,0]$: qui la serie è a segni alterni, per vedere se la serie è uniformemente convergente uso il criterio di Leibniz. Detta f la somma della serie e f_n le somme parziali devo vedere se vale

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty \to 0$$

cioè

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sup_{[-1,0]}\Big|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2}{k}|x|^k - \sum_{n=0}^{n}(-1)^k\frac{2}{k}|x|^k\Big| \\ \leqslant \lim_{n\to+\infty}\sup_{[-1,0]}\frac{2}{n+1}|x|^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1} \to 0\end{aligned}$$

quindi vi è convergenza uniforme in $[-1,0]$, ma non totale! Concludendo: per $\alpha = 0$ si ha che la serie converge puntualmente in $[-1,1)$, uniformemente in $[-1,b] \subset [-1,1)$ e totalmente in ogni $[a,b] \subset (-1,1)$.
Gli altri casi: se $\alpha > 0$ il raggio è $1/e^\alpha$. Il primo termine sicuramente converge totalmente in $[-1/e^\alpha, 1/e^\alpha]$, quindi limitiamoci a considerare il secondo. Negli estremi: per $x = -1/e^\alpha$ la serie converge, per $x = 1/e^\alpha$ la serie diverge, infatti si ha rispettivamente

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,.$$

Convergenza uniforme e totale come sopra:

$$\text{convergenza uniforme in } \Big[-\tfrac{1}{e^\alpha}, b\Big] \quad \text{per ogni } b < \tfrac{1}{e^\alpha}$$

$$\text{convergenza totale in } [a,b] \quad \text{per ogni } a > -\tfrac{1}{e^\alpha}\,,\ b < \tfrac{1}{e^\alpha}$$

Se $\alpha < 0$ il raggio è 1. Vediamo gli estremi: il secondo termine questa volta converge totalmente in $[-1,1]$. Il primo negli estremi è

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{1-\alpha}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}}$$

che convergono entrambe. Vi è convergenza totale in $[-1,1]$.

Soluzione 1.25 - È facile vedere che

$$f^{(k)}(x) = f(x) \qquad \text{per ogni } k \in \mathbf{N}\,.$$

Per cui lo sviluppo di Taylor è dato da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

Vediamo di studiare la convergenza di questa serie: puntuale in tutto $\mathbf{R}$, ad esmpio con il criterio della radice n-esima. Non può essere uniforme in tutto $\mathbf{R}$ perché

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = +\infty\,.$$

Se anche ci limitiamo a $x \in (-\infty, 0]$ abbiamo (p_n il polinomio di grado n delle somme fino all'n-esimo termine)

$$\sup_{x\in(-\infty,0]} \Big| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \Big| = \sup_{x\in(-\infty,0]} |e^x - p_n(x)| = +\infty\,.$$

Vediamo cosa si può dire: se mi limito a considerare un intervallo $[a,b]$ ho che

$$\Big| \frac{x^k}{k!} \Big| \leqslant \frac{b^k}{k!}$$

per la crescenza di x^k. La serie data dai maggioranti converge. Concludendo: la serie di Taylor in $x = 0$ è data da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ che converge puntualmente su tutto $\mathbf{R}$ e uniformemente e totalmente solo sui compatti.

Soluzione 1.27 - La serie dell'esercizio **non è** una serie di potenze. Tuttavia lo studio di tale serie può essere ricondotto allo studio di una serie di potenze.
Innanzitutto si osservi che

$$\lim_{n} \left[\frac{n}{n+2} \frac{|x|^n}{(1+x^2)^n} \right]^{1/n} = \frac{|x|}{1+x^2}$$

che è sempre minore di 1 (per esercizio vedere che $\frac{|x|}{1+x^2} \leqslant 1/2$). Di conseguenza la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbf{R}$. Calcoliamo la somma della serie (per $|y| < 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\, y^n \,.$$

Si ha che

$$\frac{n}{n+2}\, y^n = \frac{n+2-2}{n+2}\, y^n = \Big[1 - \frac{2}{n+2}\Big]\, y^n = y^n - \frac{2}{y^2}\frac{1}{n+2}\, y^{n+2}$$

