

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Appunti del corso di  
Analisi Matematica II

Angela Albanese, Antonio Leaci, Diego Pallara

a.a. 2005/06



# PREFAZIONE

Nel presente fascicolo abbiamo raccolto le nozioni di Analisi matematica presentate nel corso di Analisi Matematica II del primo anno di Ingegneria.

Il pochissimo tempo destinato dai nuovi ordinamenti all'insegnamento della materia non permette alcun approfondimento, ed anzi obbliga ad escludere dai programmi argomenti tradizionalmente ritenuti indispensabili.

Riteniamo però imprescindibile, pur con tale riduzione dei contenuti, conservare intatti l'impianto concettuale e l'impostazione metodologica dell'Analisi, e riteniamo che questo obiettivo sia conseguibile solo dando enunciati sintetici e precisi, e rifuggendo da espressioni vaghe o poco chiare. Per semplificare un enunciato si può rinunciare alla massima generalità possibile, ma non al rigore della presentazione. Per questa ragione abbiamo ritenuto opportuno, e, speriamo, utile agli studenti, raccogliere in poche pagine le definizioni ed i risultati principali che vengono esposti durante le lezioni. Lo stile degli appunti è volutamente scarno ed avaro di commenti e divagazioni, che restano affidati all'esposizione orale in aula; suggeriamo agli studenti, pertanto, di limitarsi ad appuntare, durante le lezioni, solo le parti meno formali delle lezioni stesse, affidandosi a questa dispensa per gli enunciati che richiedono maggior rigore.

È per altro evidente che questi appunti non hanno la pretesa di sostituire il libro di testo, che resta indispensabile per acquisire una conoscenza dignitosa della materia. La loro funzione è piuttosto, come già detto, quella di sostituire gli appunti di lezione, troppo poco affidabili per tanti motivi, e di indicare il bagaglio *minimo* di conoscenze richieste per affrontare l'esame.

Osserviamo inoltre che alcuni riferimenti mancanti sono relativi ad argomenti di Analisi Matematica I e appariranno nei relativi appunti, che sono ancora in corso di redazione.

Infine, ringraziamo il collega Raffaele Vitolo per averci fornito il file di stile LATEX usato per la compilazione delle dispense, e dichiariamo in anticipo la nostra gratitudine a tutti i lettori che ci segnaleranno ogni osservazione utile a migliorare il testo.



# INDICE

<b>1</b>	<b>Successioni e serie di funzioni</b>	<b>5</b>
1.1	Successioni di funzioni . . . . .	5
1.2	Serie di funzioni . . . . .	9
1.3	Serie di potenze e serie di Taylor . . . . .	12
1.4	Serie di Fourier . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Limiti e continuità in più variabili</b>	<b>22</b>
2.1	Topologia di $\mathbf{R}^n$ . . . . .	22
2.2	Successioni . . . . .	27
2.3	Limiti e continuità delle funzioni . . . . .	28
2.4	Funzioni vettoriali di una variabile . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Calcolo differenziale in più variabili</b>	<b>34</b>
3.1	Derivate parziali e differenziabilità . . . . .	34
3.2	Forme quadratiche ed estremi relativi . . . . .	41
3.3	Funzioni vettoriali . . . . .	44
3.4	Estremi vincolati . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Curve ed integrali di linea</b>	<b>51</b>
4.1	Curve regolari . . . . .	51
4.2	Integrali di linea . . . . .	57
4.3	Campi vettoriali conservativi . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Equazioni differenziali</b>	<b>65</b>
5.1	Teoremi di esistenza . . . . .	67
5.2	Equazioni lineari . . . . .	72
5.2.a	Risultati generali . . . . .	72
5.2.b	Equazioni di ordine 1 . . . . .	75
5.2.c	Metodo di Lagrange o della variazione dei parametri . . . . .	76
5.2.d	Equazioni a coefficienti costanti . . . . .	78
5.2.e	Soluzione dell'equazione completa in casi particolari . . . . .	80
5.3	Altre equazioni integrabili elementarmente . . . . .	82
5.3.a	Equazioni a variabili separabili . . . . .	82
5.3.b	Equazioni omogenee . . . . .	84

5.3.c	Equazioni di Bernoulli . . . . .	85
5.3.d	Equazioni differenziali non lineari del $2^0$ ordine . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Integrali multipli</b>	<b>90</b>
6.1	Integrale di Riemann . . . . .	90
6.2	Insiemi normali del piano e integrali doppi . . . . .	91
6.3	Insiemi normali dello spazio e integrali tripli . . . . .	94
6.4	Cambiamenti di coordinate . . . . .	96
6.5	Integrali generalizzati . . . . .	97
6.6	Superficie regolari ed integrali di superficie . . . . .	98
6.7	Teorema della divergenza e formula di Stokes . . . . .	102

## CAPITOLO 1

# SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

In questo capitolo generalizzeremo la trattazione delle successioni e delle serie al caso in cui i termini delle stesse siano non numeri reali come nei Capitoli 2 e 5 della prima parte, ma funzioni reali di una variabile reale. Parte della terminologia ed alcuni risultati saranno ovvie generalizzazioni delle nozioni corrispondenti già viste, ma dovremo affrontare anche molti problemi nuovi ed introdurre nuove nozioni. Infatti, stavolta saranno contemporaneamente presenti due variabili, quella relativa al dominio delle funzioni e l'indice della successione. Trattiamo prima il caso delle successioni e poi quello delle serie. Tra queste ultime rivestono un ruolo particolare, per l'importanza in molti problemi applicativi e per la particolarità dei risultati che si possono ottenere, le serie di potenze e le serie di Fourier, che trattiamo in due appositi paragrafi.

### 1.1 Successioni di funzioni

Indichiamo con  $I$  un sottoinsieme non vuoto di  $\mathbf{R}$ .

**Definizione 1.1** *Sia  $I \subset \mathbf{R}$  e per ogni  $h \in \mathbf{N}$  sia data la funzione  $f_h : I \rightarrow \mathbf{R}$ ; risulta così definita la successione di funzioni reali  $(f_h)$  in  $I$ .*

1. Diciamo che la successione  $(f_h)$  converge in  $x_0 \in I$  se la successione numerica  $(f_h(x_0))$  ha limite reale.
2. Diciamo che la successione  $(f_h)$  converge puntualmente in  $J \subset I$  alla funzione  $f : J \rightarrow \mathbf{R}$  se si ha

$$\lim_{h \rightarrow \infty} f_h(x) = f(x) \quad \forall x \in J.$$

La funzione  $f$  è detta limite puntuale della successione  $(f_h)$ .

3. Diciamo che la successione  $(f_h)$  converge uniformemente in  $J$  alla funzione  $f : J \rightarrow \mathbf{R}$  se si ha

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sup_{x \in J} |f_h(x) - f(x)| = 0.$$

È importante capire sotto quali ipotesi di convergenza di una successione di funzioni  $(f_h)$  ad una funzione  $f$  le varie proprietà di cui godono le  $f_h$  continuano a valere per la funzione limite  $f$ . Vediamo qualche semplice esempio.

### Esempi 1.2

1. È facile verificare che se le funzioni  $f_h$  sono tutte crescenti nell'insieme  $I$  e convergono puntualmente alla funzione  $f$ , allora anche la funzione  $f$  è crescente in  $I$ .
2. Siano  $I = [0, 2\pi]$  e  $f_h(x) = \sin^h x$ ; allora,  $f_h(\pi/2) = 1$  per ogni  $h$ ,  $f_h(3\pi/2) = (-1)^h$  non converge, e  $f_h(x) \rightarrow 0$  per ogni valore di  $x$  diverso da  $\pi/2, 3\pi/2$ . Di conseguenza, la funzione limite  $f$  è definita in  $J = I \setminus \{3\pi/2\}$ , e vale  $f(x) = 0$  per  $x \neq \pi/2$ ,  $f(\pi/2) = 1$ .
3. Siano  $I = [0, 1]$ ,  $f_h(x) = e^{-hx}$ . Allora il limite puntuale di  $(f_h)$  è la funzione che vale 1 per  $x = 0$  e 0 altrimenti.
4. Siano  $I = [0, \pi/2[$ ,  $f_h(x) = \min\{\tan x, h\}$ . Allora il limite puntuale di  $(f_h)$  è la funzione  $\tan x$ .

Questi esempi mostrano che in generale l'insieme di convergenza di una successione è piú piccolo dell'insieme ove le  $f_h$  sono definite, e che proprietà come la limitatezza, la continuità e (a maggior ragione) la derivabilità, non sono stabili per la convergenza puntuale. Questa è la motivazione principale che porta ad introdurre la nozione di convergenza uniforme.

**Osservazione 1.3** La convergenza uniforme in  $J$  implica la convergenza puntuale per ogni  $x_0 \in J$ : basta osservare che per ogni  $x_0 \in J$  si ha

$$|f_h(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x \in J} |f_h(x) - f(x)|$$

che tende a 0 se  $f_h$  converge uniformemente ad  $f$  in  $J$ . Il viceversa non è vero, neanche se si considerano funzioni continue ed insiemi compatti: sia infatti  $I = [0, 1]$  e

$$(1.1.1) \quad f_h(x) = x^h \quad 0 \leq x \leq 1.$$

La successione converge puntualmente alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1; \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

ma non vi converge uniformemente, dal momento che, posto  $x_h = (1/2)^{1/h}$ , risulta

$$\sup_{x \in I} |f_h(x) - f(x)| \geq f_h(x_h) = 1/2 \quad \text{non tende a zero.}$$

**Osservazione 1.4** Se esplicitiamo le richieste sulla successione  $(f_h)$  affinché essa converga puntualmente o uniformemente ad  $f$ , otteniamo le seguenti equivalenze:

$$f_h \rightarrow f \text{ puntualmente in } J \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall x \in J \exists \nu > 0 : |f_h(x) - f(x)| < \varepsilon \forall h \geq \nu,$$

mentre

$$f_h \rightarrow f \text{ uniformemente in } J \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \nu > 0 : |f_h(x) - f(x)| < \varepsilon \forall h \geq \nu, \forall x \in J.$$

In altri termini, nel primo caso il  $\nu$  trovato dipende sia da  $\varepsilon$  che da  $x$ , mentre nel secondo dipende solo da  $\varepsilon$ . Tornando all'esempio (1.1.1), vediamo che, fissati  $\varepsilon \in ]0, 1[$  e  $x \in [0, 1[$ , risulta  $x^h < \varepsilon$  se e solo se  $x = 0$  e  $h$  è qualunque, oppure  $x > 0$  e  $h \geq \nu = \frac{\log \varepsilon}{\log x}$ , sicché non si può scegliere un  $\nu$  indipendente da  $x$ .

La convergenza uniforme di una successione di funzioni ha numerose conseguenze sulle proprietà della funzione limite.

**Teorema 1.5 (Continuità della funzione limite)** *Supponiamo che la successione di funzioni  $f_h : I \rightarrow \mathbf{R}$  converga uniformemente in  $I$  alla funzione  $f$ ; se tutte le  $f_h$  sono continue nel punto  $x_0 \in I$ , allora anche la funzione  $f$  è continua in  $x_0$ ; di conseguenza, se le  $f_h$  sono tutte continue in  $I$ , la funzione  $f$  è continua in  $I$ .*

### Osservazioni 1.6

1. Il teorema precedente fornisce un'altra prova del fatto che la successione  $(x^h)$  non può convergere uniformemente in  $[0, 1]$ ; infatti, il suo limite puntuale non è una funzione continua.
2. Si potrebbe dimostrare il seguente enunciato:

*Sia  $I = [a, b]$ , siano  $f_h$  continue in  $I$ , e supponiamo che  $f_h \rightarrow f$  uniformemente in  $]a, b]$ ; allora si ha convergenza uniforme in  $[a, b]$ .*

Questo risultato è spesso utile nella discussione della convergenza uniforme: infatti, se è noto che la successione non converge nel punto  $a$ , si ha subito che non può convergere uniformemente in  $]a, b]$ .

**Teorema 1.7 (Passaggio al limite sotto il segno di integrale)** *Supponiamo che la successione di funzioni  $f_h : I \rightarrow \mathbf{R}$  converga uniformemente in  $I$  alla funzione  $f$  e che tutte le  $f_h$  siano continue in  $I$ ; allora, per ogni intervallo  $[a, b] \subset I$  risulta*

$$(1.1.2) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \int_a^b f_h(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

DIM. Notiamo che tutti gli integrali sono definiti, perché le  $f_h$  sono funzioni continue per ipotesi (quindi integrabili su ogni intervallo compatto), e la  $f$  è pure continua per il Teorema 1.5. Sia fissato  $\varepsilon > 0$ , e sia  $\nu > 0$  tale che

$$M_h = \sup_{x \in I} |f_h(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall h \geq \nu$$

(tale  $\nu$  esiste per la convergenza uniforme delle  $f_h$  ad  $f$ ). Allora:

$$\left| \int_a^b f_h(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_h(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b M_h dx < \varepsilon(b-a)$$

per ogni  $h \geq \nu$ .  $\square$

### Esempi 1.8

1. L'eguaglianza (1.1.2) non vale in generale su intervalli che non sono chiusi e limitati. Per esempio, la successione di funzioni

$$f_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h} & \text{per } -h < x < h \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

converge uniformemente a  $f(x) \equiv 0$  in  $\mathbf{R}$ , ma  $1 = \int_{\mathbf{R}} f_h \neq \int_{\mathbf{R}} f = 0$ .

2. La sola convergenza puntuale non basta ad assicurare la validità della (1.1.2). Infatti, le  $f_h(x) = 2hxe^{-hx^2}$  convergono puntualmente a 0 per ogni  $x \in [0, 1]$ , ma

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_h(x) dx = \lim_{h \rightarrow +\infty} (1 - e^{-h}) \neq \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

3. In generale, non è vero che, se una successione di funzioni derivabili converge uniformemente, la funzione limite è essa pure derivabile. Per esempio, la successione di funzioni derivabili per ogni  $x \in \mathbf{R}$  data da  $f_h(x) = \sqrt{x^2 + 1/h}$  converge uniformemente alla funzione  $f(x) = |x|$  che non è derivabile per  $x = 0$ . Infatti, dalle disequaglianze

$$-\left(|x| + \frac{1}{\sqrt{h}}\right) \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{h}} \leq |x| + \frac{1}{\sqrt{h}}$$

segue  $|f_h(x) - |x|| \leq 1/\sqrt{h}$  per ogni  $h$  e per ogni  $x$ , il che prova la convergenza uniforme.

Inoltre, anche se la funzione limite è derivabile, in generale la sua derivata non è il limite delle derivate delle  $f_h$ . Per esempio, le funzioni  $f_h(x) = \frac{\sin(hx)}{h}$  sono tutte derivabili, convergono a 0 uniformemente in  $\mathbf{R}$ , ma le loro derivate,  $f'_h(x) = \cos(hx)$ , non convergono alla derivata del limite.

**Teorema 1.9 (Passaggio al limite sotto il segno di derivata)** *Supponiamo che la successione di funzioni  $f_h : I \rightarrow \mathbf{R}$  converga puntualmente in  $I$  alla funzione  $f$ , che le  $f_h$  siano tutte derivabili in  $I$  con derivate prime continue, e che la successione  $(f'_h)$  converga uniformemente in  $I$  alla funzione  $g$ . Allora la funzione  $f$  è derivabile in  $I$ , la sua derivata è  $g$ , e la successione  $(f_h)$  converge uniformemente ad  $f$  in ogni intervallo chiuso e limitato  $[a, b] \subset I$ .*

DIM. Fissato un punto  $x_0 \in I$ , per il Teorema fondamentale del calcolo ?? si ha  $f_h(x) = f_h(x_0) + \int_{x_0}^x f'_h(t)dt$  per ogni  $h \in \mathbf{N}$  e per ogni  $x \in I$ . Dalle ipotesi segue che  $f_h(x) \rightarrow f(x)$  e  $f'_h(x) \rightarrow g(x)$  e che  $\int_{x_0}^x f'_h(t)dt \rightarrow \int_{x_0}^x g(t)dt$ . Ne segue che

$$(1.1.3) \quad f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t)dt,$$

e quindi, usando ancora il Teorema fondamentale del calcolo,  $f$  è derivabile e  $f' = g$ . Infine, la convergenza uniforme sugli intervalli chiusi e limitati segue da (1.1.3) e dal teorema 1.7.

QED

## 1.2 Serie di funzioni

Come nel paragrafo precedente, indichiamo con  $I$  un sottoinsieme non vuoto di  $\mathbf{R}$ . Data una successione di funzioni  $(u_k)$  in  $I$ , consideriamo la serie ad essa associata, denotata come nel caso delle serie numeriche con la notazione  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ . Naturalmente, come nel caso delle serie numeriche (vedi Definizione ??), intenderemo col termine *serie di funzioni* l'operazione che associa alla successione di termine generale  $u_k$  la successione delle somme parziali definita di seguito.

**Definizione 1.10** *Sia  $I \subset \mathbf{R}$ ; per ogni  $k \in \mathbf{N}$  sia data la funzione  $u_k : I \rightarrow \mathbf{R}$ , e consideriamo la serie di funzioni  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ . Definiamo la successione delle somme parziali (o ridotte) della serie ponendo, per ogni  $h \in \mathbf{N}$  e per ogni  $x \in I$ ,  $f_h(x) = \sum_{k=0}^h u_k(x)$ .*

1. Diciamo che la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  converge in  $x_0 \in I$  se la successione  $(f_h(x_0))$  ammette limite reale.
2. Diciamo che la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  converge puntualmente alla funzione  $f : J \rightarrow \mathbf{R}$  se la successione  $(f_h)$  converge puntualmente ad  $f$  in  $J \subset I$ . La funzione  $f$  è detta somma della serie in  $J$  e si denota anche  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ .
3. Diciamo che la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  converge uniformemente in  $J$  alla funzione  $f : J \rightarrow \mathbf{R}$  se la successione  $(f_h)$  converge uniformemente ad  $f$  in  $J$ .

Se la serie converge ad  $f$  in  $J$ , si dice che  $f$  è la somma (puntuale o uniforme, secondo i casi) della serie, e si scrive  $f = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ .

**Osservazione 1.11** Si può formulare la definizione precedente dicendo che la serie  $\sum_k u_k$  converge puntualmente o uniformemente se si verificano, rispettivamente le condizioni:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^h u_k(x) = f(x) \quad \forall x \in J & \iff \\ \forall \varepsilon > 0, \forall x \in J \exists \nu > 0 : \left| f(x) - \sum_{k=0}^h u_k(x) \right| < \varepsilon \quad \forall h \geq \nu, & \\ \lim_{h \rightarrow \infty} \sup_{x \in J} \left| f(x) - \sum_{k=0}^h u_k(x) \right| = 0 & \iff \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \nu > 0 : \sup_{x \in J} \left| f(x) - \sum_{k=0}^h u_k(x) \right| < \varepsilon \quad \forall h \geq \nu & \iff \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \nu > 0 : \left| f(x) - \sum_{k=0}^h u_k(x) \right| < \varepsilon \quad \forall h \geq \nu, \forall x \in J. & \end{aligned}$$

Come nel caso delle successioni, anche nel caso delle serie di funzioni la convergenza uniforme in  $J$  implica la convergenza puntuale per ogni  $x \in J$ .

Come per le serie numeriche, si può dare per le serie di funzioni una nozione di convergenza assoluta, che non ha un'equivalente nella teoria delle successioni (ed infatti la definizione seguente non ricorre alla successione delle ridotte). Si può inoltre dare un'ulteriore nozione di convergenza, detta convergenza totale, che permette un uso diretto dei criteri di convergenza noti per le serie a termini positivi, ed implica, come vedremo, tutti gli altri tipi di convergenza.

**Definizione 1.12** Sia  $I \subset \mathbf{R}$ ; per ogni  $k \in \mathbf{N}$  sia data la funzione  $u_k : I \rightarrow \mathbf{R}$ , e consideriamo la serie di funzioni  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ .

1. Diciamo che la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  converge puntualmente assolutamente o, rispettivamente, uniformemente assolutamente in  $J \subset I$  se la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$  converge puntualmente (risp. uniformemente) in  $J$ .
2. Diciamo che la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  converge totalmente in  $J \subset I$  se la serie numerica  $\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{x \in J} |u_k(x)|$  converge.