Ora mi chiedo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\, y^n \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} y^n - \frac{2}{y^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}\, y^{n+2} \,.$$

La risposta è si, perché $\lim_n(a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$ qualora i due limiti a destra (o almeno uno di essi) esistano e nel nostro caso le due serie a destra convergono entrambe (per $|y| < 1$). Prendiamo in esame il secondo termine:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}\, y^{n+2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^y t^{n+1} dt \overset{!}{=} \int_0^y \Big(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n+1}\Big) dt = \\ &= \int_0^y \Big(\sum_{n=2}^{\infty} t^n\Big) dt = \int_0^y \frac{t^2}{1-t} dt \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio con il punto esclamativo è lecito se la convergenza è uniforme!! (e lo è se y è fissato tra -1 e 1). Per integrare $\frac{t^2}{1-t}$ dividiamo t^2 per $1-t$ e scriviamo

$$t^2 = (1-t)(-1-t) + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{t^2}{1-t} = -(1+t) + \frac{1}{1-t}$$

e quindi integrando

$$\int_0^y \frac{t^2}{1-t} dt = -y - \frac{y^2}{2} - \log(1-y) \,.$$

Tirando le fila si ha

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\, y^n &= \frac{y}{1-y} - \frac{2}{y^2}\Big[-y - \frac{y^2}{2} - \log(1-y)\Big] \\ &= \frac{y}{1-y} + \frac{2}{y} + 1 + \frac{2}{y^2}\log(1-y) \end{aligned}$$

Si osservi che questa funzione è regolare anche se sembra avere singolarità in $y = 0$. Infatti $\log(1-y) = -y + y^2/2 + o(y^2)$ e quindi

$$\begin{aligned}\frac{y}{1-y} + \frac{2}{y} + 1 + \frac{2}{y^2}\log(1-y) &= \frac{1}{y^2}\Big[\frac{y^3}{1-y} + 2y + y^2 + 2\log(1-y)\Big] = \\ &= \frac{1}{y^2}\Big[\frac{y^3}{1-y} + 2y + y^2 - 2y + y^2 + o(y^2)\Big]\end{aligned}$$

Tornando al nostro problema: poiché la quantità $\frac{x^n}{(1+x^2)^n}$ è sempre minore di 1 la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\,\frac{x}{1+x^2}$$

converge puntualmente per ogni $x \in \mathbf{R}$; converge pure uniformemente e totalmente su $\mathbf{R}$ poiché $\frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}$. Si conclude sostituendo nell'espressione di sopra $\frac{x}{1+x^2}$ al posto di y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\,\frac{x^n}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{1+x^2-x} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{x^2}{2(1+x^2)^2} - \log\frac{1+x^2-x}{1+x^2}\,.$$

Soluzione 1.28 - Usiamo una conseguenza del seguente risultato.

Teorema 1.5 *Sia a_n serie a termini positivi. Se esiste*

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

allora esiste anche $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e vale

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{a_n}\,.$$

Il viceversa non è vero! Si consideri ad esempio la successione data da $a_n = 1/n$ se n è pari e $a_n = 1/2n$ se n è dispari. Si ha $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 1$, mentre invece $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ non esiste (il rapporto è $1/2$ se n è pari, 2 se n è dispari).

Conseguenza: se esiste il limite del rapporto esiste anche quello della radice n-esima e sono uguali. Allora calcoliamo il limite della radice n-esima calcolando il rapporto.

$$\lim_n \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!} = \lim_n \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n = \frac{1}{e}$$

quindi vi è convergenza puntuale in $(-e, e)$ e non vi è in $(-\infty, -e) \cup (e, +\infty)$. Vediamo gli estremi:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{quindi per } x = n \quad e^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} \geqslant \frac{n^n}{n!}$$

per cui

$$\frac{n!}{n^n} e^n \geqslant 1 \,. \tag{1.3}$$

La serie quindi non converge per $x = -e$ e diverge a $+\infty$ per $x = e$. Ovviamente converge totalmente e uniformemente in tutti gli intervalli $[a, b] \subset (-e, e)$. Come al solito si ha che la serie non può convergere uniformemente in $(-e, e)$.
Anziché la stima (1.3) si può usare, per studiare il comportamento della serie in $x = e$ la formula di Stirling