**Osservazione 1.13** È immediato che, come nel caso delle serie numeriche, se una serie di funzioni converge assolutamente puntualmente (risp. uniformemente) allora converge puntualmente (risp. uniformemente); inoltre, è pure immediato per confronto che se la serie converge totalmente allora converge assolutamente uniformemente.

Una serie di funzioni può convergere assolutamente ma non uniformemente e viceversa. Per esempio,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{converge assolutamente in } [0, 1[$$

ma non converge uniformemente (altrimenti dovrebbe convergere anche per  $x = 1$ ), mentre usando il criterio di Leibniz si può verificare che la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} \quad \text{converge uniformemente in } [0, +\infty[$$

ma non converge assolutamente per alcun  $x \in [0, +\infty[$  (per confronto con la serie armonica). Detta  $f$  la somma della serie, la convergenza uniforme segue subito dalla stima

$$\sup_{x \in [0, +\infty[} \left| f(x) - \sum_{k=0}^h \frac{(-1)^k}{x+k} \right| \leq \frac{1}{x+(h+1)} \leq \frac{1}{h+1},$$

che è conseguenza immediata di (??).

Per verificare la convergenza totale di una serie, non occorre sempre necessariamente calcolare l'estremo superiore delle  $u_k$  in  $I$ ; se si riesce a darne una valutazione sufficientemente accurata, ciò può bastare.

**Teorema 1.14 (Criterio di Weierstrass)** *Sia  $I \subset \mathbf{R}$  e per ogni  $k \in \mathbf{N}$  sia data la funzione  $u_k : I \rightarrow \mathbf{R}$ . Se esiste una successione numerica  $(M_k)$  tale che  $|u_k(x)| \leq M_k$  per ogni  $x \in I$  e per ogni  $k \in \mathbf{N}$  e la serie  $\sum_k M_k$  è convergente, allora la serie di funzioni  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  converge totalmente in  $I$ .*

**Esempio 1.15** Consideriamo ad esempio la serie di funzioni

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kx) \cos(k^2 \log |x|)}{k^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

È chiaro che sarebbe quanto meno laborioso calcolare esplicitamente l'estremo superiore del termine generale per verificare direttamente la convergenza totale della serie in  $\mathbf{R}$ . D'altra parte, la semplice maggiorazione

$$\sin(kx) \cos(k^2 \log x) \leq 1 \quad \implies \quad \frac{\sin(kx) \cos(k^2 \log x)}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

basta per concludere che la serie converge totalmente in  $\mathbf{R}$ , usando  $M_k = 1/k^2$  nel criterio di Weierstrass e la convergenza della serie di termine generale  $1/k^2$ .

Per la somma di una serie di funzioni uniformemente convergente valgono proprietà analoghe a quelle viste per il limite uniforme di una successione, di cui sono conseguenze immediate.

**Teorema 1.16 (Continuità della funzione somma)** *Se la serie di funzioni  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  converge uniformemente in  $I$  alla funzione  $f$  e tutte le  $u_k$  sono continue nel punto  $x_0 \in I$ , allora anche la funzione  $f$  è continua in  $x_0$ ; di conseguenza, se le  $u_k$  sono tutte continue in  $I$ , la funzione  $f$  è continua in  $I$ .*

**Teorema 1.17 (Integrazione per serie)** *Se la serie di funzioni  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  converge uniformemente in  $I$  alla funzione  $f$  e tutte le  $u_k$  sono continue in  $I$  allora, per ogni intervallo  $[a, b] \subset I$  risulta*

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx.$$

**Teorema 1.18 (Derivazione per serie)** *Se la serie di funzioni  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  converge puntualmente in  $I$  alla funzione  $f$ , le  $u_k$  sono tutte derivabili in  $I$  con derivate prime continue, e la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} u'_k$  converge uniformemente in  $I$  alla funzione  $g$ , allora la funzione  $f$  è derivabile in  $I$ , la sua derivata è  $g$ , e la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  converge uniformemente ad  $f$  in ogni intervallo chiuso e limitato  $[a, b] \subset I$ .*

### 1.3 Serie di potenze e serie di Taylor

Le serie di potenze sono particolari serie di funzioni, precisamente quelle il cui termine generale  $u_k(x)$  è del tipo  $c_k(x - x_0)^k$ , con  $(c_k)$  successione reale e  $x_0 \in \mathbf{R}$ . Ne segue che la ridotta  $h$ -esima di una serie di potenze è un polinomio di grado al più  $h$ . Tali serie godono di particolari proprietà: l'insieme di convergenza è sempre un intervallo (mentre ciò non è vero per una serie di funzioni generica), la convergenza è assoluta in tutti i punti del suddetto intervallo, esclusi al più gli estremi, la somma è una funzione indefinitamente derivabile, ecc.

**Definizione 1.19** *Si dice serie di potenze di centro  $x_0 \in \mathbf{R}$  e coefficienti  $(c_k) \subset \mathbf{R}$  la serie di funzioni*

$$(1.3.4) \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k, \quad x \in \mathbf{R}.$$

**Osservazione 1.20** 1. Il primo termine di una serie di potenze per  $x = x_0$  è sempre (sostituendo formalmente)  $c_0 0^0$ , ossia un'espressione priva di significato. Poiché per ogni altro valore di  $x$  esso vale  $c_0$ , gli si attribuisce il valore  $c_0$  anche per  $x = x_0$ .

2. È bene tener presente, anche in vista di una corretta applicazione dei risultati esposti nel seguente Teorema 1.23, che il coefficiente  $c_k$  nella (1.3.4) è *il coefficiente della  $k$ -esima potenza di  $x$*  e non il coefficiente del  $k$ -esimo termine non nullo nella serie. Per esempio, se si considera la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$  risulta:

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ 1 & \text{se } k = 2p, \text{ con } p \text{ pari} \\ -1 & \text{se } k = 2p, \text{ con } p \text{ dispari} \end{cases}$$

3. L'insieme di convergenza  $J$  di una serie di potenze non è mai vuoto, in quanto esso contiene sempre almeno il punto  $x_0$ . Vi sono casi in cui la serie converge solo per  $x = x_0$ , per esempio per la serie  $\sum_k k! x^k$  vale  $J = \{0\}$ . Tenendo conto che  $J$  non è mai vuoto, la seguente definizione è ben posta.

**Definizione 1.21 (Raggio di convergenza)** *Si dice raggio di convergenza della serie (1.3.4) il seguente estremo superiore*

$$\rho = \sup \left\{ t > 0 : \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| t^k \text{ converge} \right\}.$$

**Osservazione 1.22** Il valore  $\rho$  sopra definito può essere 0 (come nel caso della serie nell'Osservazione 1.20.3), un qualunque numero positivo oppure  $+\infty$ . Per esempio, le serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} c^k x^k, \quad c > 0, \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

hanno raggi di convergenza rispettivi  $\rho = 1/c$  e  $\rho = +\infty$ , come si può agevolmente verificare, per esempio usando il criterio del rapporto (vedi Osservazione 1.24.4).

Notiamo anche che il raggio di convergenza dipende solo dai coefficienti della serie, e non dal loro centro. Infatti, cambiando il centro della serie (1.3.4) si trasla l'intervallo di convergenza, ma non se ne altera l'ampiezza.

Le proprietà delle serie di potenze sono raccolte nel seguente enunciato.

**Teorema 1.23 (Proprietà delle serie di potenze)** *Data la serie di potenze (1.3.4), sia  $\rho \in [0, +\infty]$  il suo raggio di convergenza.*

- (i) *Se  $\rho = 0$  allora la serie converge solo per  $x = x_0$ .*
- (ii) *Se  $\rho = +\infty$  allora la serie converge assolutamente per ogni  $x \in \mathbf{R}$  e converge totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato di  $\mathbf{R}$ .*
- (iii) *Se  $0 < \rho < +\infty$  allora la serie converge assolutamente per ogni  $x \in ]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ , converge totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in  $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$  e non converge per alcun  $x$  tale che  $|x - x_0| > \rho$ .*
- (iv) *Se esiste il limite  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ , detto  $\ell$  il suo valore, si ha  $\rho = 1/\ell$ , con le convenzioni che se  $\ell = 0$  allora  $\rho = +\infty$  e se  $\ell = +\infty$  allora  $\rho = 0$ .*
- (v) *Supposto  $\rho > 0$ , sia  $f : ]x_0 - \rho, x_0 + \rho[ \rightarrow \mathbf{R}$  la somma della serie; allora  $f \in C^\infty(]x_0 - \rho, x_0 + \rho[)$  e vale l'eguaglianza:*

$$(1.3.5) \quad f^{(h)}(x) = \sum_{k=h}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-h+1) c_k (x-x_0)^{k-h}$$

*per ogni  $h \in \mathbf{N}$  e per ogni  $x \in ]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ . In particolare, la serie al secondo membro ha raggio di convergenza  $\rho$  per ogni  $h$ .*

**Osservazione 1.24** 1. Il Teorema 1.23 non contiene alcuna affermazione sul comportamento delle serie di potenze negli estremi  $x_0 - \rho$  e  $x_0 + \rho$  dell'intervallo di convergenza. Infatti, si possono verificare tutti i casi, come mostrano i seguenti esempi, in cui il raggio di convergenza è sempre  $\rho = 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} x^k & \text{ converge in } ]-1, 1[; \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k} & \text{ converge in } [-1, 1[; \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} & \text{ converge in } [-1, 1]. \end{aligned}$$

2. Dal Teorema 1.23 e dal Teorema 1.17 segue che una serie di potenze si può integrare termine a termine nel suo intervallo di convergenza; supponendo che (1.3.4) abbia raggio di convergenza  $\rho > 0$ , risulta

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^x c_k (t-x_0)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1}$$

per ogni  $x \in ]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ . Infatti, il Teorema 1.17 si applica, per ogni  $x \in ]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ , all'intervallo compatto di estremi  $x_0$  e  $x$ , ove la serie converge totalmente e quindi uniformemente.

3. Notiamo che se esiste il limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|},$$

allora esiste anche

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|},$$

tali due limiti sono uguali, e, detto  $\ell$  il loro valore, si ha che il raggio di convergenza di (1.3.4) è  $\rho = 1/\ell$ , con le convenzioni dette. Come già osservato per le serie numeriche (vedi Osservazione ??), può però accadere che esista il limite delle radici  $k$ -esime, ma non dei rapporti.

4. Si può dimostrare un risultato piú forte del Teorema 1.23(iv), che può essere enunciato come segue:

*Sia*

$$\ell = \sup \left\{ r \geq 0 : \text{esiste un'estratta } (c_{k_j}) \text{ tale che } \lim_{j \rightarrow +\infty} \sqrt[k_j]{|c_{k_j}|} = r \right\}$$

*Allora, il raggio di convergenza della (1.3.4) è  $1/\ell$  (con le solite convenzioni).*

Per esempio, la serie di potenze  $\sum_{k=0}^{\infty} x^{k^2}$  ha raggio di convergenza  $\rho = 1$ . Infatti, i coefficienti sono  $c_k = 1$  se  $k = n^2$  è il quadrato di un numero naturale,  $c_k = 0$  altrimenti e quindi il limite della successione  $\sqrt[k]{|c_k|}$  non esiste. Poiché la successione

$\sqrt[k]{|c_k|}$  assume solo i valori 0 e 1, e ciascuno di essi infinite volte, il limite di ogni sua estratta convergente è 0 o 1,  $\ell = 1$  e  $\rho = 1$ .

5. Supponiamo che la serie (1.3.4) abbia raggio di convergenza  $\rho > 0$ . Dal punto 4 segue che sostituendo  $\alpha t^n$  (con  $\alpha \neq 0$  e  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 1$ ) al posto di  $x - x_0$  si ottiene un'altra serie di potenze con raggio di convergenza pari a  $\sqrt[n]{\rho/|\alpha|}$ .

Abbiamo osservato che le serie di potenze, in un certo senso, generalizzano i polinomi. Inoltre, abbiamo visto nella Parte I che ad ogni funzione  $f$  di classe  $C^h$  in un intervallo  $I$ , si può associare, per ogni  $x_0 \in I$ , il polinomio di Taylor di grado  $h$  di centro  $x_0$ . È quindi ora naturale associare ad una funzione  $f$  di classe  $C^\infty$  una serie di potenze. Ci aspettiamo che in molti casi la somma della serie, i cui coefficienti sono definiti con la stessa logica dei coefficienti dei polinomi di Taylor, sia proprio la funzione  $f$  da cui siamo partiti. Ciò in effetti accade in molte situazioni, ma non sempre.

**Definizione 1.25 (Serie di Taylor)** *Sia  $I$  un intervallo di  $\mathbf{R}$ ,  $x_0$  interno ad  $I$ , e sia  $f \in C^\infty(I)$ ; si dice serie di Taylor di  $f$  di punto iniziale  $x_0$  la serie di potenze*

$$(1.3.6) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

- (i) *Si dice che  $f$  è sviluppabile in serie di Taylor di centro  $x_0$  in  $I$  se la serie (1.3.6) converge ad  $f$  in  $I$ .*
- (ii) *Si dice che  $f$  è analitica reale in  $I$  se per ogni  $x_0 \in I$  esiste  $\rho > 0$  tale che la serie (1.3.6) converge ad  $f$  in  $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ .*

**Esempi 1.26** Per ogni funzione  $C^\infty$  è evidentemente possibile *scrivere* la serie di Taylor. Il fatto che la serie converga, e che la somma sia la funzione di partenza, è invece da verificare.

1. La somma di una serie di potenze è sempre sviluppabile in serie di Taylor nel suo intervallo di convergenza.

2. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

appartiene a  $C^\infty(\mathbf{R})$  e verifica  $f^{(k)}(0) = 0$  per ogni  $k \in \mathbf{N}$ , sicché la sua serie di Taylor di centro 0 è la serie con tutti i coefficienti nulli. Tale serie converge banalmente in  $\mathbf{R}$ , ma la sua somma è 0, e non coincide con la funzione  $f$ .

3. La funzione  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , vedi (1.3.9), è analitica reale in  $\mathbf{R}$ , ma non è sviluppabile in serie di Taylor in  $\mathbf{R}$ , in quanto per nessun  $x_0 \in \mathbf{R}$  la serie di Taylor di  $f$  con centro  $x_0$  ha raggio di convergenza  $\rho = +\infty$ .

4. Le ridotte di della serie di Taylor di  $f$  non sono altro che i polinomi di Taylor di  $f$ .

Molte funzioni elementari sono analitiche reali, ed alcune sviluppabili in serie di Taylor sull'intera retta reale  $\mathbf{R}$ . Elenchiamo alcuni sviluppi, precisando l'intervallo di validità

$$(1.3.7) \quad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad x \in ]-1, 1[.$$

Quest'esempio è di fatto già noto (vedi Esempio ??), è la serie geometrica. Da questa formula si possono dedurre altri sviluppi, cambiando variabile. Sostituendo  $x$  con  $-x$  si ottiene

$$(1.3.8) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} \quad x \in ]-1, 1[,$$

mentre sostituendo  $x$  con  $-x^2$  si ottiene (vedi Osservazione 1.24.5):

$$(1.3.9) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in ]-1, 1[.$$

Integrando termine a termine la (1.3.8) si ottiene

$$(1.3.10) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = \log(1+x) \quad x \in ]-1, 1[,$$

ed integrando termine a termine (1.3.9)

$$(1.3.11) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = \arctan x \quad x \in ]-1, 1[.$$

Infine, segnaliamo la *serie binomiale* che fornisce lo sviluppo di Taylor della funzione  $(1+x)^\alpha$  con centro  $x=0$ , per  $\alpha \neq 0$  qualunque. Posto (*coefficiente binomiale*)

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

si ha

$$(1.3.12) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha \quad x \in ]-1, 1[.$$

Infine, il calcolo diretto dei coefficienti permette di ottenere facilmente gli sviluppi di Taylor delle funzioni  $e^x$ ,  $\sin x$  e  $\cos x$ , che valgono per ogni  $x \in \mathbf{R}$ :

$$(1.3.13) \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Notiamo che, coerentemente con le proprietà di parità e disparità del seno e del coseno, i rispettivi sviluppi contengono solo potenze pari o dispari. I risultati di convergenza per

le serie di Taylor della funzione esponenziale, del seno e del coseno si possono dedurre, per esempio, dal seguente risultato.

**Teorema 1.27 (Criterio di sviluppabilità in serie di Taylor)** *Sia  $I \subset \mathbf{R}$  un intervallo e sia  $f \in C^\infty(I)$ . Se esistono  $L, M > 0$  tali che*

$$|f^{(k)}(x)| \leq ML^k \quad \forall x \in I, \quad \forall k \in \mathbf{N}$$

*allora  $f$  è sviluppabile in serie di Taylor in  $I$ .*

## 1.4 Serie di Fourier

Un tipo di sviluppo in serie rispetto a funzioni elementari completamente diverso da quello di Taylor è fornito dagli sviluppi in serie di Fourier. Questa volta le funzioni di partenza non sono potenze, ma funzioni trigonometriche elementari del tipo  $\sin(kx)$  e  $\cos(kx)$ . Gli sviluppi in serie di Fourier si prestano ad approssimare le funzioni periodiche, di cui ora ricordiamo la definizione.

**Definizione 1.28 (Funzioni periodiche)** *Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ; diciamo che  $f$  è periodica di periodo  $T$  (o  $T$ -periodica) se  $T > 0$  è il piú piccolo numero reale tale che  $f(x+T) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbf{R}$ . Se  $f$  è  $T$ -periodica,  $T$  si dice periodo della funzione  $f$ .*

### Osservazioni 1.29

1. Osserviamo che se  $f$  è  $T$ -periodica allora  $f(x+kT) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbf{R}$  e per ogni  $k \in \mathbf{Z}$ .
2. Fissato  $T > 0$  e posto  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , le funzioni  $\sin(k\omega x)$  e  $\cos(k\omega x)$  sono  $T$ -periodiche per ogni  $k \in \mathbf{Z}$ . Il numero  $\omega$  si dice *pulsazione*.

Al contrario degli sviluppi in serie di Taylor, che presuppongono di partire da funzioni di classe  $C^\infty$ , gli sviluppi in serie di Fourier si possono considerare per funzioni anche assai poco regolari. Infatti i coefficienti degli sviluppi in serie di Fourier si ottengono calcolando degli integrali, e non delle derivate. Definiamo una classe funzionale in cui si possono considerare gli sviluppi di Fourier, anche se essa non è certamente la piú ampia possibile.

**Definizione 1.30 (Funzioni continue a tratti)** *Una funzione  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  si dice continua a tratti se per ogni intervallo limitato  $I \subset \mathbf{R}$  essa è continua in  $I$  eccetto un numero finito di punti di  $I$ , ed in tali punti ammette limiti finiti a destra ed a sinistra. Se  $f$  è continua a tratti, per ogni punto  $x_0$  di discontinuità poniamo*

$$f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Ricordiamo (vedi Osservazione ??) che una funzione continua a tratti è integrabile in ogni intervallo limitato, quindi possiamo dare la seguente definizione.

**Definizione 1.31 (Serie di Fourier)** Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continua a tratti e  $T$ -periodica, e sia  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Poniamo

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx,$$

e, per  $k \in \mathbf{N}, k \geq 1$ ,

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(k\omega x) dx, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(k\omega x) dx.$$

I numeri  $a_0, a_k, b_k$  si dicono coefficienti di Fourier della funzione  $f$ . Si dice serie di Fourier associata ad  $f$  la serie

$$(1.4.14) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)).$$

Come nel caso delle serie di Taylor, in generale non si può affermare che la serie di Fourier converga, né, se converge, che la sua somma sia  $f$ . Ciò vale sotto ipotesi più restrittive su  $f$  della sola continuità a tratti.

**Definizione 1.32 (Funzioni regolari a tratti)** La funzione  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  si dice regolare a tratti se è continua a tratti e, inoltre, valgono le condizioni seguenti:

- (i)  $f$  è derivabile in ogni intervallo di continuità, eccetto un numero finito di punti;
- (ii) in ogni punto di discontinuità  $x_0$  di  $f$  o di  $f'$  esistono finiti i limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x).$$

**Teorema 1.33 (Convergenza della serie di Fourier)** Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  periodica e regolare a tratti. Allora, la serie di Fourier di  $f$  converge puntualmente per ogni  $x \in \mathbf{R}$  al valore

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Inoltre, la convergenza è uniforme in ogni intervallo chiuso in cui  $f$  è continua.