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\, \left(1 + O(1/n)\right) .$$

Soluzione 1.29 - Sappiamo che la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \text{per } |q| < 1 \,.$$

Possiamo allora concludere che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \qquad \text{converge a} \qquad \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{per } |x| < 1 \,.$$

Studiamo questa serie. Converge puntualmente in $(-1, 1)$. Per $x = 1$ e per $x = -1$ ovviamente non converge. Al solito, la serie non convergerà uniformemente in $(-1, 1)$, ma è facile vedere che converge totalmente in tutti i compatti $[a, b]$ contenuti in $(-1, 1)$. Calcoliamo la derivata di $f(x) = \operatorname{arctg}\, x$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \,.$$

Integrando termine a termine si ha, posto $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}$, grazie alla convergenza uniforme

$$\lim_n \int_0^x f_n(t)dt = \int_0^x \lim_n f_n(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{arctg}\, x \,.$$

Ora
$$\int_0^x (-1)^k t^{2k} dt = (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$$
per cui
$$\text{arctg } x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
per ogni $x \in (-1,1)$ e la convergenza uniforme solo sui compatti contenuti in $(-1,1)$.

Soluzione 1.30 - Calcoliamo la derivata di $f(x) = \text{sen}\, x$.

$$\begin{array}{ll} f^{(1)}(x) = \cos x & f^{(1)}(0) = 1 \\ f^{(2)}(x) = -\text{sen}\, x & f^{(2)}(0) = 0 \\ f^{(3)}(x) = -\cos x & f^{(3)}(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \text{sen}\, x & f^{(4)}(0) = 0 \end{array}$$

e poi il ciclo si ripete. Quindi lo sviluppo in 0 è dato da
$$\text{sen}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$
Vediamo la convergenza. Per il criterio di Leibniz converge per ogni x reale. La convergenza è uniforme e totale solo sui compatti (in modo analogo all'esercizio precedente). In modo simile si calcola anche lo sviluppo del coseno
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,.$$

Soluzione 1.31 - Si ha che
$$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$$
per cui il limite della radice n-esima è 0: la serie converge per ogni $x \in \mathbf{R}$. Prima di studiare le convergenze uniforme e totale calcoliamo la somma della serie. Sappiamo che
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x\,.$$

Si ha che
$$\frac{n}{(n+1)!}x^n = x\frac{d}{dx}\Big[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{x}\Big]$$
per cui, grazie alla convergenza uniforme posso invertire il segno di derivata con il limite e ottenere
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^n &= \sum_{n=1}^{\infty}x\frac{d}{dx}\Big[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{x}\Big] \\
&= x\frac{d}{dx}\Big[\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\Big] \\
&= x\frac{d}{dx}\Big[\frac{1}{x}(e^x-1-x)\Big] \\
&= x\Big[-\frac{1}{x^2}(e^x-1-x)+\frac{1}{x}(e^x-1)\Big] \\
&= e^x-\frac{1}{x}(e^x-1)\,.
\end{aligned}$$
Vediamo la convergenza uniforme in $\mathbf{R}$:
$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}x^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}x^k\Big| = \sup_{x\in\mathbf{R}}\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}x^k\Big| = +\infty$$
quindi non vi è convergenza uniforme in $\mathbf{R}$. Nemmeno se ci limitiamo a semirette $[a,+\infty)$, perché l'estremo superiore è $+\infty$ proprio perché consideriamo la semiretta fino a $+\infty$. Che succede se consideriamo $(-\infty,0]$?
$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in(-\infty,0]}\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}x^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}x^k\Big| = \\
&\qquad = \sup_{x\in(-\infty,0]}\Big|e^x-\frac{1}{x}(e^x-1)-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}x^k\Big| = +\infty
\end{aligned}$$
perché $f(x)=e^x-\frac{1}{x}(e^x-1)$ è limitata in $(-\infty,0]$, mentre un polinomio di grado n no!

(come, ad esempio, fatto per e^x). Per $x\in[-a,a]$ con a positivo
$$\Big|\frac{k}{(k+1)!}x^k\Big| \leqslant \frac{k}{(k+1)!}a^k\,.$$
La serie $\sum_n \frac{na^n}{(n+1)!}$ converge per ogni a reale per cui si ha convergenza totale e uniforme in ogni compatto.