### Osservazioni 1.34

1. Si vede facilmente con un cambiamento di variabili che per calcolare i coefficienti di Fourier non bisogna necessariamente integrare sull'intervallo  $(-T/2, T/2)$ , ma qualunque intervallo di lunghezza  $T$ , cioè pari ad un periodo, fornisce lo stesso risultato.

2. Il termine  $a_0/2$  che compare nella serie di Fourier di  $f$  esprime la *media integrale* di  $f$  nel periodo (vedi Definizione ??).
3. Ricordiamo che  $f$  si dice *pari* se  $f(x) = f(-x)$  per ogni  $x \in \mathbf{R}$  e si dice *dispari* se  $f(x) = -f(-x)$  per ogni  $x \in \mathbf{R}$ , e che le funzioni  $\cos(k\omega x)$  sono pari, le funzioni  $\sin(k\omega x)$  sono dispari. Possiamo osservare che se  $f$  è pari allora tutti i coefficienti  $b_k$  sono nulli, mentre se  $f$  è dispari sono nulli tutti i coefficienti  $a_k$ . Infatti, in entrambi i casi nelle formule della Definizione 1.31 detti coefficienti si ottengono attraverso integrali di funzioni dispari su intervalli simmetrici rispetto all'origine, che danno risultato nullo. Inoltre, si possono ottenere i coefficienti non nulli usando le formule

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos(k\omega x) dx, \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin(k\omega x) dx$$

per  $f$  pari e dispari rispettivamente.

4. Data una funzione  $f$  definita in un intervallo limitato qualunque, che senza ledere la generalità possiamo supporre sia del tipo  $[0, b]$ , si può definire una estensione periodica arbitraria di  $f$  e studiare la convergenza della serie di Fourier dell'estensione. Il Teorema 1.33 implica, in particolare, che se due funzioni sviluppabili in serie di Fourier coincidono in un intervallo  $J$  allora le loro serie convergono allo stesso limite in  $J$ . Di conseguenza, se si considerano due estensioni periodiche differenti di  $f$ , e le rispettive serie di Fourier convergono entrambe ad esse, si ottengono due serie di Fourier diverse convergenti, *nell'intervallo*  $(0, b)$ , alla stessa funzione  $f$ . Queste considerazioni portano ad associare una serie di Fourier anche ad una funzione non periodica, passando per una sua estensione periodica. Le estensioni periodiche naturali di una  $f : [0, b] \rightarrow \mathbf{R}$  sono le seguenti:

- (i) l'estensione  $f^*$  di periodo  $b$  così definita:

$$f^*(x) = f(x - kb), \quad x \in \mathbf{R},$$

dove, per ogni  $x \in \mathbf{R}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  è l'unico intero tale che  $x - kb \in [0, b)$ .

- (ii) l'estensione pari  $f_p$  di periodo  $2b$  così definita:

$$f_p(x) = f(-x) \quad \text{per } x \in [-b, 0), \quad f_p^*(x) = f_p(x - 2kb), \quad x \in \mathbf{R},$$

dove per ogni  $x \in \mathbf{R}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  è l'unico intero tale che  $x - 2kb \in [-b, b)$ . Tale estensione, essendo pari, dà luogo ad una serie di Fourier contenente solo i termini in  $\cos(k\omega x)$ , detta *sviluppo in soli coseni di  $f$* .

- (iii) l'estensione dispari  $f_d$  di periodo  $2b$  così definita:

$$f_d(x) = -f(-x) \quad \text{per } x \in [-b, 0), \quad f_d^*(x) = f_d(x - 2kb), \quad x \in \mathbf{R},$$

dove per ogni  $x \in \mathbf{R}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  è l'unico intero tale che  $x - 2kb \in [-b, b)$ . Tale estensione, essendo dispari, dà luogo ad una serie di Fourier contenente solo i

termini in  $\sin(k\omega x)$ , detta *sviluppo in soli seni di  $f$* . A rigore, perché  $f_d$  sia dispari, occorre anche  $f(0) = 0$ ; in realtà, anche senza supporre tale condizione si ottengono i medesimi risultati, dal momento che né i coefficienti di Fourier né il valore della somma nello 0 dipendono dal valore  $f(0)$ .

5. A volte si scrive la serie di Fourier di  $f$  in modo equivalente nella forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega x + \phi_k),$$

che mette in evidenza i coefficienti di *ampiezza*  $A_k$  e di *fase*  $\phi_k$ . I legami tra i coefficienti si deducono facilmente dalla formula di addizione  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ , e sono dati da:

$$a_0 = A_0 \cos \phi_0, \quad a_k = A_k \cos \phi_k, \quad b_k = -A_k \sin \phi_k, \quad k \geq 1.$$

6. Quanto detto finora vale senza cambiamenti per funzioni a valori complessi (un caso utile in varie applicazioni), dal momento che si può ragionare separatamente sulla parte reale e sulla parte immaginaria. Per le funzioni a valori complessi valgono quindi ancora le formule nella Definizione 1.31, ma si può scrivere la serie di Fourier in modo piú naturale usando esponenziali complessi anziché funzioni trigonometriche reali. Tenendo conto delle relazioni di Eulero

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),$$

si ottiene la *serie di Fourier complessa*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega x}$$

con

$$\begin{cases} c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \\ c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \end{cases} \quad \begin{cases} a_k = c_k + c_{-k} \\ b_k = i(c_k - c_{-k}) \end{cases}$$

e i coefficienti  $c_k$  possono essere calcolati tramite le

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-ik\omega x} dx, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

7. Usando le formule di prostaferesi si verificano facilmente le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega x) \cos(h\omega x) dx &= 0, \\ \int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega x) \sin(h\omega x) dx &= \frac{T}{2} \delta_{hk}, \\ \int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega x) \cos(h\omega x) dx &= \frac{T}{2} \delta_{hk}, \end{aligned}$$

(ove  $\delta_{hk} = 1$  se  $h = k$  e  $\delta_{hk} = 0$  se  $h \neq k$ ) da cui, passando al limite sotto il segno di integrale, si può dedurre l'*eguaglianza di Parseval*

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx = \frac{T}{2} \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2 \right).$$

Per il calcolo delle serie di Fourier è a volte utile il seguente risultato, che lega i coefficienti di  $f$  a quelli delle sue primitive.

**Teorema 1.35 (Integrazione della serie di Fourier)** *Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continua a tratti e  $T$ -periodica, e poniamo*

$$F(x) = \int_{-T/2}^x (f(t) - a_0/2) dt.$$

*Allora,  $F$  è  $T$ -periodica, continua e regolare a tratti, sicché la sua serie di Fourier converge uniformemente ad  $F$  in  $\mathbf{R}$ . Inoltre, i suoi coefficienti di Fourier  $A_k$  e  $B_k$  sono legati ai coefficienti  $a_k, b_k$  di  $f$  dalle relazioni*

$$A_k = -\frac{b_k}{\omega k}, \quad B_k = \frac{a_k}{\omega k} \quad \text{per } k \geq 1.$$

Osserviamo che nel teorema precedente non si suppone che la serie di Fourier di  $f$  sia convergente, ed infatti quest'ipotesi non è necessaria. Per quanto riguarda la derivazione termine a termine, non c'è nulla di nuovo rispetto al Teorema 1.18, che vale in generale per le serie di funzioni.

## CAPITOLO 2

# LIMITI E CONTINUITÀ IN PIÙ VARIABILI

In questo capitolo iniziamo lo studio delle funzioni dipendenti da più variabili reali, cioè definite in (sottoinsiemi di)  $\mathbf{R}^n$ , dove al solito  $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}$  ( $n$  volte), e discutiamo brevemente le principali proprietà delle funzioni di una variabile a valori in  $\mathbf{R}^n$ , che approfondiremo nel Capitolo 4. Indicheremo con  $x = (x_1, \dots, x_n)$  il punto generico di  $\mathbf{R}^n$ , di coordinate  $x_1, \dots, x_n$ . Com'è noto,  $\mathbf{R}^n$  è uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$ , che supporremo sempre munito della *base canonica*  $(e_1, \dots, e_n)$ , dove la  $j$ -esima coordinata di  $e_i$  è  $\delta_{ij}$ . Indicheremo con  $p_i$  la proiezione sull'asse  $x_i$ , cioè la funzione lineare con dominio  $\mathbf{R}^n$  ed a valori in  $\mathbf{R}$  che associa ad ogni elemento di  $\mathbf{R}^n$  la sua  $i$ -esima coordinata.

### 2.1 Topologia di $\mathbf{R}^n$

In questo paragrafo estendiamo al caso di  $\mathbf{R}^n$  le nozioni di intorno, aperto, chiuso, ecc., che si sono già viste in  $\mathbf{R}$ . In questo caso, la discussione è più articolata perché, mentre in  $\mathbf{R}$  abbiamo considerato solo intervalli o unioni di intervalli, ora dobbiamo considerare insiemi di forma geometrica a priori arbitraria.

Su  $\mathbf{R}^n$  pensiamo sempre definito il *prodotto scalare euclideo*  $x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ , e la *norma euclidea* indotta  $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ . La norma, come sempre, induce una *distanza* tra i punti di  $\mathbf{R}^n$ : per ogni coppia  $x, y$  poniamo  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Ricordiamo le seguenti proprietà della norma (analoghe alle proprietà già viste per il valore assoluto), valide per ogni  $x, y \in \mathbf{R}^n$  e per ogni  $\lambda \in \mathbf{R}$ :

1.  $\|x\| \geq 0$ ,  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Da queste seguono le analoghe proprietà della distanza, valide per ogni  $x, y, z \in \mathbf{R}^n$ :

1.  $d(x, y) \geq 0$ ,  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ ,

3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (diseguaglianza triangolare).

Queste proprietà possono essere usate per dare una definizione generale di distanza su un insieme qualunque e sono state segnalate per completezza. In questo corso non seguiremo questa strada, ma faremo sempre ricorso direttamente alla norma.

**Definizione 2.1 (Intorni sferici)** Sia  $x_0 \in \mathbf{R}^n$  e sia  $r > 0$ . Si dice intorno sferico aperto, o anche palla aperta di centro  $x_0$  e raggio  $r$  l'insieme così definito

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x_0 - x\| < r\}.$$

L'insieme  $\bar{B}_r(x_0) := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x_0 - x\| \leq r\}$  è detto intorno sferico chiuso, o anche palla chiusa, di centro  $x_0$  e raggio  $r$ . Si dice sfera di centro  $x_0$  e raggio  $r$  l'insieme così definito

$$S_r(x_0) := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x_0 - x\| = r\}.$$

Notiamo che  $\bar{B}_r(x_0) = B_r(x_0) \cup S_r(x_0)$ .

**Esempio 2.2** Sia  $n = 1$ ; per  $x_0 \in \mathbf{R}$  e  $r > 0$ , l'intorno sferico aperto di  $x_0$  e raggio  $r$  è l'intervallo  $]x_0 - r, x_0 + r[$  già introdotto nella definizione ???. Per  $n = 2$  e  $x_0 \in \mathbf{R}^2$ ,  $r > 0$  l'intorno sferico aperto di  $x_0$  e raggio  $r$  è il cerchio di centro  $x_0$  e raggio  $r$ , esclusi i punti della circonferenza con lo stesso centro e lo stesso raggio.

In generale, si dice che  $I \subset \mathbf{R}^n$  è un intorno di  $x_0$  se esiste  $r > 0$  tale che  $B_r(x_0) \subset I$ .

**Osservazione 2.3** Notiamo che per ogni coppia di punti  $x, y \in \mathbf{R}^n$  con  $x \neq y$  esiste  $r > 0$  tale che  $B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$ .

**Definizione 2.4 (Punti interni, esterni, di frontiera)** Siano  $A \subset \mathbf{R}^n$  e  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ . Si dice che  $x_0$  è un punto interno ad  $A$  se esiste  $r > 0$  tale che  $B_r(x_0) \subset A$ . Invece, si dice che  $x_0$  è un punto esterno ad  $A$  se  $x_0$  è un punto interno al complementare di  $A$ , che indichiamo con  $A^c$ . Infine, si dice che  $x_0$  è un punto di frontiera di  $A$  se  $x_0$  non è nè un punto interno nè un punto esterno ad  $A$ .

L'insieme dei punti interni ad  $A$  è indicato con  $\overset{\circ}{A}$ ; l'insieme dei punti di frontiera di  $A$  è indicato con  $\partial A$ . Ovviamente,  $\partial A = \partial A^c$ .

**Osservazione 2.5** Notiamo che se  $x_0$  è un punto interno ad  $A$ , allora  $x_0 \in A$ , mentre se  $x_0$  è un punto esterno ad  $A$ , allora  $x_0 \in A^c$ . Invece, se  $x_0$  è un punto di frontiera di  $A$ , allora  $x_0$  può appartenere indifferentemente ad  $A$  oppure ad  $A^c$ .

### Esempi 2.6

- (i) Se  $A$  è un intervallo di  $\mathbf{R}$  di estremi  $a$  e  $b$ , allora  $\overset{\circ}{A} = ]a, b[$  e  $\partial A = \{a, b\}$ , indipendentemente dal fatto che  $a$  e  $b$  appartengano o no ad  $A$ .
- (ii) Sia  $A = \mathbf{R}^n$ ; allora  $\overset{\circ}{\mathbf{R}^n} = \mathbf{R}^n$  e  $\partial \mathbf{R}^n = \emptyset$ .

(iii) Sia  $A = \mathbf{Q}$ ; allora  $\overset{\circ}{\mathbf{Q}} = \emptyset$  e  $\partial\mathbf{Q} = \mathbf{R}$ .

(iv) Sia  $A = B_r(x_0)$  l'intorno sferico di  $x_0$  e raggio  $r$ , allora  $\overset{\circ}{B}_r(x_0) = B_r(x_0)$  e  $\partial B_r(x_0) = S_r(x_0)$ . In particolare,  $\overset{\circ}{S}_r(x_0) = \emptyset$ .

**Definizione 2.7 (Punti di accumulazione e punti isolati)** Siano  $A \subset \mathbf{R}^n$  e  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ . Si dice che  $x_0$  è un punto di accumulazione di  $A$  se, per ogni  $r > 0$ ,  $A \cap B_r(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ . L'insieme dei punti di accumulazione di un insieme  $A$  si chiama derivato di  $A$  e si indica con  $\mathcal{D}(A)$ .

Si dice che  $x_0$  è un punto isolato di  $A$  se esiste  $r > 0$  tale che  $A \cap B_r(x_0) = \{x_0\}$ .

**Osservazione 2.8** Se  $x_0$  è un punto di accumulazione di  $A$ , allora  $x_0$  può appartenere indifferentemente ad  $A$  o ad  $A^c$ ; invece, se  $x_0$  è un punto isolato di  $A$ , si ha necessariamente  $x_0 \in A$ .

Se  $x_0$  è un punto interno ad  $A$ , allora  $x_0$  è anche un punto di accumulazione di  $A$ . Ma non vale il viceversa. Infatti  $a$  è un punto di accumulazione di  $]a, b[$ , ma non è interno ad  $]a, b[$ .

### Esempi 2.9

1. Se  $A = \mathbf{Q}$ , allora  $\mathcal{D}(\mathbf{Q}) = \mathbf{R}$  e  $\mathbf{Q}$  non ha alcun punto isolato.
2. Se  $A = \mathbf{N}$ , allora  $\mathcal{D}(\mathbf{N}) = \emptyset$  e tutti gli elementi di  $\mathbf{N}$  sono punti isolati di  $\mathbf{N}$ .
3. Se  $A = B_r(x_0)$  è l'intorno sferico aperto di  $x_0$  e raggio  $r$ , allora  $\mathcal{D}(B_r(x_0)) = \bar{B}_r(x_0)$  e  $B_r(x_0)$  non ha alcun punto isolato.
4. Sia  $(a_n)_n$  una successione reale convergente al numero  $a$  che assume infiniti valori diversi, e sia  $A = \{x = a_n : n \in \mathbf{N}\}$  l'insieme dei valori della successione. Allora ogni  $a_n \neq a$  è un punto isolato di  $A$  e  $A$  ha un unico punto di accumulazione:  $a$ .

**Definizione 2.10 (Insiemi aperti e chiusi)** Sia  $A \subset \mathbf{R}^n$ . Si dice che  $A$  è (un insieme) aperto se ogni  $x \in A$  è un punto interno ad  $A$ , cioè se  $\overset{\circ}{A} = A$ . Si dice, invece, che  $A$  è (un insieme) chiuso se il suo complementare  $A^c$  è (un insieme) aperto.

### Esempi 2.11

1. Siano  $x_0 \in \mathbf{R}^n$  e  $r > 0$ . Allora  $B_r(x_0)$  è un insieme aperto. Infatti, per ogni  $x \in B_r(x_0)$  le palle aperte di centro  $x$  e raggio  $\varrho < r - \|x - x_0\|$  sono contenute in  $B_r(x_0)$ :

$$y \in B_\varrho(x) \Rightarrow \|y - x\| < \varrho \Rightarrow \|y - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| < r \Rightarrow y \in B_r(x_0)$$

Invece, ragionando in modo analogo sui complementari, vi verifica che  $\bar{B}_r(x_0)$  e  $S_r(x_0)$  sono insiemi chiusi.

2.  $\mathbf{Q}$  non è né chiuso né aperto.
3.  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{Z}$  sono chiusi.
4.  $\mathbf{R}^n$  e  $\emptyset$  sono gli unici sottoinsiemi di  $\mathbf{R}^n$  aperti e chiusi contemporaneamente.

Vediamo ora le principali proprietà degli aperti e dei chiusi. Data una famiglia  $\mathcal{A}$  di insiemi di  $\mathbf{R}^n$ , usiamo la seguente notazione:

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \in \mathbf{R}^n : \exists A \in \mathcal{A} \text{ tale che } x \in A\}$$

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \in \mathbf{R}^n : x \in A \ \forall A \in \mathcal{A}\}.$$

**Proposizione 2.12 (Proprietà degli aperti e dei chiusi)** 1. Se  $\mathcal{A}$  è una famiglia qualsiasi di insiemi aperti di  $\mathbf{R}^n$ , allora  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$  è ancora un insieme aperto. Se  $\mathcal{A}$  è una famiglia finita di insiemi aperti di  $\mathbf{R}^n$ , allora  $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$  è ancora un insieme aperto.

2. Se  $\mathcal{C}$  è una famiglia qualsiasi di insiemi chiusi di  $\mathbf{R}^n$ , allora  $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$  è ancora un insieme chiuso. Se  $\mathcal{C}$  è una famiglia finita di insiemi chiusi di  $\mathbf{R}^n$ , allora  $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$  è ancora un insieme chiuso.

### Esempi 2.13

1. Gli intervalli  $A = ]0, 1[$  e  $B = ]2, 3[$  sono insiemi aperti di  $\mathbf{R}$ . Allora  $]0, 1[ \cup ]2, 3[$  è ancora un insieme aperto di  $\mathbf{R}$ .
2. Gli insiemi  $\mathbf{N}$  e  $[0, 1]$  sono insiemi chiusi di  $\mathbf{R}$ . Allora  $\mathbf{N} \cup [0, 1]$  e  $\mathbf{N} \cap [0, 1]$  sono insiemi chiusi di  $\mathbf{R}$ .

Gli insiemi chiusi possono così caratterizzarsi:

**Teorema 2.14 (Caratterizzazione dei chiusi)** Sia  $C \subset \mathbf{R}^n$ . Allora:  $C$  è chiuso se, e solo se,  $\partial C \subset C$  se, e solo se,  $\mathcal{D}(C) \subset C$ .

**Definizione 2.15 (Chiusura, parte interna)** Sia  $A \subset \mathbf{R}^n$ .

Si dice chiusura di  $A$  e si indica con  $\bar{A}$  l'insieme  $A \cup \partial A$ .

Si dice parte interna di  $A$  l'insieme  $\overset{\circ}{A}$  dei punti interni ad  $A$ .

**Osservazione 2.16** Osserviamo che  $\bar{A}$  è un insieme chiuso, ed anzi è il più piccolo insieme chiuso contenente  $A$ . Invece,  $\overset{\circ}{A}$  è il più grande insieme aperto contenuto in  $A$ .

Inoltre, risulta:  $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \bar{A}$ ;  $\bar{A} = A \cup \partial A$ ;  $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ .

**Definizione 2.17 (Insiemi limitati)** Sia  $A \subset \mathbf{R}^n$ . Si dice che  $A$  è limitato se esiste  $r > 0$  tale che  $A \subset B_r(0)$ , cioè se esiste  $r > 0$  tale che  $\|x\| \leq r$  per ogni  $x \in A$ .