Soluzione 1.32 - Spezzando il polinomio $x^2 - 5x + 6$ come prodotto di $x - 3$ e $x - 2$ si ottiene che

$$f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x-2}\,.$$

Sapendo che, per $|q| < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ converge al valore $\dfrac{1}{1-q}$ si può scrivere

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3-x} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n$$

che converge per $|\frac{x}{3}| < 1$, cioè per $|x| < 3$. L'altro termine:

$$-\frac{2}{x-2} = \frac{2}{2-x} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

che converge per $|\frac{x}{2}| < 1$, cioè per $|x| < 2$. Sarà possibile effettuare la somma solo dove convergono entrambe, quindi sicuramente per $x \in (-2, 2)$ si ha che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right]x^n\,.$$

Soluzione 1.33 - Si osservi che

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{e che} \qquad \frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)^2} = 2\,\frac{1}{(1-x)^3}\,.$$

Poiché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge uniformemente in ogni intervallo chiuso $[a, b] \subset (-1, 1)$ e così pure la serie delle sue derivate (prime e seconde, ma non solo) si può affermare che (per quei valori di $x \in [a, b] \subset (-1, 1)$ con a, b arbitrari, ma $|a|, |b| < 1$, per cui per ogni $x \in (-1, 1)$)

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx} n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}\,.$$

Per cui dove vi è convergenza per entrambe le serie, e in questo caso entrambe convergono in $(-1, 1)$, vale

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{3x^2}{(1-x)^3} = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + \frac{3x^2}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n(n-1)}{2}x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1) + 3n(n-1)}{2}x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (2n^2+1)x^n \,.
\end{aligned}$$

Soluzione 1.34 - La funzione f può essere scritta nei seguenti modi

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{x-2}{3x-2}\right) &= \log(x-2) - \log(3x-2) \qquad \text{NO!!} \\
&= \log(2-x) - \log(2-3x) \qquad \text{SI!!}
\end{aligned}$$

Perché scartiamo il primo dei due? I due modi non sono equivalenti: la funzione f è definita quando il suo argomento è positivo, e cioè quando $x-2$ e $3x-2$ hanno lo stesso segno. Quindi f può essere spezzata come sopra nel primo modo se $x-2$ e $3x-2$ sono entrambi positivi, nel secondo modo se $x-2$ e $3x-2$ sono entrambi negativi. Per $x = 0$, intorno al quale vogliamo sviluppare f, le funzioni $\log(x-2)$, $\log(3x-2)$ non sono definite, mentre $\log(2-x)$ e $\log(2-3x)$ si.
Per esercizio, e anche per convincersi di quanto appena detto, disegnare i grafici di $\log(\frac{x-2}{3x-2})$, $\log(x-2)$, $\log(3x-2)$, $\log(2-x)$ e $\log(2-3x)$.
Abbiamo trasferito quindi il problema nello scrivere lo sviluppo delle due funzioni $\log(2-x)$ e $\log(2-3x)$. Si ha, per $|x/2| < 1$,

$$\frac{d}{dx}\log(2-x) = -\frac{1}{2-x} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

Integrando tra 0 e x, con $|x| < 2$, poiché la serie sopra converge uniformemente

$$\log(2-t)\Big|_0^x = -\frac{1}{2}\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n dt = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \left(\frac{t}{2}\right)^n dt$$

e quindi

$$\log(2-x) - \log 2 = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{n+1}\,.$$

Analogamente si ottiene, per $|3x/2| < 1$ e quindi per $|x| < 2/3$,

$$\log(2-3x) - \log 2 = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}\,.$$

Concludendo:

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{x-2}{3x-2}\right) &= \log 2 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{n+1} - \log 2 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\frac{x^{n+1}}{n}\end{aligned}$$

e l'insieme di convergenza è l'intersezione degli insiemi sui quali convergono separatamente le due serie. Concludiamo che

$$\log\left[\frac{x-2}{3x-2}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{1}{2^n}\right]\frac{x^n}{n}$$

e la convergenza è puntuale in $[-2/3, 2/3)$, uniforme in tutti gli insiemi del tipo $[-2/3, a]$ con $a \in (-2/3, 2/3)$ e totale in tutti gli insiemi del tipo $[b, c]$ con $b, c \in (-2/3, 2/3)$, $b < c$.
Infatti una delle due serie converge puntualmente almeno in $(-2, 2)$ e l'altra almeno in $(-2/3, 2/3) \subset (-2, 2)$, quindi la serie converge in $(-2/3, 2/3)$ e non converge in $(-\infty, -2/3) \cup (2/3, +\infty)$ (per verifica calcolare il limite della radice n-esima dei coefficienti). Negli estremi: è sufficiente studiare la seconda serie, poiché convergendo la prima in $(-2, 2)$ in particolare convergerà in $-2/3$ e $2/3$. Per $x = 2/3$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}\frac{1}{n}$$

che diverge a $+\infty$, mentre per $x = -2/3$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{3}{2}\Big)^n \Big(-\frac{2}{3}\Big)^{n+1} \frac{1}{n} = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

che converge.
La convergenza è uniforme in tutti gli intervalli del tipo $[-2/3, a]$ con $a < 2/3$ e totale negli intervalli del tipo $[b, c] \subset (-2/3, 2/3)$.

Soluzione 1.35 - L'insieme è $[-1, 1]$ per $\alpha < -1/2$, $[-1, 1)$ per $\alpha \geqslant -1/2$.

Soluzione 1.38 - Si può fare seguendo la soluzione dell'Esercizio 1.34 osservando che $1 + x - 2x^2 = (2x + 1)(1 - x)$.

Soluzione 1.42 - Si osservi che i termini di questa serie sono "alcuni" dei termini della serie $\sum_k \frac{1}{k} x^k$. Infatti i coefficienti a_n sono dati da

$$a_n = \begin{cases} n & \text{se } n = k^k \text{ con } k \in \mathbf{N}\,, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per cui

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{n} & \text{se } n = k^k \text{ con } k \in \mathbf{N}\,, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di conseguenza $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k^k]{k^k} = \lim_{h \to \infty} \sqrt[h]{h} = 1$. Il raggio quindi è 1. Per $x = 1$ e $x = -1$ la serie converge e quindi l'insieme di convergenza è $[-1, 1]$. La convergenza è anche totale.

Soluzione 1.43 - Questo è un esmpio in cui il limite di $a_n = (2 + \operatorname{sen} n\pi/2)^n$ non esiste. Si ha che

$$2 + \operatorname{sen} n\pi/2 \quad \text{può assumere i valori } 1, 2, 3\,.$$

L'estremo superiore (si veda la definizione di raggio di convergenza nelle dispense) dei numeri per cui la serie converge è $1/3$ (l'inverso del massimo valore che può assumere a_n): infatti non può essere maggiore perché se lo fosse, diciamo $r > 1/3$, per tutti i valori $x \in (1/3, r)$ la serie convergerebbe. Ma per infiniti valori di $n \in \mathbf{N}$ si ha che

$$2 + \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \quad \text{assume il valore } 3$$

per cui se fissiamo $x > 1/3$ e minore di r si avrebbe per infinite volte che

$$(2 + \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2})^n x^n > 1$$

il che non farebbe convergere la serie.

Soluzione 1.44 - Poiché la funzione è dispari lo sviluppo è di soli seni. Si ha

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{4}{\pi n} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

quindi lo sviluppo è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \operatorname{sen}(2n+1)x\,.$$

La media di f è nulla, per cui a_0 è nullo. Usando la formula (1.2) si ha che lo sviluppo di

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt = |x| - \pi$$

è dato da (i coefficienti A_n di $\cos nx$ sono nulli, i coefficienti B_n di $\operatorname{sen} nx$ sono dati da $4/\pi n^2$ per n dispari, 0 altrimenti)

$$|x| - \pi = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos(2n+1)x$$

dove $A_0 = \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}[|x| - \pi]dx = -\pi^2/\pi = -\pi$. Per cui lo sviluppo di $|x|$ in $[-\pi, \pi]$ è (confrontare con l'Esercizio 1.47)

$$\pi - \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos(2n+1)x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos(2n+1)x\,.$$

Soluzione 1.45 - La funzione è pari, per cui il suo sviluppo è fatto di soli coseni. Si ha che $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = 2\pi^3/3$ e

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \; dx &= x^2 \frac{\operatorname{sen} nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \frac{\operatorname{sen} nx}{n} dx \\ &= 2x \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} 2\frac{\cos nx}{n^2} dx = (-1)^n \frac{4\pi}{n^2} \end{aligned}$$

per cui lo sviluppo è dato da

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx \,.$$

Poiché l'estensione a tutto $\mathbf{R}$ è C^1 a tratti e continua si ha convergenza uniforme su tutto $\mathbf{R}$. In particolare per $x = \pi$ si ha

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} (-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

da cui si ricava

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \,.$$

Soluzione 1.46 - Il periodo $2T$ è 2, quindi $T = 1$. Calcoliamo i coefficienti:

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \,.$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_{-1}^{1} f(x) \cos nx\pi \ dx = \int_0^1 x \cos nx\pi \ dx \\
&= x\Big(\frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} n\pi x\Big)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} n\pi x \ dx \\
&= -\frac{1}{n\pi}\Big(- \frac{1}{n\pi} \cos n\pi x\Big)\Big|_0^1 \\
&= \begin{cases} -\dfrac{2}{n^2\pi^2} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_{-1}^{1} f(x) \cos nx\pi \ dx = \int_0^1 x \operatorname{sen} nx\pi \ dx \\
&= x\Big(- \frac{1}{n\pi} \cos n\pi x\Big)\Big|_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \ dx \\
&= (-1)^{n+1} \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}\Big(\frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} n\pi x\Big)\Big|_0^1 = (-1)^{n+1} \frac{1}{n\pi}
\end{aligned}$$

quindi lo svilupo è

$$\frac{1}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)\pi x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\pi}\,\mathrm{sen}\,n\pi x\,.$$

Converge puntualmente alla funzione

$$\begin{cases} f(x) & x\in(-1,1)\\ \frac{1}{2} & x=-1\,,x=1\,.\end{cases}$$

La convergenza uniforme c'è solo negli insiemi del tipo $[a,b]\subset(-1,1)$ visto che il limite non è continuo.
Valutiamo ora la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$. Per $x=1$ la serie converge al valore $1/2$ per cui

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \frac{1}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)\pi+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\pi}\,\mathrm{sen}\,n\pi\\ &= \frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)^2\pi^2}\end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\,.$$

Ora per la somma $\sum_n\frac{1}{(2n)^2}$ possiamo procedere in due modi: sfruttare l'esercizio precedente dal quale sappiamo che $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ per cui otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{24}\,,$$

oppure, ignorando il risultato dell'esercizio precedente, osservare che $\sum_n\frac{1}{(2n)^2}=\sum_n\frac{1}{4n^2}$ per cui da

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

dedurre che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

e quindi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\,\frac{4}{3}\,\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{24}\,.$$

Soluzione 1.47 - La estendo per periodicità a tutto $\mathbf{R}$ e per questione di semplicità di calcolo sviluppo la funzione $g(x) = |x|$ definita in $[-\pi, \pi]$ ed estesa per periodicità a tutto $\mathbf{R}$ (si veda la Figura 1.8). In questo modo anziché calcolare
$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \int_0^{\pi} x \cos nx dx - \int_{\pi}^{2\pi} x \cos nx dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2\pi \cos nx dx$$
calcolo

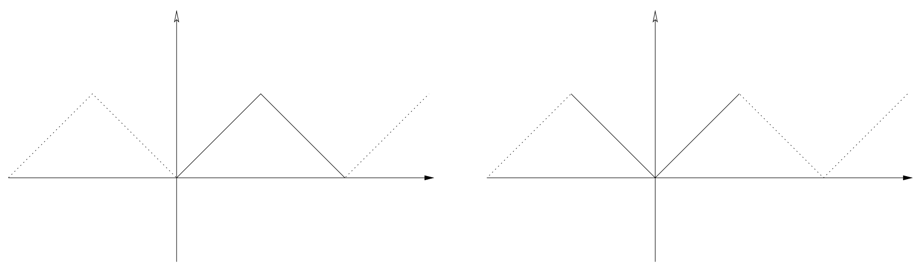

Figura 1.8:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = 2 \int_0^{\pi} x \cos nx dx\,.$$
Quindi i coefficienti sono dati da:
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \pi$$
e per $n > 0$
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x}{n} \operatorname{sen} nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[0 + \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$
per cui
$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ dispari}\,. \end{cases} \tag{1.4}$$