Osserviamo che, se  $A$  è un sottoinsieme di  $\mathbf{R}^n$  limitato, allora, per ogni  $i = 1, \dots, n$ ,  $A_i := \{p_i(x) \in \mathbf{R} : x \in A\}$  è un insieme limitato di  $\mathbf{R}$ . Vale anche il viceversa, cioè se  $A_i$  è limitato per ogni  $i = 1, \dots, n$ , allora  $A$  è limitato.

Una proprietà degli intervalli di  $\mathbf{R}$  è la *connessione*, che può esprimersi dicendo che  $I \subset \mathbf{R}$  è un intervallo se e solo se per ogni coppia di punti  $x, y \in I$  l'intervallo  $[x, y]$  è contenuto in  $I$ . Per generalizzare i risultati dipendenti da tale proprietà al caso di  $\mathbf{R}^n$ , iniziamo definendo i segmenti e le poligonali in  $\mathbf{R}^n$ .

**Definizione 2.18 (Segmenti e poligonali)** *Dati  $x, y \in \mathbf{R}^n$ , si dice segmento di estremi  $x$  ed  $y$  l'insieme*

$$[x, y] = \{ty + (1 - t)x : 0 \leq t \leq 1\} = \{x + t(y - x) : 0 \leq t \leq 1\};$$

*dati i punti  $x_0, x_1, \dots, x_k$ , si dice poligonale di vertici  $x_0, x_1, \dots, x_k$  (nell'ordine), l'unione dei segmenti  $[x_{i-1}, x_i]$ , per  $i = 1, \dots, k$ .*

Osserviamo che con gli stessi vertici si possono ottenere poligonali differenti mutandone l'ordine: perciò nella definizione precedente abbiamo sottolineato che la poligonale non è definita solo dai vertici, ma anche dall'ordine in cui vengono assegnati. Usando le poligonali, si può dare una nozione di connessione in  $\mathbf{R}^n$ .

**Definizione 2.19 (Insiemi connessi per poligonali)** *Un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbf{R}^n$  si dice connesso per poligonali se per ogni coppia di punti  $x, y \in A$  esiste una poligonale di vertici  $x = x_0, x_1, \dots, x_k = y$  tutta contenuta in  $A$ .*

### Esempi 2.20

1. Un insieme  $A \subset \mathbf{R}^n$  si dice *convesso* se per ogni coppia di punti  $x, y \in A$  il segmento  $[x, y]$  è contenuto in  $A$ . Ovviamente, ogni insieme convesso è connesso per poligonali. Per esempio, se  $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  è convessa (vedi ??) allora il suo *sopragrafico*  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in (a, b), y > f(x)\}$  è un insieme convesso di  $\mathbf{R}^2$ .
2. Un insieme  $A \subset \mathbf{R}^n$  si dice *stellato rispetto al punto*  $x_0 \in A$  se per ogni punto  $x \in A$  il segmento  $[x_0, x]$  è contenuto in  $A$ . Ogni insieme  $A$  che sia stellato rispetto ad un punto è connesso per poligonali: dati  $x, y \in A$ , la poligonale  $[x, x_0] \cup [x_0, y]$  è infatti sempre contenuta in  $A$ .
3. Si può dimostrare che ogni aperto  $A \subset \mathbf{R}^n$  (se non è connesso per poligonali) si può decomporre in un'unione disgiunta di sottoinsiemi aperti connessi per poligonali. Ciascuno di questi si dice *componente connessa* di  $A$ .

## 2.2 Successioni

Sia  $(x_h)_h$  una successione a valori in  $\mathbf{R}^n$ , cioè con  $x_h \in \mathbf{R}^n$  per ogni  $h \in \mathbf{N}$ . Allora:

**Definizione 2.21** *Si dice che la successione  $(x_h)_h$  è limitata se esiste  $r > 0$  tale che*

$$\forall h \in \mathbf{N} \quad \|x_h\| \leq r.$$

**Definizione 2.22** *Si dice che la successione  $(x_h)_h$  converge, o è convergente, ad un elemento  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ , e si scrive  $\lim_{h \rightarrow \infty} x_h = x_0$ , se:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu > 0 \text{ tale che } \forall h \in \mathbf{N} \quad h > \nu \implies \|x_h - x_0\| < \varepsilon.$$

Si può dimostrare che

**Proposizione 2.23** *Se  $(x_h)_h$  è una successione convergente di  $\mathbf{R}^n$ , allora  $(x_h)_h$  è limitata.*

**Proposizione 2.24** *Sia  $(x_h)_h$  una successione di  $\mathbf{R}^n$ . Supponiamo che  $x_h = (x_h^1, \dots, x_h^n)$  per ogni  $h \in \mathbf{N}$ . Sono equivalenti:*

- (i) *la successione vettoriale  $(x_h)_h$  è convergente ad  $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \in \mathbf{R}^n$*
- (ii) *per ogni  $i = 1, \dots, n$  la successione reale  $(x_h^i)_h$  converge ad  $x_0^i$ .*

**Osservazione 2.25** Dalla proposizione precedente segue subito che, come nel caso delle successioni reali, il limite di una successione convergente è unico.

**Esempio 2.26** 1. Sia  $x_h = (\frac{1}{h}, \frac{1+h}{h})$  per ogni  $h \in \mathbf{N}$ . Poichè  $(\frac{1}{h})_h$  e  $(\frac{1+h}{h})_h$  convergono ad 0 e a 1 rispettivamente, per la Proposizione 2.24 possiamo concludere che la successione data converge a  $(0, 1)$  in  $\mathbf{R}^2$ .

2. La successione  $(x_h)_h = (((-1)^h, \frac{1}{h}))_h$  è limitata, ma non convergente poichè  $((-1)^h)_h$  non è una successione regolare in  $\mathbf{R}$ . Quindi possiamo concludere che anche in  $\mathbf{R}^n$  la limitatezza della successione è solo una condizione necessaria, ma non sufficiente per la convergenza.

Come al solito (vedi ??), se  $(x_h)_h$  è una successione di  $\mathbf{R}^n$  ed  $(k_h)_h$  è una successione strettamente crescente di numeri naturali, la successione  $(x_{k_h})_h$  si dice successione estratta, o sottosuccessione, di  $(x_h)_h$ .

Osserviamo che, come nel caso reale, se  $(x_h)_h$  è una successione convergente di  $\mathbf{R}^n$ , il cui limite è  $x_0$ , allora ogni successione estratta di  $(x_h)_h$  converge allo stesso limite  $x_0$ . Ma esistono successioni non convergenti che ammettono estratte convergenti come  $(((-1)^h, 1))_h$ .

**Esempio 2.27** Sia  $(x_h)_h = ((\frac{1}{h}, 1, h))_h$  e sia  $(k_h)_h = (h^2)_h$ . Allora  $((\frac{1}{h^2}, 1, h^2))_h$  è una successione estratta di  $((\frac{1}{h}, 1, h))_h$ .

Con le successioni si possono caratterizzare gli insiemi chiusi.

**Proposizione 2.28** *L'insieme  $A \subset \mathbf{R}^n$  è chiuso se e solo se vale la seguente proprietà: se  $(x_h)_h$  è una successione convergente di punti di  $A$ , detto  $x$  il suo limite, risulta che  $x$  appartiene ad  $A$ .*

Introduciamo ora un'altra classe di insiemi particolarmente importante.

**Definizione 2.29 (Insiemi compatti)** *Sia  $K \subset \mathbf{R}^n$ . Si dice che  $K$  è un insieme compatto di  $\mathbf{R}^n$  se da ogni successione a valori in  $K$  si può estrarre una sottosuccessione convergente ad un elemento di  $K$ .*

Si può dimostrare che

**Teorema 2.30 (Compatti di  $\mathbf{R}^n$ )** *Sia  $K \subset \mathbf{R}^n$ . Allora  $K$  è compatto se, e solo se,  $K$  è chiuso e limitato.*

**Esempio 2.31** Sia  $K = \bar{B}_r(x_0)$ . Allora  $K$  è compatto perché è chiuso e limitato. Analogamente,  $K = S_r(x_0)$  è compatto perché è chiuso e limitato.

Sia  $K = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  un insieme finito di punti di  $\mathbf{R}^n$ . Allora  $K$  è compatto perché è chiuso e limitato.

## 2.3 Limiti e continuità delle funzioni

In questo paragrafo iniziamo lo studio sistematico delle funzioni  $f$  dipendenti da una variabile vettoriale  $x = (x_1, \dots, x_n)$  appartenente ad un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbf{R}^n$ , detto al solito *dominio di  $f$* . Spesso la funzione  $f$  sarà definita da un'espressione analitica formulata usando le usuali funzioni elementari. In questo caso, come per le funzioni di una variabile (vedi ??), diciamo *dominio naturale* dell'espressione analitica, o, più brevemente, della funzione  $f$ , il più grande sottoinsieme di punti  $x$  di  $\mathbf{R}^n$  in cui tutte le operazioni richieste per il calcolo del valore  $f(x)$  si possono eseguire.

**Definizione 2.32** *Sia  $A \subset \mathbf{R}^n$  e sia  $x_0 \in \mathbf{R}^n$  un punto di accumulazione di  $A$ . Sia  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione. Si dice che  $f$  tende ad  $\ell \in \mathbf{R}$  per  $x$  che tende a  $x_0$ , e si scrive  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ , se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in A, \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta : |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

*Si dice che  $f$  tende ad  $-\infty$  per  $x$  che tende a  $x_0$ , e si scrive  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , se*

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in A, \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta : f(x) < -M.$$

Se  $A$  è illimitato, si può definire anche il limite di  $f$  all'infinito, ponendo

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

(con  $\ell$  reale) se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $R > 0$  tale che per ogni  $x \in A$  con  $\|x\| > R$  risulta  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ . Se  $\ell = \pm\infty$  si dà l'analogia definizione, con le modifiche ovvie.

Osserviamo che per  $n = 1$  la definizione data concorda con quella già nota per le funzioni reali di variabile reale. E in particolare, continuano a valere le stesse proprietà come:

**Teorema 2.33 (Proprietà dei limiti)** *Sia  $A \subset \mathbf{R}^n$  e sia  $x_0 \in \mathbf{R}^n$  un punto di accumulazione di  $A$ . Sia  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione tale che esiste  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ . Allora*

1. **[Unicità]** *Il limite è unico.*
2. **[Permanenza del segno]** *Se  $\ell > 0$ , allora esiste  $r > 0$  tale che, per ogni  $x \in A \cap B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ ,  $f(x) > 0$ .*
3. **[Confronto]** *Se esiste  $r > 0$  tale che per ogni  $x \in A \cap B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$  risulti  $f(x) > 0$ , allora  $\ell \geq 0$ .*
4. **[Caratterizzazione dei limiti con successioni]** *Sono equivalenti:*

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

$$(b) \quad (x_h)_h \subset A \setminus \{x_0\}, x_h \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_h) \rightarrow \ell.$$

Anche per le operazioni sui limiti valgono risultati analoghi a quelli visti per le funzioni di una variabile reale.

**Teorema 2.34** *Sia  $A \subset \mathbf{R}^n$  e sia  $x_0 \in \mathbf{R}^n$  un punto di accumulazione di  $A$ . Siano  $f, g : A \rightarrow \mathbf{R}$  due funzioni tali che*

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbf{R}, \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \in \mathbf{R}.$$

Allora

1.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \ell + m;$
2.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell \cdot m;$
3.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$ , purché  $m \neq 0$ .

*Questi risultati si estendono al caso in cui  $\ell$  o  $m$  siano  $\pm\infty$ , purché le operazioni indicate non diano luogo a forme indeterminate.*

**Osservazione 2.35** Notiamo che l'esistenza del limite nella Definizione 2.32 è una condizione più forte dell'esistenza dei limiti delle restrizioni di  $f$  anche a *tutte* le rette passanti per  $x_0$ . In altri termini, se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  allora per ogni  $v \in \mathbf{R}^n$ ,  $v \neq 0$  fissato, risulta  $\lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + tv) = \ell$ . Viceversa, può accadere che  $\lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + tv) = \ell$  per ogni  $v \neq 0$ , ma non esiste  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . Per esempio, sia  $n = 2$  e  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ . Allora, fissato  $v = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$  risulta:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(tv_1, tv_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^4 v_1^4 + t^2 v_2^2} = 0,$$

per ogni  $v$ , mentre  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  non esiste. Infatti, considerando la restrizione di  $f$  alla *curva* di equazione  $y = x^2$ , cioè ponendo  $y = x^2$ , si ha che il

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2},$$

e quindi  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  non esiste.

Definiamo ora le funzioni continue in più variabili reali.

**Definizione 2.36** Sia  $A \subset \mathbf{R}^n$ . Sia  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione e sia  $x_0 \in A$ . Si dice che  $f$  è continua in  $x_0$  se  $x_0$  è un punto isolato di  $A$  oppure

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

o equivalentemente, se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che } \forall x \in A, \quad \|x - x_0\| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Inoltre, si dice che  $f$  è continua in  $A$  se essa è continua in ogni punto di  $A$ .

**Osservazione 2.37** È immediato dare le definizioni di limite e continuità per funzioni a valori vettoriali. Se  $f : A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$  ed  $x_0$  è di accumulazione per  $A$  allora

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbf{R}^k &\iff \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che } \forall x \in A, \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta : \|f(x) - \ell\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

dove  $\|\cdot\|$  indica la norma euclidea sia in  $\mathbf{R}^n$  che in  $\mathbf{R}^k$ . Ovviamente, se  $x_0 \in A$  allora  $f$  è continua in  $x_0$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Come per le successioni vale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell = (\ell_1, \dots, \ell_k) \in \mathbf{R}^k \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f_j(x) = \ell_j \quad \forall j = 1, \dots, k,$$

doe  $f_j$  sono le componenti di  $f$ .

La definizione di funzione continua in  $A$  è stata data in modo puntuale, cioè sulla base del comportamento della funzione nei singoli punti; si può dare una utile caratterizzazione della continuità in  $A$  in termini globali come segue.

**Proposizione 2.38** *Sia  $A \subset \mathbf{R}^n$  ed  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^k$ . Se  $A$  è aperto,  $f$  è continua in  $A$  se e solo se  $f^{-1}(B)$  è un aperto di  $\mathbf{R}^n$  per ogni aperto  $B$  di  $\mathbf{R}^k$ ; se  $A$  è chiuso,  $f$  è continua in  $A$  se e solo se  $f^{-1}(C)$  è un chiuso di  $\mathbf{R}^n$  per ogni chiuso  $C$  di  $\mathbf{R}^k$ . In particolare, se  $A = \mathbf{R}^n$  allora entrambe le caratterizzazioni della continuità sono valide.*

Per il Teorema 2.34 possiamo affermare che somme e prodotti di funzioni continue sono ancora funzioni continue.

Riformuliamo ora alcuni concetti già esposti nella Parte I.

**Definizione 2.39** *Sia  $A \subset \mathbf{R}^n$  e sia  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione. Si dice che  $f$  è limitata superiormente in  $A$  se esiste  $L \in \mathbf{R}$  tale che  $f(x) \leq L$  per ogni  $x \in A$  (in tal caso,  $L$  è detto maggiorante di  $f$  in  $A$ ). Si dice che  $f$  è limitata inferiormente in  $A$  se esiste  $H \in \mathbf{R}$  tale che  $f(x) \geq H$  per ogni  $x \in A$  (in tal caso,  $H$  è detto minorante di  $f$  in  $A$ ). Infine  $f$  si dice limitata in  $A$  se esistono  $L, H \in \mathbf{R}$  tali che  $H \leq f(x) \leq L$  per ogni  $x \in A$ , o equivalentemente, esiste  $M > 0$  tale che  $|f(x)| \leq M$  per ogni  $x \in A$ .*

In analogia al caso delle funzioni reali di variabile reale (vedi Paragrafo ??), se  $f$  è limitata superiormente in  $A$ , si definisce estremo superiore di  $f$  in  $A$ , e si indica con  $\sup_{x \in A} f(x)$  o con  $\sup_A f$ , il minimo dei maggioranti di  $f$  in  $A$ . In particolare, risulta:

$$\sup_A f = \sup\{f(x) : x \in A\}.$$

Se  $f$  è limitata inferiormente, si definisce estremo inferiore di  $f$  in  $A$ , e si indica con  $\inf_{x \in A} f(x)$  o con  $\inf_A f$ , il massimo dei minoranti di  $f$  in  $A$ . In particolare, risulta:

$$\inf_A f = \inf\{f(x) : x \in A\}.$$

**Definizione 2.40** *Sia  $f$  una funzione definita in  $A \subset \mathbf{R}^n$  e ivi limitata superiormente. Se esiste  $x_1 \in A$  tale che  $f(x_1) = \sup_A f$ , e quindi  $f(x) \leq f(x_1)$  per ogni  $x \in A$ , si dice che  $f(x_1)$  è il massimo di  $f$  in  $A$ , o che  $f$  è dotata di massimo in  $A$ , e si scrive  $\max_A f = f(x_1)$ .*

*Sia  $f$  limitata inferiormente in  $A$ . Se esiste  $x_2 \in A$  tale che  $f(x_2) = \inf_A f$ , e quindi  $f(x) \geq f(x_2)$  per ogni  $x \in A$ , si dice che  $f(x_2)$  è il minimo di  $f$  in  $A$ , o che  $f$  è dotata di minimo in  $A$ , e si scrive  $\min_A f = f(x_2)$ .*

Risulta che:

**Teorema 2.41 (Weierstrass)** *Sia  $K$  un sottoinsieme compatto di  $\mathbf{R}^n$  e sia  $f$  una funzione definita e continua in  $K$ . Allora  $f$  è dotata di massimo e di minimo in  $K$ .*

Il seguente risultato estende al caso di funzioni di più variabili il Teorema ??.

**Teorema 2.42 (dei valori intermedi)** *Se  $A \subset \mathbf{R}^n$  è connesso per poligonalità ed  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  è continua in  $A$ , allora  $f(A)$  è un intervallo, cioè, per ogni numero reale  $y$  compreso tra  $\inf_A f$  e  $\sup_A f$  esiste  $x \in A$  tale che  $f(x) = y$ .*

Si può dare come nel caso di una variabile una nozione più forte di continuità.

**Definizione 2.43 (Uniforme continuità)** *Sia  $A \subset \mathbf{R}^n$  ed  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ ; si dice che  $f$  è uniformemente continua in  $A$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $x, y \in A$ ,  $\|x - y\| < \delta$  implica  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .*

Vale anche per le funzioni di più variabili il seguente risultato (vedi ??).

**Teorema 2.44 (Cantor)** *Sia  $K \subset \mathbf{R}^n$  un insieme compatto, ed  $f : K \rightarrow \mathbf{R}$  continua in  $K$ ; allora  $f$  è uniformemente continua in  $K$ .*

## 2.4 Funzioni vettoriali di una variabile

Se  $\varphi$  è una funzione definita in un intervallo  $(a, b) \subset \mathbf{R}$  a valori in  $\mathbf{R}^n$ , possiamo esprimerla attraverso le sue componenti  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , che sono funzioni reali. In analogia alla definizione di limite di una successione in  $\mathbf{R}^n$ , la funzione  $\varphi$  è continua in  $t_0 \in (a, b)$  se  $\varphi(t) \rightarrow \varphi(t_0)$  per  $t \rightarrow t_0$ , cioè, equivalentemente, se le componenti  $\varphi_i$  di  $\varphi$  sono continue in  $t_0$ . Inoltre, allo stesso modo, diciamo che  $\varphi$  è derivabile in  $t_0$  se esiste il limite

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0},$$

che si denoterà  $\varphi'(t_0)$ . Come prima, questo equivale a richiedere che le componenti  $\varphi_i$  siano derivabili in  $t_0$ ; in tal caso, risulta  $\varphi'(t_0) = (\varphi'_1(t_0), \dots, \varphi'_n(t_0))$ . Il discorso si può naturalmente estendere alle derivate di ordine superiore. Analogamente, diciamo che  $\varphi$  è integrabile in  $(a, b)$  se le sue componenti lo sono, e poniamo

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \left( \int_a^b \varphi_1(t) dt, \dots, \int_a^b \varphi_n(t) dt \right).$$

Osserviamo che tanto  $\varphi'(t_0)$  e  $\int_a^b \varphi(t) dt$ , quando esistono, sono vettori di  $\mathbf{R}^n$ , così come i valori di  $\varphi$ , e che vale la disuguaglianza, analoga alla (??):

$$\left\| \int_a^b \varphi(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\varphi(t)\| dt.$$

Inoltre, ragionando componente per componente si ricava la seguente formulazione vettoriale del Teorema fondamentale del calcolo ?? per le funzioni vettoriali.

**Teorema 2.45** *Se  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  è continua, allora la funzione*

$$\psi(t) = \int_a^t \varphi(s) ds, \quad t \in [a, b],$$

*è derivabile in  $[a, b]$ , e risulta  $\psi'(t) = \varphi(t)$  per ogni  $t \in [a, b]$ .*

**Osservazione 2.46** Concludiamo questo paragrafo segnalando che è possibile considerare successioni  $(u_k)$  e serie di funzioni  $\sum_k u_k$  a valori vettoriali, cioè con  $u_k : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Valgono tutte le considerazioni presentate nel Capitolo 1, sia per quanto riguarda la terminologia e le definizioni, che per quanto riguarda i risultati. Le uniche varianti, per altro puramente formali, sono le seguenti: nella Definizione 1.12.2, la serie  $\sum_k |u_k(x)|$  va sostituita con la serie  $\sum_k \|u_k(x)\|$ , e nel criterio di Weierstrass la condizione  $|u_k(x)| \leq M_k$  va sostituita con la  $\|u_k(x)\| \leq M_k$ .

## CAPITOLO 3

# CALCOLO DIFFERENZIALE IN PIÙ VARIABILI

In questo capitolo estendiamo al caso di funzioni definite in sottoinsiemi di  $\mathbf{R}^n$ , per  $n \geq 2$ , le nozioni ed i metodi del calcolo differenziale visti nella Parte I per le funzioni di una sola variabile reale. Incontreremo, oltre a complicazioni tecniche, problemi e fenomeni nuovi che richiederanno l'introduzione di nuove idee e strumenti. Discutiamo prima il caso di funzioni a valori reali, poi quello di funzioni a valori vettoriali.

### 3.1 Derivate parziali e differenziabilità

La prima nozione che vogliamo estendere al caso di funzioni di più variabili reali è quella di derivata. Iniziamo dalla nozione di derivata direzionale, che è certamente l'estensione più spontanea della definizione di derivata al caso  $n$ -dimensionale. Purtroppo, con questa sola definizione, neanche le prime proprietà delle funzioni derivabili di una sola variabile reale si estendono al caso  $n$ -dimensionale.

**Definizione 3.1** Sia  $A \subset \mathbf{R}^n$  aperto,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x_0 \in A$  e  $v \in \mathbf{R}^n$  tale che  $\|v\| = 1$ . Diciamo che  $f$  ammette derivata direzionale in  $x_0$  lungo la direzione  $v$  se esiste finito il limite

$$(3.1.1) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}.$$

Se tale limite esiste si denota  $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$  o  $D_v f(x_0)$ . Le derivate direzionali di  $f$  in  $x_0$  rispetto alle direzioni  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , degli assi coordinati si dicono derivate parziali di  $f$  in  $x_0$  e si denotano (quando esistono) in uno dei modi seguenti:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), \quad D_i f(x_0), \quad D_{x_i} f(x_0).$$

**Esempio 3.2** L'esistenza delle derivate direzionali di  $f$  in  $x_0$ , anche lungo tutte le direzioni  $v$  non assicura la continuità di  $f$  in  $x_0$ . Consideriamo infatti la funzione  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  data da

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \geq x^2 \text{ o } y \leq 0, \\ 1 & \text{se } 0 < y < x^2; \end{cases}$$

$f$  ammette tutte le derivate direzionali in  $(0, 0)$ , esse valgono 0, ma ovviamente  $f$  non è continua nell'origine.

Se si analizza in dettaglio l'esempio precedente, si vede che l'esistenza delle derivate direzionali, che risultano nulle, si può formalizzare così:

$$\forall v = (v_1, v_2), \|v\| = 1, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } |t| < \delta \quad \implies \quad \frac{|f(tv_1, tv_2)|}{|t|} < \varepsilon,$$

dove evidentemente  $\delta$  dipende sia da  $\varepsilon$  che da  $v$ . Per ottenere una procedura di derivazione che assicuri proprietà più forti alle funzioni derivabili introduciamo la seguente definizione.

**Definizione 3.3** *Sia  $A \subset \mathbf{R}^n$  aperto,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x_0 \in A$ . Diciamo che  $f$  è differenziabile in  $x_0$  se esiste un'applicazione lineare  $L : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  tale che*

$$(3.1.2) \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Lh}{\|h\|} = 0.$$

Se  $f$  è differenziabile in  $x_0$  allora l'applicazione  $L$  si dice differenziale di  $f$  in  $x_0$ .

### Osservazione 3.4 (Proprietà delle funzioni differenziabili)

1. Possiamo esplicitare la richiesta nella definizione precedente come abbiamo fatto per le derivate direzionali per confrontare le due nozioni; otteniamo che deve esistere un'applicazione lineare  $L$  tale che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } |t| < \delta \quad \implies \quad \frac{|f(x_0 + tv) - f(x_0) - tLv|}{|t|} < \varepsilon \quad \forall \|v\| = 1,$$

dove stavolta si vede che  $\delta$  dipende da  $\varepsilon$  ma può essere scelto indipendente dalla direzione  $v$ .

2. Se una funzione  $f$  è differenziabile in  $x_0$  allora il suo differenziale è unico. Infatti, se per assurdo ce ne fossero due distinti, chiamiamoli  $L$  ed  $L'$ , esisterebbe un  $v \neq 0$ , che possiamo supporre di norma unitaria, tale che  $Lv \neq L'v$ , così che si avrebbe

$$\begin{aligned} 0 &\neq L'v - Lv = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L'(tv) - L(tv)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - L(tv)}{t} - \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - L'(tv)}{t} = 0. \end{aligned}$$

3. La differenziabilità di  $f$  in  $x_0$  implica la continuità di  $f$  nello stesso punto; infatti, la relazione (3.1.2) si può scrivere

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Lh + o(\|h\|),$$

da cui segue che  $f(x_0 + h) - f(x_0) \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$ .

4. La differenziabilità di  $f$  in  $x_0$  implica l'esistenza di tutte le derivate direzionali di  $f$  nello stesso punto, ed anche l'eguaglianza  $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = Lv$  da cui segue la linearità dell'applicazione  $v \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ . Infatti,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - Lv \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + tv) - f(x_0) - L(tv)|}{\|tv\|} = 0.$$

5. Come si è visto nel corso di Geometria ed algebra, all'applicazione lineare  $L$  della Definizione 3.3 è univocamente associato un vettore  $\nabla f(x_0)$  di  $\mathbf{R}^n$  in modo tale che  $Lv = \nabla f(x_0) \cdot v$ , sicché si ha la formula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v = \sum_{i=1}^n v_i (\nabla f(x_0))_i$$

per ogni vettore  $v \in \mathbf{R}^n$ . Scegliendo  $v = e_i$  segue che le componenti di  $\nabla f(x_0)$  sono le derivate parziali di  $f$  in  $x_0$ , cioè:

$$\nabla f(x_0) = (D_1 f(x_0), \dots, D_n f(x_0)).$$

**Definizione 3.5** *Il vettore  $\nabla f(x_0)$  associato all'applicazione lineare  $L$  nella Definizione 3.3 si dice gradiente di  $f$  in  $x_0$ .*

Se  $f$  ammette derivate parziali in tutto un insieme aperto, per esempio  $A$  stesso, ci si può domandare se, al variare del punto  $x$  in  $A$ , le derivate parziali siano continue. Si dice che  $f$  è di classe  $C^1(A)$  se ciò accade per tutte le derivate parziali prime  $D_1 f, \dots, D_n f$  in  $A$ . Vale allora il seguente importante risultato, che è il principale strumento per verificare la differenziabilità di una funzione.

**Teorema 3.6 (Teorema del differenziale)** *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbf{R}^n$ , sia  $x_0 \in A$ , e sia  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ ; se le derivate parziali di  $f$  esistono in un intorno di  $x_0$  e sono continue in  $x_0$  allora  $f$  è differenziabile in  $x_0$ . Inoltre, se  $f$  è di classe  $C^1(A)$  allora è differenziabile in tutti i punti di  $A$ .*

DIM. Supponiamo per semplicità di notazione  $n = 2$ , e denotiamo le variabili con  $(x, y)$  e gli incrementi con  $(h, k)$ . Allora, la relazione da provare è:

$$\lim_{\sqrt{h^2+k^2} \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - [D_x f(x_0, y_0)h + D_y f(x_0, y_0)k]}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Scrivendo

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)] + [f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)],$$

si può applicare il teorema di Lagrange (vedi ??) alle funzioni

$$x \mapsto f(x, y_0 + k), \quad y \mapsto f(x_0, y),$$

(definite rispettivamente negli intervalli di estremi  $x_0, x_0 + h$  ed  $y_0, y_0 + k$ ), ottenendo

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) &= D_x f(\xi, y_0 + k)h, \\ f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= D_y f(x_0, \eta)k, \end{aligned}$$

dove  $\xi$  ed  $\eta$  sono due opportuni punti dei suddetti intervalli. Ne segue

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{\sqrt{h^2+k^2} \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - [D_x f(x_0, y_0)h + D_y(x_0, y_0)k]}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \\ &= \left| \lim_{\sqrt{h^2+k^2} \rightarrow 0} \frac{[D_x f(\xi, y_0 + k)h + D_y f(x_0, \eta)k] - [D_x f(x_0, y_0)h + D_y(x_0, y_0)k]}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \\ &\leq \lim_{\sqrt{h^2+k^2} \rightarrow 0} \left| [D_x f(\xi, y_0 + k) - D_x f(x_0, y_0)] \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \\ &\quad + \left| [D_y f(x_0, \eta) - D_y(x_0, y_0)] \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \end{aligned}$$

e l'ultimo limite è nullo perché, per  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ ,  $\xi$  tende ad  $x_0$ ,  $\eta$  tende a  $y_0$ , i rapporti  $\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$  e  $\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$  sono compresi tra 0 e 1, e i termini in parentesi quadre tendono a zero per la continuità delle derivate prime di  $f$  in  $(x_0, y_0)$ . □

Un primo risultato che estende una formula già vista nel caso delle funzioni di una variabile (vedi ??) è il seguente.

**Teorema 3.7 (Differenziale della funzione composta)** *Siano  $I \subset \mathbf{R}$  un intervallo,  $A \subset \mathbf{R}^n$  aperto, e siano  $\varphi : I \rightarrow A$  derivabile in  $I$ ,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  di classe  $C^1(A)$ . Allora, la funzione composta  $g = f \circ \varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$  è derivabile, e per ogni  $t \in I$  risulta:*

$$g'(t) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t)) \varphi'_i(t),$$

dove  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  sono le componenti di  $\varphi$ .

Come nel caso di una variabile, si ha la seguente conseguenza.

**Teorema 3.8** *Se  $f$  ammette derivate parziali in  $A$ , con  $A \subset \mathbf{R}^n$  aperto connesso per poligonalità, e  $\nabla f(x) = 0$  per ogni  $x \in A$ , allora  $f$  è costante in  $A$ .*

**DIM.** Dati  $x, y \in A$ , basta provare che  $f(x) = f(y)$ . Per l'arbitrarietà di  $x, y$  la funzione  $f$  risulterà costante. Per ipotesi, esiste una poligonale  $P$  di vertici  $x = x_0, x_1, \dots, x_k = y$  tutta contenuta in  $A$ . Per  $i$  fissato tra 1 e  $k$ , consideriamo la funzione  $g(t) = f(x_{i-1} + t(x_i - x_{i-1}))$ . Dal Teorema 3.7 segue  $g'(t) = \nabla f(x_{i-1} + t(x_i - x_{i-1})) \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0$  e quindi  $f(x_{i-1}) = g(0) = g(1) = f(x_i)$ . Applicando questo argomento per ogni  $i$  si ricava che  $f$  è costante su  $P$  ed in particolare  $f(x) = f(y)$ . □

Nel Capitolo ?? si è visto come si possa dedurre l'andamento del grafico di una funzione derivabile studiandone le derivate, quando  $n = 1$ , caso in cui il grafico è una

curva nel piano. Per  $n = 2$  il grafico di una funzione reale è una superficie, e questo rende ovviamente più complicato lo studio (e il disegno!). Per  $n \geq 3$  il disegno del grafico diventa impossibile, e ci si deve accontentare di informazioni analitiche o di illustrazioni che non riproducono il grafico interamente, ma rappresentano solo alcune delle sue proprietà geometriche. Ci limitiamo ad una discussione del caso  $n = 2$ , riservandoci di segnalare alla fine qualche estensione al caso generale.

Sia  $f : A \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  di classe  $C^1$ , sia  $x_0 \in A$ , e, fissato  $v \in \mathbf{R}^2$  con  $\|v\| = 1$ , consideriamo la retta  $r$  per  $x_0$  di direzione  $v$ , descritta parametricamente dall'equazione  $x = x_0 + tv$ , per  $t \in \mathbf{R}$ . Possiamo allora considerare la restrizione di  $f$  all'insieme  $r \cap A \subset \mathbf{R}$ . In particolare, possiamo considerare la funzione  $f_v(t) = f(x_0 + tv)$  per  $t$  in un opportuno intorno dell'origine  $I_v \subset \mathbf{R}$ . Identificando ogni punto  $t$  di  $I_v$  con il punto  $x = x_0 + tv$ , il suo grafico

$$G(f_v) = \{(t, y) \in \mathbf{R}^2 : y = f_v(t), t \in I_v\},$$

è la curva intersezione del grafico di  $f$

$$(3.1.3) \quad G(f) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^3 : y = f(x), x \in A\}$$

con il piano verticale che interseca il piano  $(x_1, x_2)$  nella retta  $r$ . Siccome  $f_v \in C^1(I_v)$ , possiamo scrivere l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto di coordinate  $t = 0, y = f_v(0) = f(x_0)$  usando il teorema della derivazione della funzione composta, e otteniamo la formula (vedi ??)

$$y = f_v(0) + f'_v(0)t = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)t = f(x_0) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)v_i t.$$

Questa retta si dice *retta tangente al grafico di  $f$  nella direzione  $v$* . Teniamo ora fisso il punto  $x_0$  e lasciamo variare  $v$ : questo equivale, nella formula precedente, a considerare due parametri indipendenti  $v_1 t$  e  $v_2 t$ . È naturale chiamarli  $u, v$ , ottenendo l'equazione parametrica di un piano, che chiamiamo *piano tangente al grafico di  $f$* :

$$y = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)u + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)v = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (u, v).$$

Eliminando i parametri  $u = x_1 - x_{01}, v = x_2 - x_{02}$  si perviene all'equazione cartesiana

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)(x_1 - x_{01}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)(x_2 - x_{02}) - y + f(x_0) = 0,$$

ove si riconoscono i *coefficienti di giacitura*, determinati come sempre a meno del segno,  $-D_1 f(x_0), -D_2 f(x_0), 1$ . Il vettore  $(-D_1 f(x_0), -D_2 f(x_0), 1)$  è quindi perpendicolare al piano tangente.

A questo punto, è facile generalizzare tutto il discorso al caso di un numero arbitrario di variabili indipendenti. Se  $A \subset \mathbf{R}^n$  ed  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ , introducendo coordinate cartesiane

$(x_1, \dots, x_n, y)$  in  $\mathbf{R}^{n+1}$ , la (3.1.3) definisce ancora il grafico di  $f$  (con  $\mathbf{R}^{n+1}$  al posto di  $\mathbf{R}^3$ ). Se  $f$  è di classe  $C^1$  in  $A$ , e  $x_0$  è un punto di  $A$ , diciamo ancora *piano tangente al grafico di  $f$*  il sottospazio affine  $n$ -dimensionale di  $\mathbf{R}^{n+1}$  di equazione cartesiana

$$y = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Il versore

$$\nu = \frac{(-\nabla f(x_0), 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f(x_0)\|^2}}$$

è perpendicolare al piano tangente, ed è scelto in modo da avere componente positiva lungo l'asse verticale  $y$ .

Un'altra nozione utile a descrivere l'andamento di una funzione è quella di *insieme di livello*. Data al solito  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ , e dato  $c \in \mathbf{R}$ , si dice *insieme di livello  $c$  di  $f$*  l'insieme  $E_c = \{x \in A : f(x) = c\}$ . Se  $n = 2$  si parla di *curva di livello* e, se  $n = 3$  di *superficie di livello*. Intuitivamente, questa terminologia è giustificata dal fatto che l'insieme ove  $f$  è costante ci si aspetta sia "sottile" rispetto all'ambiente. In Fisica si parla anche di *superficie equipotenziali*, perché, se  $f$  è un campo scalare che esprime il potenziale associato ad un'interazione (per esempio, gravitazionale od elettrica), gli insiemi di livello sono quelli su cui il potenziale è costante. In tal caso, il gradiente di  $f$  esprime il *campo di forze* indotto dal potenziale, ed ha la direzione dell'accelerazione indotta su una particella soggetta alla forza dovuta al campo  $f$ . Le curve dello spazio che in ogni punto  $x$  hanno per retta tangente quella di direzione  $\nabla f(x)$  si dicono *linee di flusso* e sono, in ogni punto, ortogonali alla superficie equipotenziale che passa per quel punto. Questa proprietà si può formalizzare come segue.

**Teorema 3.9** *Siano  $A \subset \mathbf{R}^n$  aperto, ed  $f \in C^1(A)$ . Se  $x_0 \in E_c$ ,  $\nabla f(x_0) \neq 0$  e  $\varphi : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbf{R}^n$  è di classe  $C^1$  e tale che  $\varphi(0) = x_0$ ,  $\varphi(t) \in E_c$  per ogni  $t \in (-\delta, \delta)$ , allora  $\nabla f(x_0) \cdot \varphi'(0) = 0$ .*

DIM. La funzione  $g : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbf{R}$  definita da  $g(t) = f(\varphi(t))$  è costante e vale  $c$ , sicché  $g'(t) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0$  per ogni  $t$ . Per  $t = 0$  si ha la tesi. QED

Se  $f$  ammette derivate parziali non solo in un punto, ma in tutto un insieme aperto, per esempio  $A$  stesso, come nel caso di una variabile ci si può porre il problema dell'esistenza delle derivate parziali iterate (derivate successive, o di ordine superiore).

**Definizione 3.10** *Siano  $A \subset \mathbf{R}^n$  aperto, ed  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ ; se esiste in  $A$  la derivata parziale  $D_i f$ , si dice che  $f$  ammette derivata parziale seconda rispetto ad  $x_j$  ed  $x_i$  se esiste la derivata parziale di  $D_i f$  rispetto ad  $x_j$ , che in questo caso si denota  $D_{ji} f$ . In particolare, data  $f$  di classe  $C^1(A)$ , si dice che è di classe  $C^2(A)$  se esistono tutte le derivate parziali seconde di  $f$  e sono continue in  $A$ .*

*Iterando, si definisce la derivata parziale di ordine  $k$  di  $f$  rispetto ad  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$  (nell'ordine), essendo  $i_1, \dots, i_k$  indici (anche ripetuti) in  $\{1, \dots, n\}$ , la derivata parziale rispetto ad  $x_{i_k}$  della  $D_{i_1 \dots i_{k-1}} f$ . Si dice che  $f$  è di classe  $C^k(A)$  se le sue derivate parziali esistono e sono continue in  $A$  fino all'ordine  $k$ .*

*Infine, si dice che  $f$  è di classe  $C^\infty(A)$  se ammette derivate parziali di ogni ordine.*

Notiamo che per  $f \in C^1(A)$  le sue derivate parziali prime sono  $n$  e costituiscono un vettore (il gradiente), mentre le derivate seconde sono  $n^2$ , le terze  $n^3$ , eccetera. Le derivate seconde  $D_{ij}f$  formano una matrice che è detta *matrice hessiana* di  $f$  ed è denotata  $D^2f$ .

Malgrado nella precedente definizione l'ordine in cui si eseguono le derivate sia essenziale per definire le derivate di ordine superiore, in molti casi il risultato dipende solo dalle variabili rispetto alle quali si deriva, e non dall'ordine delle operazioni.