Lo sviluppo risulta quindi essere

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos(2k+1)x\,. \qquad (1.5)$$

La convergenza è puntuale e uniforme su tutto $\mathbf{R}$ (perché la funzione è continua e C^1 a tratti), in particolare sull'intervallo $[0, 2\pi]$ al quale eravamo interessati. In particolare se valutiamo la serie per $x = 0$ questa convergerà al valore $f(0) = 0$, per cui si ha

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} = 0 \qquad \text{da cui} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Per l'altra serie sfruttiamo l'uguaglianza di Parceval (1.1):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)\,.$$

Per cui da $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = 2\pi^3/3$ otteniamo

$$\frac{2\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k+1)^4}$$

e infine

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{16}\Big(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2}\Big) = \frac{\pi^4}{96}\,.$$

Per considerare uno sviluppo in soli seni o di soli coseni in generale si fa così: data $h : [0, T] \to \mathbf{R}$ consideriamo la funzione $\tilde{h}$ definita in $[-T, T)$

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & x \in [0, T] \\ h(-x) & x \in [-T, 0] \end{cases}$$

ed estendendo poi per periodicità a tutto $\mathbf{R}$ la funzione. Poiché la funzione risulta così pari il suo sviluppo sarà di soli coseni e

$$\int_{-T}^{T} \tilde{h}(x) \cos \frac{n\pi}{T} x dx = 2 \int_0^T h(x) \cos \frac{n\pi}{T} x\,.$$

Se vogliamo uno sviluppo di soli seni si considera

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & x \in [0, T] \\ -h(-x) & x \in [-T, 0]\,. \end{cases}$$

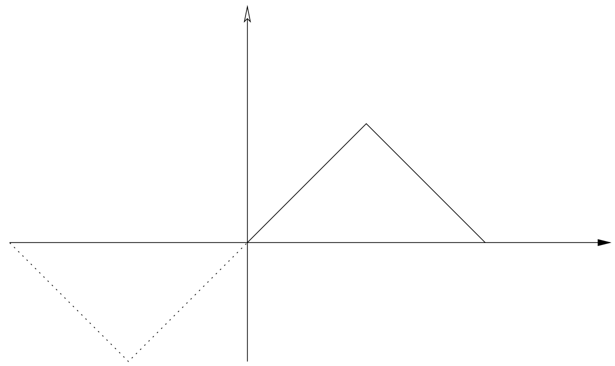

Figura 1.9:

Nel nostro caso estendiamo la funzione nel modo seguente:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -x-2\pi & \text{se } x \in [-2\pi, -\pi] \\ x & \text{se } x \in [-\pi, \pi] \\ -x+2\pi & \text{se } x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

e poi estendo $\tilde{f}$ periodicamente su tutto $\mathbf{R}$ (a questo punto avremo una funzione periodica di periodo 4π!). La restrizione di $\tilde{f}$ a $[0, 2\pi]$ è sempre la nostra f. La funzione così estesa risulta essere dispari fornendo i coefficienti dei coseni nulli. Valutiamo i coefficienti:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} g(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2\pi}x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n}{2}x dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n}{2}x dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n}{2}x dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{sen}\,\frac{n}{2}x dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} [-x+2\pi]\,\mathrm{sen}\,\frac{n}{2}x dx\,. \end{aligned}$$

Abbiamo che

$$\int x\,\mathrm{sen}\,\frac{n}{2}x dx = -\frac{2}{n}x\cos\frac{n}{2}x + \frac{4}{n^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{n}{2}x$$

per cui

$$\begin{array}{ll} \text{tra } 0 \text{ e } \pi & -\frac{2}{n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2} \\ \text{tra } \pi \text{ e } 2\pi & \frac{1}{\pi}\Big[-\Big(-\frac{4\pi}{n}\cos n\pi + \frac{2\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2}\,\mathrm{sen}\, n\pi - \frac{4}{n^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}\Big) + \\ & \quad +2\pi\Big(-\frac{2}{n}\cos n\pi + \frac{2}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\Big)\Big]\,. \end{array}$$