**Teorema 3.11 (Teorema di Schwarz)** *Se  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  ammette derivate parziali seconde  $D_{ij}f$  e  $D_{ji}f$  in un intorno di  $x_0 \in A$ , ed esse sono continue in  $x_0$ , allora  $D_{ij}f(x_0) = D_{ji}f(x_0)$ . Di conseguenza, se  $f \in C^2(A)$  allora  $D_{ij}f(x) = D_{ji}f(x)$  per ogni  $x \in A$  e per ogni  $i, j = 1, \dots, n$ .*

Si può riformulare l'ultima affermazione del precedente teorema dicendo che se  $f \in C^2(A)$  allora  $D^2f$  è una matrice simmetrica, cioè tale che  $(D^2f)_{ij} = D_{ij}f = D_{ji}f = (D^2f)_{ji}$ .

**Osservazione 3.12** L'enunciato del Teorema di Schwarz si può naturalmente generalizzare alle derivate parziali di ordine superiore al secondo. Se  $f \in C^k(A)$  allora tutte le sue derivate parziali, fino all'ordine  $k$ , dipendono solo dalle variabili coinvolte, e non dall'ordine in cui esse si considerano, e, se  $f \in C^\infty(A)$ , ciò vale per tutte le derivate parziali.

Come nel caso di una variabile, per ogni  $x_0 \in A$  si può associare ad una funzione di classe  $C^k(A)$  un polinomio di grado  $k$  tale che le sue derivate parziali in  $x_0$  coincidano con quelle di  $f$  fino all'ordine  $k$  (polinomio di Taylor). Ci limitiamo a trattare il caso del secondo ordine.

**Teorema 3.13 (Formula di Taylor del secondo ordine in più variabili)** *Sia  $A \subset \mathbf{R}^n$  aperto ed  $f \in C^2(A)$ . Se  $x_0 \in A$  ed  $h$  è tale che tutto il segmento  $[x_0, x_0 + h]$  sia contenuto in  $A$ , allora*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)h_i h_j + o(\|h\|^2),$$

*o, in forma vettoriale:*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} D^2 f(x_0) h \cdot h + o(\|h\|^2).$$

La formula di Taylor del secondo ordine è lo strumento essenziale per studiare gli estremi relativi delle funzioni di più variabili che è l'argomento del paragrafo seguente.

## 3.2 Forme quadratiche ed estremi relativi

Per affrontare il problema della ricerca dei punti in cui una funzione assume valori di massimo o minimo relativo ricorriamo alla classificazione delle forme quadratiche in base alla loro *segnatura*. Come si è visto nel corso di Geometria ed Algebra (vedi Cap. 5 degli appunti del corso) alla matrice hessiana di una  $f$  di classe  $C^2$ , fissato il punto  $x_0$ , è associata la *forma quadratica simmetrica*

$$(3.2.4) \quad D^2f(x_0)h \cdot h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)h_i h_j \quad h \in \mathbf{R}^n.$$

Presentiamo ora la classificazione delle forme quadratiche in base alla segnatura; useremo questa classificazione per la forma quadratica associata alla matrice hessiana nel Teorema 3.21.

**Definizione 3.14 (Classificazione delle forme quadratiche)** *Sia  $A = (a_{ij})$  una matrice reale quadrata simmetrica di dimensione  $n$ , e  $\beta$  la forma quadratica ad essa associata. Diciamo che  $A$  ( $\alpha$ , equivalentemente,  $\beta$ ) è:*

$$\begin{array}{ll} \text{semidefinita positiva} & \iff Ah \cdot h \geq 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n \\ \text{semidefinita negativa} & \iff Ah \cdot h \leq 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n \\ \text{definita positiva} & \iff Ah \cdot h > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \\ \text{definita negativa} & \iff Ah \cdot h < 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \\ \text{indefinita in tutti gli altri casi.} & \end{array}$$

Notiamo che  $A$  è indefinita se e solo se esistono  $h_1, h_2 \in \mathbf{R}^n$  tali che  $Ah_1 \cdot h_1 > 0$ ,  $Ah_2 \cdot h_2 < 0$ . L'applicabilità concreta delle nozioni su esposte dipende evidentemente dalla facilità con cui si può determinare la segnatura di una forma quadratica data. Presentiamo un criterio diretto, basato sulla determinazione del segno degli autovalori di  $A$ , che, essendo  $A$  una matrice simmetrica, *sono tutti reali*.

**Teorema 3.15 (Classificazione delle forme quadratiche con gli autovalori)** *Sia  $A$  una matrice reale simmetrica, e siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  i suoi autovalori distinti. Allora  $A$  è:*

$$\begin{array}{ll} \text{semidefinita positiva} & \iff \lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k \\ \text{semidefinita negativa} & \iff \lambda_i \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k \\ \text{definita positiva} & \iff \lambda_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, k \\ \text{definita negativa} & \iff \lambda_i < 0 \quad \forall i = 1, \dots, k \\ \text{indefinita} & \iff \exists i, j \in \{1, \dots, k\} \text{ tali che } \lambda_i > 0, \lambda_j < 0. \end{array}$$

Osserviamo che nel precedente criterio ciò che importa è solo il *segno* degli autovalori di  $D^2f(x_0)$  e non il loro valore numerico. Il seguente risultato dà condizioni affinché una forma quadratica sia definita positiva o negativa.

**Teorema 3.16 (Criterio di Sylvester)** *Sia  $A$  una matrice reale  $n \times n$  e siano  $A^{(p)}$  i minori di  $A$  fatti con le prime  $p$  righe e le prime  $p$  colonne. Allora  $A$  è definita positiva se e solo se*

$$\det(A^{(p)}) > 0 \quad \forall p = 1, \dots, n.$$

*La matrice  $A$  è definita negativa se e solo se  $-A$  è definita positiva, quindi se e solo se  $(-1)^p \det(A^{(p)}) > 0$  per ogni  $p$ .*

Utile è anche la seguente caratterizzazione delle matrici semidefinite attraverso il segno dei minori principali. Ricordiamo che i minori principali di una matrice  $A$  sono i determinanti delle matrici che si ottengono da  $A$  sopprimendo un numero arbitrario di righe e colonne con lo stesso indice.

**Proposizione 3.17** *Sia  $A$  una matrice reale  $n \times n$  tale che  $\det A = 0$ . Allora  $A$  è semidefinita positiva se e solo se tutti i suoi minori principali sono maggiori o uguali a zero.*

*La matrice  $A$  è semidefinita negativa se e solo se  $-A$  è semidefinita positiva, quindi se e solo se tutti i suoi minori principali di ordine pari sono maggiori o uguali a zero e tutti i suoi minori principali di ordine dispari sono minori o uguali a zero.*

Passiamo ora alla definizione di estremo relativo, ed alla discussione della ricerca e classificazione degli estremi relativi.

**Definizione 3.18 (Estremi relativi)** *Siano  $A \subset \mathbf{R}^n$ ,  $x_0 \in A$  ed  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ . Diciamo che  $f$  ha un massimo relativo in  $x_0$  se esiste  $\delta > 0$  tale che*

$$x \in A, \quad \|x - x_0\| < \delta \quad \implies \quad f(x) \leq f(x_0);$$

*diciamo che  $f$  ha un minimo relativo in  $x_0$  se esiste  $\delta > 0$  tale che*

$$x \in A, \quad \|x - x_0\| < \delta \quad \implies \quad f(x) \geq f(x_0).$$

*Se  $f$  ha un massimo o un minimo relativo in  $x_0$  allora diciamo che ha un estremo relativo in  $x_0$ . Se le due diseguaglianze precedenti valgono per  $x \neq x_0$  con  $<$  (risp.  $>$ ) anziché  $\leq$  (risp.  $\geq$ ) diciamo che l'estremo relativo è proprio.*

Il seguente risultato estende il Teorema ??

**Teorema 3.19** *Siano  $A \subset \mathbf{R}^n$ ,  $x_0 \in A$  e  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ . Se  $x_0$  è un punto di estremo relativo di  $f$ ,  $x_0$  è interno ad  $A$  ed  $f$  è differenziabile in  $x_0$ , allora  $\nabla f(x_0) = 0$ .*

**DIM.** Fissato  $v \in \mathbf{R}^n$ ,  $\|v\| = 1$ , possiamo applicare il Teorema ?? alla restrizione  $f_v$  di  $f$  alla retta  $x = x_0 + tv$ , che ha un estremo per  $t = 0$ , ottenendo  $f'_v(0) = \nabla f(x_0) \cdot v = 0$ . Poiché ciò accade per ogni vettore unitario  $v$ , deve essere  $\nabla f(x_0) = 0$ .  $\square$

**Definizione 3.20 (Punti critici)** *Se  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  è differenziabile in  $x_0 \in A$  e  $\nabla f(x_0) = 0$  allora  $x_0$  si dice punto critico o stazionario per  $f$ . Un punto critico che non è né di massimo relativo né di minimo relativo si dice punto di sella.*

Possiamo quindi dire che ogni punto di estremo interno in cui  $f$  sia differenziabile è un punto critico. Il viceversa, come nel caso di una variabile, non è vero. Per esempio,  $f(x, y) = xy$  ha un punto critico nell'origine che non è né massimo né minimo. Infatti,  $f(0, 0) = 0$ , ma  $f$  assume valori positivi e negativi in ogni intorno dell'origine.

Per determinare gli estremi relativi di una funzione  $f$  si procede pertanto come nel caso di una variabile: se  $f$  è di classe  $C^1$  se ne determinano i punti critici; se poi  $f$  è di classe  $C^2$ , se ne calcolano le derivate seconde nei punti critici trovati e si cerca di determinare la natura dei punti critici usando la formula di Taylor del secondo ordine. Esistono, come nel caso  $n = 1$ , criteri basati sulle derivate di ordine piú alto, ma, per l'elevata complessità (bisogna ricordare che le derivate parziali di ordine  $k$  sono  $n^k$ ) non li discutiamo. La classificazione dei punti critici basata sulle derivate di ordine 2 è contenuta nel seguente teorema.

**Teorema 3.21 (Classificazione dei punti critici)** *Siano  $A$  un sottoinsieme aperto di  $\mathbf{R}^n$  ed  $f \in C^2(A)$ . Se  $x_0 \in A$  è un punto critico di  $f$ , valgono le seguenti condizioni necessarie di estremalità:*

$$(3.2.5) \quad \begin{array}{ll} x_0 \text{ punto di minimo relativo} & \implies D^2f(x_0) \text{ semidefinita positiva} \\ x_0 \text{ punto di massimo relativo} & \implies D^2f(x_0) \text{ semidefinita negativa} \end{array}$$

e le seguenti condizioni sufficienti:

$$(3.2.6) \quad \begin{array}{ll} D^2f(x_0) \text{ definita positiva} & \implies x_0 \text{ punto di minimo relativo proprio} \\ D^2f(x_0) \text{ definita negativa} & \implies x_0 \text{ punto di massimo relativo proprio} \\ D^2f(x_0) \text{ indefinita} & \implies x_0 \text{ punto di sella.} \end{array}$$

Dal Teorema 3.15 segue una formulazione equivalente del risultato precedente, in termini degli autovalori della matrice hessiana.

**Teorema 3.22 (Classificazione dei punti critici con gli autovalori)** *Siano  $A$  un sottoinsieme aperto di  $\mathbf{R}^n$ ,  $f \in C^2(A)$ , ed  $x_0 \in A$  un punto critico di  $f$ . Siano inoltre  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  gli autovalori distinti di  $D^2f(x_0)$ . Valgono le seguenti condizioni necessarie di estremalità:*

$$\begin{array}{ll} x_0 \text{ punto di minimo relativo} & \implies \lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k; \\ x_0 \text{ punto di massimo relativo} & \implies \lambda_i \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k. \end{array}$$

e le seguenti condizioni sufficienti:

$$\begin{array}{ll} \lambda_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, k & \implies x_0 \text{ punto di minimo relativo proprio} \\ \lambda_i < 0 \quad \forall i = 1, \dots, k & \implies x_0 \text{ punto di massimo relativo proprio} \\ \exists i, j \in \{1, \dots, k\} \text{ tali che } \lambda_i > 0, \lambda_j < 0 & \implies x_0 \text{ punto di sella.} \end{array}$$

Nel caso  $n = 2$  possiamo ricavare in modo elementare il contenuto del Criterio di Sylvester 3.16 ed applicarlo alla classificazione di un punto critico in modo molto semplice.

**Esempio 3.23** Sia  $A = (a_{ij})$  una matrice simmetrica  $2 \times 2$ . Allora, l'equazione da risolvere per determinare gli autovalori è

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A = 0.$$

Ne segue che

$$\begin{array}{ll} A \text{ è definita positiva} & \iff \det A > 0, a_{11} > 0 \\ A \text{ è definita negativa} & \iff \det A > 0, a_{11} < 0 \\ A \text{ è indefinita} & \iff \det A < 0 \\ A \text{ è semidefinita} & \iff \det A = 0. \end{array}$$

Siccome il determinante di una matrice è uguale al prodotto degli autovalori, le affermazioni relative ai casi indefinito e semidefinito sono ovvie. Per quanto riguarda il caso di  $A$  definita (positiva o negativa), cioè con i due autovalori concordi, è ovvio che il determinante di  $A$  debba essere positivo; d'altra parte, questo implica che  $a_{11}$  e  $a_{22}$  siano concordi, essendo  $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ . Quindi, ci sono due autovalori positivi se e solo se nell'equazione sono presenti due *variazioni* di segno nei coefficienti (cioè,  $a_{11} > 0$  e  $a_{22} > 0$ ), e ci sono due autovalori negativi se e solo se nell'equazione sono presenti due *permanenze* di segno nei coefficienti (cioè,  $a_{11} < 0$  e  $a_{22} < 0$ ).

In termini di punti di estremi relativi, se  $(x_0, y_0)$  è un punto critico interno di una funzione di classe  $C^2$  di due variabili, si può stabilire il criterio seguente:

$$\begin{array}{ll} \det D^2 f(x_0, y_0) > 0, D_{xx} f(x_0, y_0) > 0 & \implies x_0 \text{ è punto di minimo relativo proprio} \\ \det D^2 f(x_0, y_0) > 0, D_{xx} f(x_0, y_0) < 0 & \implies x_0 \text{ è punto di massimo relativo proprio} \\ \det D^2 f(x_0, y_0) < 0 & \implies x_0 \text{ è punto di sella.} \end{array}$$

### 3.3 Funzioni vettoriali

In questo paragrafo estendiamo i concetti del calcolo differenziale al caso delle funzioni di più variabili a valori in  $\mathbf{R}^k$ , con  $k \geq 2$ . Come abbiamo già visto nel Capitolo 2 per le funzioni vettoriali di una variabile, non ci sono grosse novità concettuali, dal momento che si può procedere ragionando sulle singole componenti.

**Definizione 3.24 (Matrice jacobiana e differenziale)** Sia  $A \subset \mathbf{R}^n$  aperto, sia  $x_0 \in A$  e sia  $F : A \rightarrow \mathbf{R}^k$ ; indichiamo con  $F_j : A \rightarrow \mathbf{R}$ , per  $j = 1, \dots, k$ , le sue componenti. Se esistono tutte le derivate parziali  $D_i F_j(x_0)$ , per  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, k$  si definisce la matrice jacobiana di  $F$  in  $x_0$  ponendo

$$DF(x_0) = \begin{pmatrix} D_{x_1} F_1 & D_{x_2} F_1 & \dots & D_{x_n} F_1 \\ D_{x_1} F_2 & D_{x_2} F_2 & \dots & D_{x_n} F_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{x_1} F_k & D_{x_2} F_k & \dots & D_{x_n} F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla F_1 \\ \nabla F_2 \\ \vdots \\ \nabla F_k \end{pmatrix}.$$

Diciamo che  $F$  è di classe  $C^1(A)$  se ha derivate parziali prime  $D_i F = (D_i F_1, \dots, D_i F_n)$  continue in  $A$ , e diciamo che  $F$  è differenziabile in  $x_0$  se esiste un'applicazione lineare  $L : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$  tale che

$$(3.3.7) \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0) - Lh}{\|h\|} = 0.$$

La matrice jacobiana di  $F$  è quindi una matrice con  $k$  righe ed  $n$  colonne dove la  $j$ -esima riga ha per elementi le componenti del gradiente di  $F_j$ , e la  $i$ -esima colonna ha per elementi le derivate parziali delle componenti rispetto ad  $x_i$ . Si estende in modo naturale anche la nozione di derivata direzionale in  $x_0$  lungo la direzione del vettore  $v \in \mathbf{R}^n$ , con  $\|v\| = 1$ , imponendo l'esistenza del limite

$$D_v F(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t}$$

che questa volta (se esiste) è un vettore di  $\mathbf{R}^k$ . Anche nel caso delle derivate direzionali,  $D_v F(x_0)$  esiste se e solo se  $D_v F_j(x_0)$  esiste per ogni  $j = 1, \dots, k$  e

$$D_v F(x_0) = (D_v F_1(x_0), \dots, D_v F_k(x_0)).$$

Si può riformulare l'eguaglianza precedente dicendo che per ogni vettore  $w \in \mathbf{R}^k$  si ha  $D_v(F \cdot w)(x_0) = D_v F(x_0) \cdot w$ . In modo analogo si possono introdurre gli operatori differenziali di ordine più alto, e sempre ragionando componente per componente ottenere il teorema di Schwarz.

Come abbiamo già preannunziato, la verifica della differenziabilità si esegue componente per componente. Infatti, il numeratore al primo membro della (3.3.7) è un vettore, e la frazione tende a zero se e solo se le componenti di tale vettore tendono a zero.

**Proposizione 3.25** *Sia  $A \subset \mathbf{R}^n$  aperto, sia  $x_0 \in A$  e sia  $F : A \rightarrow \mathbf{R}^k$ ; allora,  $F$  è differenziabile in  $x_0$  se e solo se le sue componenti lo sono, e, se  $F$  è differenziabile in  $x_0$  allora l'applicazione lineare  $L$  in (3.3.7) è unica ed è associata alla matrice jacobiana di  $F$ . Inoltre, se  $F \in C^1(A)$  allora  $F$  è differenziabile in tutti i punti di  $A$ .*

**Esempio 3.26** Se  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  è di classe  $C^2(A)$  allora la funzione vettoriale  $F = \nabla f$  è di classe  $C^1(A)$  e  $DF = D^2 f$ , cioè la matrice jacobiana di  $F$  è la matrice hessiana di  $f$ .

Possiamo ora enunciare la naturale generalizzazione del teorema di derivazione delle funzioni composte.

**Teorema 3.27 (Differenziale della funzione composta, caso vettoriale)** *Siano  $A \subset \mathbf{R}^n$ ,  $B \subset \mathbf{R}^k$  aperti,  $F : A \rightarrow B$  e  $G : B \rightarrow \mathbf{R}^p$ . Sia  $x_0 \in A$  e supponiamo che  $F$  sia differenziabile in  $x_0$  e  $G$  sia differenziabile in  $F(x_0)$ . Allora  $\Phi = G \circ F$  è differenziabile in  $x_0$  e vale la formula*

$$D\Phi(x_0) = DG(F(x_0))DF(x_0),$$

ove il prodotto è il prodotto "ricoghe per colonne" delle matrici.

**Osservazioni 3.28**

1. Posto  $F = (F_1, \dots, F_k)$ ,  $G = (G_1, \dots, G_p)$ ,  $\Phi_r = G_r \circ F$ , la formula di derivazione si può scrivere nel seguente modo:

$$\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial G_r}{\partial y_j}(f(x_0)) \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x_0) \quad i = 1, \dots, n, \quad r = 1, \dots, p.$$

Osserviamo anche che la formula sopra, pur avendo senso, potrebbe essere falsa se  $F$  e  $G$  fossero solo dotate di derivate parziali, ma non differenziabili.

2. Vediamo ora due casi particolari della formula di differenziazione della funzione composta che ricorrono spesso nelle applicazioni. Se  $k = p = 1$ , allora  $G$  è una funzione reale di variabile reale e  $F$ ,  $\Phi$  sono funzioni reali di  $n$  variabili. In tal caso

$$\nabla \Phi(x_0) = G'(F(x_0)) \nabla F(x_0).$$

Se  $n = p = 1$ , allora  $F$  è una funzione vettoriale di variabile reale (quindi  $DF$  è un vettore colonna) e  $G$  è una funzione reale di  $n$  variabili (quindi  $DG = \nabla G$  è un vettore riga). La funzione composta  $\Phi(x) = G(F_1(x), \dots, F_k(x))$ ,  $x \in A \subset \mathbf{R}$ , è a valori in  $\mathbf{R}$  e  $\Phi'$  è data dal prodotto scalare

$$\Phi'(x_0) = \nabla G(F(x_0)) \cdot F'(x_0) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial G}{\partial y_j}(F(x_0)) F'_j(x_0).$$

3. Con gli stessi metodi qui visti si potrebbero trattare funzioni  $F : A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{m,k}$  a valori matrici. Basta infatti identificare  $\mathbf{R}^{m,k}$  con  $\mathbf{R}^{mk}$  e vedere quindi tali  $F$  come mappe vettoriali a valori in  $\mathbf{R}^{mk}$ . Ragionando componente per componente, si introducono quindi le derivate parziali, il gradiente, il differenziale.

Tra le applicazioni vettoriali rivestono particolare importanza i *cambiamenti di coordinate* in  $\mathbf{R}^n$ , di cui discutiamo ora i principali esempi.

**Esempi 3.29 (Cambiamenti di coordinate)**

1. (**Trasformazioni lineari**) Sia  $A = (a_{ij})$  una matrice reale  $n \times n$  con  $\det A \neq 0$ . Allora, com'è noto dall'algebra lineare, essa rappresenta, rispetto alla base canonica di  $\mathbf{R}^n$ , un'applicazione lineare invertibile di  $\mathbf{R}^n$  in sé (*isomorfismo*). Il vettore  $e_j$  della base canonica viene trasformato nel vettore  $e'_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$  che ha per componenti gli elementi della  $j$ -esima colonna della matrice  $A$ . I vettori  $e'_1, \dots, e'_n$  costituiscono a loro volta una base di  $\mathbf{R}^n$ , essendo, per l'ipotesi  $\det A \neq 0$ , linearmente indipendenti. Ogni vettore di  $\mathbf{R}^n$  si può quindi esprimere come combinazione lineare degli  $e'_i$ , ed ha, rispetto a questa nuova base, componente  $i$ -esima data da

$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_j$ . In termini analitici, consideriamo la funzione vettoriale  $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  di componenti  $F_j$  date da

$$F_j(x) = \sum_{h=1}^n a_{jh}x_h, \quad j = 1, \dots, n.$$

Le  $F_j$  sono lineari, dunque differenziabili per ogni  $x \in \mathbf{R}^n$ , e un calcolo diretto mostra che  $DF(x) = A$  per ogni  $x \in \mathbf{R}^n$ , cioè  $D_i F_j(x) = a_{ji}$  per ogni  $i, j$ .

2. **(Coordinate polari piane)** Nel piano  $\mathbf{R}^2$ , oltre alle coordinate cartesiane, si possono introdurre altri sistemi di coordinate. Le coordinate polari  $(\varrho, \vartheta)$  sono particolarmente utili per studiare problemi con qualche simmetria rispetto ad un punto, che si assume essere l'origine delle coordinate. Geometricamente,  $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$  rappresenta la distanza del punto generico di coordinate cartesiane  $(x, y)$  dall'origine, mentre  $\vartheta$  rappresenta uno dei due angoli formati dalla semiretta di origine  $(0, 0)$  e passante per  $(x, y)$  con il semiasse  $\{x \geq 0, y = 0\}$ . Fissato un criterio univoco per la scelta dell'angolo, il punto  $(x, y) \neq (0, 0)$  è univocamente determinato da una coppia  $(\varrho, \vartheta)$ , con  $\varrho \geq 0$  e  $\vartheta$  che varia in un intervallo semiaperto di ampiezza  $2\pi$ . Fa eccezione l'origine, che è determinato dal valore  $\varrho = 0$ , ma non ha un  $\vartheta$  determinato. Scegliamo come angolo quello spazzato dal semiasse positivo delle ascisse mentre ruota in senso antiorario fino a sovrapporsi alla semiretta per l'origine passante per  $(x, y)$ , e come intervallo di variabilità per l'angolo l'intervallo  $[0, 2\pi[$ , così che valgono le relazioni:

$$(3.3.8) \quad \begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \\ y = \varrho \sin \vartheta \end{cases}$$

Detta  $F : [0, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbf{R}^2$  la funzione che a  $(\varrho, \vartheta)$  associa  $(x, y)$ , un calcolo diretto mostra che

$$DF(\varrho, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\varrho \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \varrho \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

da cui, in particolare,  $\det DF(\varrho, \vartheta) = \varrho$ .

3. **(Coordinate cilindriche)** Come nel piano, in  $\mathbf{R}^3$  si possono introdurre coordinate diverse dalle cartesiane  $(x, y, z)$ ; in presenza di simmetrie rispetto ad un asse, che supponiamo essere l'asse  $z$ , può essere conveniente usare coordinate cilindriche  $(\varrho, \vartheta, z)$ . Queste si ottengono semplicemente considerando coordinate polari nel piano  $(x, y)$ :

$$(3.3.9) \quad \begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \\ y = \varrho \sin \vartheta \\ z = z \end{cases}$$

Detta  $F : [0, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  la funzione che a  $(\varrho, \vartheta, z)$  associa  $(x, y, z)$ , un

calcolo diretto mostra che

$$DF(\varrho, \vartheta, z) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\varrho \sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \varrho \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, in particolare,  $\det DF(\varrho, \vartheta, z) = \varrho$ .

4. **(Coordinate sferiche)** In  $\mathbf{R}^3$ , per esempio in presenza di una simmetria rispetto ad un punto, che assumiamo essere l'origine, può essere conveniente usare coordinate sferiche  $(\varrho, \vartheta, \phi)$ , dove, da un punto di vista geometrico,  $\varrho$  rappresenta la distanza del punto generico  $P(x, y, z)$  dall'origine,  $\vartheta$  la coordinata polare del punto  $(x, y)$  (proiezione di  $P$  sul piano  $(x, y)$ ), e  $\phi$  l'angolo formato dalla semiretta di origine  $(0, 0, 0)$  e passante per  $P$  con il semiasse  $\{x = 0, y = 0, z \geq 0\}$ . Ne segue che  $\varrho \geq 0$ , e (per esempio)  $\vartheta \in [0, 2\pi[$ ,  $\phi \in [0, \pi]$ . Posto  $F : [0, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \times [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^3$ , si ha:

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \sin \phi \\ y = \varrho \sin \vartheta \sin \phi \\ z = \varrho \cos \phi \end{cases}$$

e quindi

$$DF(\varrho, \vartheta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \sin \phi & -\varrho \sin \vartheta \sin \phi & \varrho \cos \vartheta \cos \phi \\ \sin \vartheta \sin \phi & \varrho \cos \vartheta \sin \phi & \varrho \sin \vartheta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -\varrho \sin \phi \end{pmatrix}$$

da cui, in particolare,  $\det DF(\varrho, \vartheta, \phi) = \varrho^2 \sin \phi$ .

### 3.4 Estremi vincolati

In questo paragrafo studiamo il problema della ricerca dei punti di estremo relativo piú in generale rispetto al caso di estremi *interni*. Questo problema è di grande importanza nelle applicazioni, perché nei problemi concreti di *ottimizzazione* ci sono sempre dei *vincoli* da rispettare, nel senso che si ha interesse a confrontare fra loro i valori che una funzione data assume su un sottoinsieme del suo dominio (il vincolo) che in generale non è un insieme aperto.

**Definizione 3.30 (Estremi vincolati)** Siano  $A \subset \mathbf{R}^n$ ,  $S \subset \mathbf{R}^n$ ,  $x_0 \in A \cap S$  ed  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ . Diciamo che  $f$  ha un massimo relativo in  $x_0$  rispetto al vincolo  $S$  se esiste  $\delta > 0$  tale che

$$x \in A \cap S, \quad \|x - x_0\| < \delta \quad \implies \quad f(x) \leq f(x_0);$$

diciamo che  $f$  ha un minimo relativo in  $x_0$  rispetto al vincolo  $S$  se esiste  $\delta > 0$  tale che

$$x \in A \cap S, \quad \|x - x_0\| < \delta \quad \implies \quad f(x) \geq f(x_0).$$

Se  $f$  ha un massimo o un minimo relativo in  $x_0$  rispetto al vincolo  $S$  allora diciamo che ha un estremo relativo in  $x_0$  rispetto al vincolo  $S$ . Se le due diseguaglianze precedenti valgono per  $x \neq x_0$  con  $<$  (risp.  $>$ ) anziché  $\leq$  (risp.  $\geq$ ) diciamo che l'estremo relativo è proprio.

Il problema della determinazione degli estremi relativi vincolati con un vincolo qualsiasi è troppo generale per poter essere affrontato con un metodo generale. Ci limiteremo al caso in cui il vincolo  $S$  è un sottoinsieme di  $\mathbf{R}^n$  descritto da funzioni regolari. In accordo con la discussione alla fine del Paragrafo 3.1, questo significa che  $S$  è l'immagine oppure un insieme di livello di una funzione regolare. Corrispondentemente, esponiamo due metodi per studiare il problema della ricerca degli estremi su  $S$ . Entrambi questi metodi consentono di ricondurre la ricerca degli estremi vincolati alla ricerca di estremi non vincolati di opportune funzioni ausiliarie. Per fissare le idee, supponiamo che sia data  $f \in C^2(A)$ , con  $A \subset \mathbf{R}^n$  aperto, e che  $S$  sia un vincolo di dimensione  $k < n$  in  $\mathbf{R}^n$ . Il nostro problema è: determinare gli estremi relativi di  $f$  vincolati su  $S$ .

**Primo metodo (parametrizzazione del vincolo)** Supponiamo che il vincolo sia dato nella forma

$$S = \{x \in \mathbf{R}^n : x = \varphi(t), t \in D\},$$

dove  $D \subset \mathbf{R}^k$  è un insieme aperto e  $\varphi : D \rightarrow \mathbf{R}^n$  è una funzione di classe  $C^1$  in  $D$ . In questo caso, per determinare gli estremi relativi di  $f$  basta studiare la funzione composta  $g = f \circ \varphi$  sull'insieme aperto  $D \subset \mathbf{R}^k$ , con i metodi già visti.

**Secondo metodo (moltiplicatori di Lagrange)** Supponiamo che il vincolo sia dato nella forma *implicita*

$$S = \{x \in A : F(x) = 0\},$$

cioè come insieme di livello di una funzione  $F : A \rightarrow \mathbf{R}^{n-k}$  di classe  $C^1(A)$ . Notiamo che, essendo  $F$  a valori vettoriali, il suo insieme di livello  $S$  è l'intersezione degli insiemi di livello  $S_j = \{x : F_j(x) = 0\}$ , per  $j = 1, \dots, n-k$ , e supponiamo che la matrice  $DF$  abbia su  $S$  rango massimo  $n-k$ . In questo caso, si introduce la funzione ausiliaria

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}) = f(x) - \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i F_i(x),$$

che dipende dalla variabile  $x \in A$  e dalle variabili reali anch'esse ausiliarie (dette *moltiplicatori di Lagrange*)  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}$  e se ne cercano gli estremi non vincolati in  $A \times \mathbf{R}^{n-k}$ . Vale infatti il seguente risultato:

*Se  $x \in A$  è un estremo vincolato di  $f$  su  $S$  allora esistono numeri reali  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}$  tali che il punto  $(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}) \in A \times \mathbf{R}^{n-k}$  sia estremo relativo di  $\Phi$ .*

Osserviamo che quindi il metodo esposto fornisce solo una condizione necessaria di estrema-  
 lità: per cercare gli estremi relativi di  $\Phi$  si annulla il gradiente di  $\Phi$ , cioè si risolve  
 il sistema

$$\begin{cases} D_{x_1} \Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}) = 0 \\ \vdots \\ D_{x_n} \Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}) = 0 \\ D_{\lambda_1} \Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}) = 0 \\ \vdots \\ D_{\lambda_{n-k}} \Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}) = 0, \end{cases}$$

che si può riscrivere:

$$\begin{cases} D_{x_1} f(x) - \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j D_{x_1} F_j(x) = 0 \\ \vdots \\ D_{x_n} f(x) - \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j D_{x_n} F_j(x) = 0 \\ F_1(x) = 0 \\ \vdots \\ F_{n-k}(x) = 0. \end{cases}$$

I punti di estremo di  $\Phi$  sono allora soluzioni di questo sistema, ma non tutte le soluzioni  
 sono punti di estremo. Di conseguenza, lo stesso vale per gli estremi vincolati di  $f$   
 su  $S$ . Notiamo che le ultime equazioni del precedente sistema assicurano che i punti  
 trovati appartengano ad  $S$ . Le prime  $n$  equazioni, invece, possono essere interpretate  
 geometricamente dicendo che nei punti di estremo vincolato *il gradiente di  $f$  non ha*  
*componenti tangenti ad  $S$* . Infatti, il gradiente risulta combinazione lineare dei gradienti  
 delle  $F_1, \dots, F_{n-k}$ , che, per il Teorema 3.9, non hanno componenti tangenziali lungo  $S$ .

## CAPITOLO 4

# CURVE ED INTEGRALI DI LINEA

In questo capitolo introduciamo la nozione di curva nello spazio  $\mathbf{R}^n$ , ne studiamo le piú elementari proprietà geometriche, come la lunghezza e la retta tangente, e definiamo gli integrali di linea di funzioni reali e di campi vettoriali. Quest'ultima nozione verrà usata per affrontare, in modo molto parziale, il problema della caratterizzazione dei campi vettoriali  $F$  che sono gradienti di una funzione regolare.

La nozione di curva presenta in modo naturale due aspetti, uno *geometrico* (la curva come insieme di punti), l'altro *cinematico* (la curva come traiettoria di un punto materiale in movimento). Privilegeremo questo secondo aspetto, definendo le curve come funzioni (in termini cinematici, leggi di moto), dal momento che l'informazione contenuta nella funzione che definisce un luogo geometrico non è tutta desumibile dalle proprietà insiemistiche del luogo stesso. D'altra parte, avremo cura di segnalare le proprietà dei luoghi geometrici che non dipendono dalla funzione che li rappresenta.

### 4.1 Curve regolari

Nella prima definizione precisiamo che cosa s'intende per curva in  $\mathbf{R}^n$ , ed introduciamo la nomenclatura fondamentale per le sue proprietà.

**Definizione 4.1 (Curve)** *Siano  $I \subset \mathbf{R}$  un intervallo e  $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ .*

*Diciamo che  $\varphi$  è una curva in  $\mathbf{R}^n$  se è una funzione continua.*

*Diciamo che  $\varphi$  è una curva regolare se  $\varphi \in C^1(I)$  e  $\varphi'(t) \neq 0$  per ogni  $t \in I$ .*

*Diciamo che  $\varphi$  è una curva regolare a tratti se è continua ed esistono  $\inf I = t_0 < t_1 < \dots < t_k = \sup I$  tali che  $\varphi$  sia regolare in  $[t_{i-1}, t_i] \cap I$  per ogni  $i = 1, \dots, k$ .*

*Chiamiamo sostegno della curva  $\varphi$  l'insieme  $\varphi(I) \subset \mathbf{R}^n$ .*

*Diciamo che  $\varphi$  è semplice se  $t_1 \neq t_2$  implica  $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ , purché almeno uno tra  $t_1$  e  $t_2$  sia interno ad  $I$ .*

*Se  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  diciamo che il punto  $\varphi(a)$  è il primo estremo e  $\varphi(b)$  è il secondo estremo di  $\varphi$ .*

*Diciamo che  $\varphi$  è chiusa se  $I = [a, b]$  è chiuso e limitato e  $\varphi(a) = \varphi(b)$ .*

**Osservazioni 4.2**

1. Come spiegato nell'introduzione al capitolo, abbiamo identificato una curva con la parametrizzazione; il luogo geometrico descritto dalla curva è quello che abbiamo chiamato il suo sostegno.
2. La condizione  $\varphi'(t) \neq 0$  sarà utile per definire in ogni punto del sostegno della curva  $\varphi$  la retta tangente (vedi l'equazione (4.1.1) che definisce la retta tangente).
3. Nella definizione di curva semplice abbiamo escluso il caso che  $t_1$  e  $t_2$  siano *entrambi* estremi dell'intervallo  $I$  perché vogliamo che una curva semplice non abbia punti doppi, ma ammettiamo che possa essere allo stesso tempo semplice e chiusa (come una circonferenza, vedi esempio 4.3.2), non considerando il primo estremo (che coincide col secondo estremo) come punto doppio. Notiamo anche che gli estremi di una curva dipendono dalla parametrizzazione e non solo dal sostegno (vedi successivo esempio 4.3.2).
4. Se una curva è regolare a tratti allora nei punti in cui la regolarità viene meno esistono le derivate destra e sinistra.

Presentiamo subito alcuni esempi di curve.

**Esempi 4.3**

1. **(Segmenti, rette, poligonali)** Ricordiamo che il segmento di estremi  $x$  ed  $y$  è la curva  $\varphi(t) = x + t(y - x)$ , per  $t \in [0, 1]$ . Dati un punto  $x \in \mathbf{R}^n$  ed un vettore  $v \neq 0$  in  $\mathbf{R}^n$ , la curva  $\varphi(t) = x + tv$ , per  $t \in \mathbf{R}$ , è la retta passante per  $x$  di direzione  $v$ . Ricordiamo che le poligonali sono già state introdotte nel Capitolo 2 (vedi Definizione 2.18). Una parametrizzazione della poligonale  $P$  di vertici  $x_0, \dots, x_k$  può essere  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$  definita da:

$$\varphi(t) = x_{i-1} + \frac{t}{k}(x_i - x_{i-1}) \quad \text{per} \quad \frac{i-1}{k} \leq t \leq \frac{i}{k}, \quad i = 1, \dots, k.$$

2. **(Circonferenza)** La curva  $\varphi(t) = (R \cos t, R \sin t)$ , per  $t \in [0, 2\pi]$ , è la circonferenza di centro l'origine e raggio  $R$  *percorsa una volta in senso antiorario*. È una curva semplice e chiusa, ma queste proprietà dipendono dall'espressione della funzione  $\varphi$  ed anche dall'intervallo di definizione. Infatti, se  $t$  varia in  $[0, 3\pi]$  la curva non è piú né semplice né chiusa, pur avendo come sostegno la stessa circonferenza.
3. **(Ellisse)** Piú in generale, si può considerare l'ellisse di centro l'origine e semiassi  $a$  e  $b$ , descritta da  $\varphi(t) = (a \cos t, b \sin t)$ , per  $t \in [0, 2\pi]$ . Ovviamente, se  $a = b = R$  si ottiene la circonferenza dell'esempio 2.

Come abbiamo detto, vogliamo distinguere curve che, pur avendo lo stesso sostegno, sono descritte da funzioni diverse. In realtà molte proprietà di due curve permangono immutate se fra esse esiste il legame precisato dalla seguente definizione.

**Definizione 4.4 (Curve equivalenti)** Due curve  $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  e  $\psi : J \rightarrow \mathbf{R}^n$  si dicono equivalenti se esiste una funzione  $\alpha : I \rightarrow J$  di classe  $C^1(I)$  con  $\alpha'(t) \neq 0$  per ogni  $t \in I$  tale che  $\varphi = \psi \circ \alpha$ .

#### Osservazioni 4.5

1. La funzione  $\alpha$  nella definizione precedente sarà detta talvolta *cambiamento di parametro ammissibile*.
2. È utile osservare che ogni curva definita in un intervallo chiuso e limitato  $I = [a, b]$  è equivalente ad una curva definita nell'intervallo unitario  $J = [0, 1]$ , attraverso il cambiamento di parametro  $\alpha(t) = \frac{t-a}{b-a}$ .
3. La relazione introdotta è una relazione di equivalenza, cioè *riflessiva* (ogni curva è equivalente a sé stessa), *simmetrica* (se  $\varphi$  è equivalente a  $\psi$  allora  $\psi$  è equivalente a  $\varphi$ , con cambiamento di parametro la funzione inversa di  $\alpha$ , cioè  $\alpha^{-1} : J \rightarrow I$ ) e *transitiva* (se  $\varphi$  è equivalente a  $\psi$  con cambiamento di parametro  $\alpha : I \rightarrow J$  e  $\psi$  è equivalente a  $\zeta : K \rightarrow \mathbf{R}^n$  con cambiamento di parametro  $\beta : J \rightarrow K$  allora  $\varphi$  è equivalente a  $\zeta$ , con cambiamento di parametro la funzione composta  $\beta \circ \alpha : I \rightarrow K$ ).
4. La condizione che  $\alpha'$  sia continua nell'intervallo  $I$  e mai nulla implica che ha un segno costante, cioè che  $\alpha'(t) > 0$  per ogni  $t \in I$ , oppure  $\alpha'(t) < 0$  per ogni  $t \in I$ . Nel primo caso  $\varphi$  e  $\psi$  hanno la stessa *orientazione*, vengono percorse cioè nello stesso verso, nel secondo in verso opposto. Ne segue che ogni classe di equivalenza di curve si spezza in due sottoclassi, dette *curve orientate*. Due rappresentanti della stessa curva orientata sono equivalenti con un cambiamento di parametro ammissibile crescente, mentre si passa dal rappresentante di una sottoclasse a quello dell'altra con un cambiamento di parametro ammissibile decrescente.
5. Due curve equivalenti hanno gli stessi estremi, nello stesso ordine se hanno la stessa orientazione, in ordine inverso se hanno orientazione opposta.