Sommando, poiché

$$\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari}, \end{cases}$$

si ha

$$b_n = \frac{8}{n^2\pi}\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2} = \frac{8}{n^2\pi}\begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari}, \end{cases}$$

La serie è data dalla somma dei seguenti termini

$$\sum_{n \text{ dispari}} \frac{8}{n^2\pi}\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^2\pi}\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}x$$

Attenzione! Lo sviluppo trovato è lo sviluppo in soli seni della funzione $\tilde{f}$, quello in (1.5) è lo sviluppo della funzione f: convergono entrmabi (uniformemente) alla funzione originale nell'intervallo $[0, 2\pi]$, ma a funzioni diverse nell'intervallo $[-2\pi, 0]$ (si vedano le Figura 1.8 e Figura 1.9).
Ora valutiamo lo sviluppo della funzione g: si osservi che nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione $f(x) = |x|$ è una primitiva della funzione g, e precisamente

$$f(x) = \pi + \int_{-\pi}^{x} g(t)dt, \qquad \text{cioè} \qquad f(x) - \pi = \int_{-\pi}^{x} g(t)dt.$$

Se denotiamo con α_n e β_n i coefficienti

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx dx \qquad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\operatorname{sen} nx dx$$

si ha che $\alpha_0 = 0$ e dalle formule (1.2) si ricava

$$\beta_n = -na_n, \qquad \alpha_n = nb_n$$

quindi, conoscendo a_n (si veda (1.4)) e b_n ($b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$) si ricava immediatamente

$$\beta_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ \dfrac{4}{\pi n} & \text{se } n \text{ dispari}. \end{cases}$$

per cui

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)}\operatorname{sen}(2k+1)x$$

(si confronti con l'ESERCIZIO 1.44).

Soluzione 1.48 - La funzione

$$f(x) = 1 - \frac{2|x|}{\pi}, \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

come si vede dal garfico, è una funzione pari per cui $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Si verifica facilmente che anche $a_0 = 0$. Gli altri coefficienti sono dati $(n > 0)$

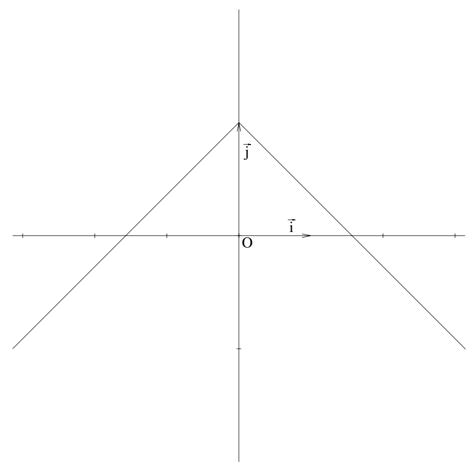

Figura 1.10:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\cos nt - \frac{2}{\pi}|t|\cos nt\Big]dt \\
&= -\frac{2}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\cos nt\ dt = -\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi} t\cos nt\ dt = \\
&= -\frac{4}{\pi^2}\Big[\frac{t}{n}\operatorname{sen} nt\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\operatorname{sen} nt\ dt\Big] \\
&= -\frac{4}{\pi^2}\Big[-\frac{1}{n}\Big(-\frac{1}{n}\cos nt\Big)\Big]\Big|_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \dfrac{8}{n^2\pi^2} & n \text{ dispari} \end{cases}
\end{aligned}$$

per cui la serie è data da

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)x$$

che converge uniformemente su tutto $\mathbf{R}$ (visto che il prolungamento periodico a tutto $\mathbf{R}$ di f è continuo e C^1 a tratti). La serie converge anche totalmente visto che

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} \left| \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2} \cos(2n+1)x \right| = \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2} \, .$$

Per calcolare le due serie (già calcolate negli esercizi 1.46 e 1.47) si può valutare la funzione in $x = 0$ e usare l'uguaglianza (1.1).