Cerchiamo ora una formula per la parametrizzazione della retta tangente ad una curva in un punto del suo sostegno, imponendo che sia la “retta limite” delle secanti. Se  $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  è una curva semplice e regolare, fissato  $t_0 \in I$ , per ogni  $t_1 \neq t_0$  si può scrivere l'equazione  $\psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$  della retta secante nei punti  $\varphi(t_0)$  e  $\varphi(t_1)$ ; come nell'esempio 4.3.1, la direzione della retta è il vettore  $\varphi(t_1) - \varphi(t_0)$  e, imponendo che  $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$  e  $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$  si ha

$$\psi(t) = \varphi(t_0) + \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}{t_1 - t_0}(t - t_0).$$

Passando al limite per  $t_1 \rightarrow t_0$  si ottiene l'equazione della retta tangente a  $\varphi$  in  $\varphi(t_0)$ , data da:

$$(4.1.1) \quad \psi(t) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)(t - t_0).$$

Il versore  $T(t) = \varphi'(t)/\|\varphi'(t)\|$  si dice versore tangente a  $\varphi$  nel punto  $\varphi(t)$  e dipende solo dalla *curva orientata* a cui appartiene  $\varphi$  (vedi Osservazione 4.5.4). Notiamo che, essendo  $\varphi$  regolare per ipotesi,  $T$  è ben definito.

**Esempio 4.6 (Curve cartesiane)** Se  $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  è una funzione continua, il suo grafico è il sostegno di una curva in  $\mathbf{R}^2$  che si può rappresentare canonicamente con  $\varphi(t) = (t, f(t))$ ,  $t \in (a, b)$ . Se  $f \in C^1(a, b)$  l'equazione (4.1.1), per  $t_0 = x_0$ , diviene allora, scrivendo separatamente le due componenti,

$$\begin{cases} x = \psi_1(t) = \varphi_1(t_0) + \varphi_1'(t_0)(t - t_0) = t \\ y = \psi_2(t) = \varphi_2(t_0) + \varphi_2'(t_0)(t - t_0) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \end{cases}$$

da cui, eliminando il parametro  $t$ ,  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , che è l'equazione già trovata (vedi ??).

Passiamo ora a definire la *lunghezza di una curva* ed a dimostrare una formula per il suo calcolo. Definiamo prima la lunghezza di un segmento, poi di una poligonale, e poi di una curva generica.

**Definizione 4.7 (Lunghezza di una curva)** La lunghezza del segmento  $[x, y]$  è

$$\ell([x, y]) = \|x - y\|.$$

La lunghezza della poligonale  $P$  di vertici  $x_0, \dots, x_k$  è

$$\ell(P) = \sum_{i=1}^k \|x_i - x_{i-1}\|.$$

Data  $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ , si dice che la poligonale  $P$  di vertici  $x_0, \dots, x_k$  è inscritta nella curva  $\varphi$  se esistono  $t_0 < \dots < t_k \in I$  tali che  $x_i = \varphi(t_i)$  per  $i = 0, 1, \dots, k$ . Definiamo la lunghezza della curva  $\varphi$  ponendo

$$\ell(\varphi, I) = \sup\{\ell(P) : P \text{ inscritta in } \varphi\}.$$

Se  $\ell(\varphi, I) < +\infty$  allora diciamo che  $\varphi$  è rettificabile.

Per ottenere una formula che fornisca la lunghezza di una curva direttamente dalla sua rappresentazione parametrica, introduciamo la funzione che ad ogni valore di  $t$  associa la lunghezza del tratto di curva percorso fino all'istante  $t$ . Nella definizione seguente l'estremo  $b$  dell'intervallo può appartenere o no all'intervallo, e può anche essere  $+\infty$ .

**Definizione 4.8 (Ascissa curvilinea)** Sia  $\varphi : [a, b) \rightarrow \mathbf{R}^n$  una curva; per ogni  $t \in [a, b)$  poniamo

$$s(t) = \ell(\varphi, [a, t]);$$

la funzione  $s$  si dice ascissa curvilinea della curva  $\varphi$ .

**Osservazione 4.9** Se  $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  è una curva e  $[a, b]$ ,  $[b, c]$  sono due sottointervalli adiacenti di  $I$  allora risulta  $\ell(\varphi, [a, c]) = \ell(\varphi, [a, b]) + \ell(\varphi, [b, c])$ . In particolare, la funzione  $s : [a, b) \rightarrow [0, \ell(\varphi, [a, b)))$  è monotona crescente.

Il seguente teorema fornisce una formula per il calcolo della lunghezza di una curva regolare a tratti che può essere interpretata dicendo che la lunghezza della curva (ossia, in termini cinematici, lo spazio percorso) è uguale all'integrale della velocità scalare.

**Teorema 4.10** *Sia  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  una curva regolare a tratti. Allora  $\varphi$  è rettificabile, e la sua lunghezza è data da*

$$(4.1.2) \quad \ell(\varphi, [a, b]) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt.$$

DIM. Osserviamo anzitutto che basta provare la (4.1.2) per le curve regolari. Infatti, se la formula vale per le curve regolari e  $\varphi$  è regolare nei tratti  $[t_{i-1}, t_i]$ , con  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ , allora

$$\ell(\varphi, [a, b]) = \sum_{i=1}^k \ell(\varphi, [t_{i-1}, t_i]) = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\varphi'(t)\| dt = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt.$$

Supponiamo perciò che  $\varphi$  sia regolare in  $[a, b]$ , e proviamo che la funzione  $s$  è in questo caso derivabile, con  $s'(t) = \|\varphi'(t)\|$ . A tale scopo, fissiamo  $t \in [a, b]$ , e sia  $|h| \neq 0$  abbastanza piccolo affinché anche  $t + h$  appartenga ad  $[a, b]$ . Poiché  $|s(t + h) - s(t)|$  è uguale alla lunghezza del tratto di  $\varphi$  percorso nell'intervallo di estremi  $t$  e  $t + h$ , confrontando tale lunghezza con la lunghezza del segmento di estremi  $\varphi(t)$  e  $\varphi(t + h)$ , che è una speciale poligonale inscritta nel tratto di curva suddetto, risulta:

$$(4.1.3) \quad \|\varphi(t + h) - \varphi(t)\| \leq |s(t + h) - s(t)|.$$

Sia ora  $P$  la poligonale di vertici  $\varphi(t_0), \varphi(t_1), \dots, \varphi(t_k)$  inscritta nel tratto di curva percorso nell'intervallo di estremi  $t$  e  $t + h$ ; per il teorema fondamentale del calcolo 2.45 risulta

$$\ell(P) = \sum_{i=1}^k \|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^k \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(t) dt \right\| \leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\varphi'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_k} \|\varphi'(t)\| dt.$$

Poiché questa disuguaglianza vale per *ogni* poligonale inscritta, risulta

$$(4.1.4) \quad |s(t + h) - s(t)| \leq \left| \int_t^{t+h} \|\varphi'(t)\| dt \right|.$$

Dividendo per  $h$  ambo i membri delle (4.1.3), (4.1.4) e tenendo conto della monotonia di  $s$  risulta allora:

$$\left\| \frac{\varphi(t + h) - \varphi(t)}{h} \right\| \leq \frac{s(t + h) - s(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\varphi'(t)\| dt,$$

da cui, passando al limite per  $h \rightarrow 0$ ,  $s'(t) = \|\varphi'(t)\|$  per ogni  $t \in [a, b]$ . Segue:

$$\ell(\varphi, [a, b]) = s(b) - s(a) = \int_a^b s'(t) dt = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt.$$

Poiché  $\varphi'$  è una funzione continua, il suo integrale su  $[a, b]$  è finito, e  $\varphi$  è rettificabile.

QED

### Osservazioni 4.11

1. Si vede facilmente, con un cambiamento di variabili nell'integrale, che se  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  e  $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^n$  sono due curve equivalenti nel senso della Definizione 4.4 allora  $\ell(\varphi, [a, b]) = \ell(\psi, [c, d])$ . Infatti, ricordando che  $\varphi'(t) = \alpha'(t)\psi'(\alpha(t))$ , si ha

$$\ell(\psi, [c, d]) = \int_c^d \|\psi'(\tau)\| d\tau = \int_{\alpha^{-1}(c)}^{\alpha^{-1}(d)} \frac{1}{|\alpha'(t)|} \|\varphi'(t)\| |\alpha'(t)| dt = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt,$$

dove abbiamo eseguito il cambio di variabili  $\tau = \alpha(t)$  nel primo integrale.

2. Se  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  è una curva regolare, allora  $s : [a, b] \rightarrow [0, \ell(\varphi, [a, b])]$  è un cambiamento di parametro ammissibile perché  $s$  è di classe  $C^1$  ed  $s'(t) = \|\varphi'(t)\| \neq 0$  per ogni  $t$ ; ne segue che è possibile rappresentare ogni curva regolare usando come parametro l'ascissa curvilinea, ponendo cioè  $\psi(s) = \varphi(t)$  per  $s = s(t)$ . Questo dà una rappresentazione canonica della curva, dal momento che l'eguaglianza  $\psi'(s(t))s'(t) = \varphi'(t)$  implica che  $\|\psi'(t)\| = 1$ . Ne segue che la derivata della  $\psi$  rispetto all'ascissa curvilinea fornisce il versore tangente, cioè, per  $s = s(t)$  risulta  $\psi'(s) = T(t)$ .

### Esempi 4.12

1. **(Lunghezza di una curva cartesiana)** Data  $f \in C^1([a, b])$ , se  $\varphi(t) = (t, f(t))$  è la curva cartesiana che descrive il grafico di  $f$  come nell'esempio 4.6, allora la sua lunghezza è data da

$$\ell(\varphi, [a, b]) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt.$$

2. **(Curve in coordinate polari)** Una curva piana può essere a volte assegnata convenientemente dandone l'equazione in coordinate polari, o in forma esplicita o in forma parametrica. Nel primo caso, tipicamente si tratta di un'espressione del tipo  $\varrho = g(\vartheta)$ , con  $\vartheta \in (\vartheta_0, \vartheta_1)$ . Per esempio, la circonferenza di centro l'origine e raggio  $R$ , percorsa una volta, ha la semplice equazione  $\varrho = R$ . Per calcolare la formula generale della lunghezza di una curva della forma detta, possiamo riscriverla in coordinate cartesiane

$$\begin{cases} x = g(\vartheta) \cos \vartheta \\ y = g(\vartheta) \sin \vartheta \end{cases}$$

e poi usare la formula(4.1.2) con  $\varphi(\vartheta) = (g(\vartheta) \cos \vartheta, g(\vartheta) \sin \vartheta)$ ; con semplici calcoli si ottiene:

$$\ell(\varphi, [\vartheta_0, \vartheta_1]) = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \sqrt{[g(\vartheta)]^2 + [g'(\vartheta)]^2} d\vartheta.$$

Come applicazione, possiamo considerare la spirale  $\varphi$  di equazione polare  $\varrho = e^{-\vartheta}$ , per esempio con  $\vartheta \in [0, 6\pi]$ , ottenendo:

$$\ell(\varphi, [0, 6\pi]) = \int_0^{6\pi} \sqrt{2e^{-2\vartheta}} d\vartheta = \sqrt{2}(1 - e^{-6\pi}).$$

Se invece la curva è data in coordinate polari, ma in forma parametrica, è assegnata un'espressione vettoriale del tipo

$$\begin{cases} \varrho = \gamma(t) \\ \vartheta = \eta(t) \end{cases}$$

Ragionando come nel caso precedente si ottiene la formula

$$\ell(\varphi, [a, b]) = \int_a^b \sqrt{[\gamma'(t)]^2 + [\gamma(t)]^2[\eta'(t)]^2} dt.$$

## 4.2 Integrali di linea

In questo paragrafo definiamo gli integrali di linea e ne presentiamo le principali proprietà. Su una curva si possono integrare sia funzioni reali che funzioni vettoriali e corrispondentemente daremo due definizioni. La prima risulta invariante per equivalenza di curve, la seconda invece dipende dall'orientazione data alla curva, e cambia segno cambiando orientazione. Integrali di funzioni vettoriali s'incontrano in dinamica quando si definisce il *lavoro* compiuto da una forza. Diamo ora le due definizioni, e poi discutiamo i legami fra esse e le relative proprietà.

**Definizione 4.13 (Integrali di funzioni reali)** *Siano  $A \subset \mathbf{R}^n$ ,  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  una curva regolare con sostegno  $\varphi([a, b])$  contenuto in  $A$ , ed  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua. Poniamo*

$$(4.2.5) \quad \int_{\varphi} f ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt.$$

*Se  $\varphi$  è regolare nei tratti  $[t_{i-1}, t_i]$ , con  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  allora poniamo*

$$\int_{\varphi} f ds = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt.$$

**Definizione 4.14 (Integrali di funzioni vettoriali)** *Siano  $A \subset \mathbf{R}^n$ ,  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  una curva regolare con sostegno  $\varphi([a, b])$  contenuto in  $A$ , ed  $F : A \rightarrow \mathbf{R}^n$  una funzione vettoriale continua. Poniamo*

$$(4.2.6) \quad \int_{\varphi} F \cdot d\ell = \int_a^b F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Se  $\varphi$  è regolare nei tratti  $[t_{i-1}, t_i]$ , con  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  allora poniamo

$$\int_{\varphi} F \cdot d\ell = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

**Osservazione 4.15** Dati un campo vettoriale  $F$  ed una curva  $\varphi$  come nella Definizione 4.14, l'integrale di  $F$  su  $\varphi$  definito nella (4.2.6) si può ricondurre all'integrale di una funzione reale definita sul sostegno di  $\varphi$  ponendo per ogni  $t \in [a, b]$   $f(\varphi(t)) = F(\varphi(t)) \cdot T(t)$ , dove  $T$  è come al solito il versore tangente. Segue subito dalle definizioni che  $\int_{\varphi} F \cdot d\ell = \int_{\varphi} f ds$ .

Ricordando le proprietà degli integrali su intervalli di  $\mathbf{R}$ , si deducono subito le seguenti proprietà degli integrali di linea, che enunciamo per gli integrali delle funzioni reali. Tenendo conto dell'osservazione precedente, analoghe proprietà varranno per gli integrali delle funzioni vettoriali. Per enunciare la proprietà 3, analoga alla ??, diamo la definizione di composizione di due curve, in cui per semplicità supponiamo che le curve siano entrambe definite sull'intervallo  $[0, 1]$ . Questo, grazie all'Osservazione 4.5.2, non è restrittivo.

**Definizione 4.16** Siano  $\varphi$  e  $\psi$  due curve definite nell'intervallo  $[0, 1]$  a valori in  $\mathbf{R}^n$ ; se  $\varphi(1) = \psi(0)$  si definisce la composizione di  $\varphi$  e  $\psi$ , denotata  $\varphi * \psi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ , ponendo:

$$\varphi * \psi(t) = \begin{cases} \varphi(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \psi(2t - 1) & \text{se } 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$$

Enunciamo allora le proprietà degli integrali di linea:

1. L'integrale è lineare:

$$\int_{\varphi} (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_{\varphi} f ds + \beta \int_{\varphi} g ds$$

2. Valgono le disuguaglianze:

$$\left| \int_{\varphi} f ds \right| \leq \int_{\varphi} |f| ds \leq \sup_{t \in [a, b]} |f(\varphi(t))| \ell(\varphi, [a, b]).$$

3. Vale l'eguaglianza:

$$\int_{\varphi * \psi} f ds = \int_{\varphi} f ds + \int_{\psi} f ds.$$

**Osservazione 4.17** È immediato che se  $f(x) = 1$  per ogni  $x \in \mathbf{R}^n$ , allora l'integrale di  $f$  sulla curva  $\varphi$  dà la lunghezza di  $\varphi$ . Si vede facilmente con un cambiamento di variabile, come nel caso della formula per la lunghezza, che l'integrale in (4.2.5) non cambia se si considera una curva equivalente a  $\varphi$ . Invece, nel caso dell'integrale di una

funzione vettoriale in (4.2.6), se la curva equivalente considerata ha la stessa orientazione l'integrale non cambia, se invece ha orientazione opposta assume valore opposto. Infatti, considerare una curva con orientazione opposta è equivalente a considerare un versore tangente opposto al versore  $T$  definito da  $\varphi'$ , e questo, come spiegato nell'Osservazione 4.15, equivale ad integrare la funzione  $-F \cdot T$ . In formule, se  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$  è una curva regolare e  $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ , definita da  $\psi(t) = \varphi(1 - t)$ , è la curva con uguale sostegno ed orientazione opposta, allora

$$\int_{\varphi} F \cdot d\ell = - \int_{\psi} F \cdot d\ell \quad \forall F.$$

### 4.3 Campi vettoriali conservativi

In questo paragrafo affrontiamo lo studio del seguente problema:

*dato un campo vettoriale  $F : A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , esiste  $f \in C^1(A)$  tale che  $\nabla f = F$ ?*

Nel caso  $n = 1$  il problema è completamente risolto dal teorema fondamentale del calcolo (vedi ??), che dà una risposta affermativa per ogni funzione continua  $F$ . Nel caso  $n > 1$  la soluzione non è altrettanto semplice, e non dipende dalla regolarità del dato  $F$ , ma da condizioni di compatibilità fra le varie componenti di  $F$  e dalla geometria del dominio  $A$ . Iniziamo con la seguente definizione.

**Definizione 4.18 (Campi conservativi)** *Sia  $A \subset \mathbf{R}^n$  aperto, e sia  $F : A \rightarrow \mathbf{R}^n$  continua. Diciamo che  $F$  è un campo conservativo in  $A$  se esiste una funzione reale  $f \in C^1(A)$  tale che  $\nabla f = F$ , ossia*

$$F_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in A, \forall i = 1, \dots, n.$$

*Se  $F$  è conservativo in  $A$  allora ogni funzione  $f$  verificante le precedenti condizioni si dice potenziale o primitiva di  $F$  in  $A$ .*

Nel caso  $n = 1$  (vedi ??) l'integrale di una funzione continua su un intervallo  $I$  è uguale alla differenza dei valori che una (qualunque) primitiva assume negli estremi di  $I$ , e due primitive della stessa funzione differiscono per una costante. Valgono risultati analoghi in più variabili; naturalmente, l'integrale su un intervallo va sostituito con l'integrale di linea.

**Teorema 4.19 (Potenziali)** *Sia  $A \subset \mathbf{R}^n$  un aperto connesso per poligonalità, e sia  $F : A \rightarrow \mathbf{R}^n$  un campo conservativo in  $A$ . Allora:*

- (i) *se  $f$  e  $g$  sono due primitive di  $F$  in  $A$  esiste  $c \in \mathbf{R}$  tale che  $f = g + c$ ;*

(ii) se  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$  è una curva regolare con sostegno contenuto in  $A$  risulta:

$$\int_{\varphi} F \cdot d\ell = f(\varphi(1)) - f(\varphi(0)),$$

dove  $f$  è una qualunque primitiva di  $F$  in  $A$ .

DIM. (i) Poiché  $\nabla(f - g) = 0$  in  $A$ , dal teorema 3.8 segue la tesi.

(ii) Sia  $f$  una primitiva di  $F$ , e sia  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  definita da  $g(t) = f(\varphi(t))$ . Allora

$$g'(t) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

e quindi per il Teorema ??

$$\int_{\varphi} F \cdot d\ell = \int_0^1 F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_0^1 g'(t) dt = g(1) - g(0) = f(\varphi(1)) - f(\varphi(0)).$$

QED

**Osservazione 4.20** In particolare, il teorema precedente mostra che, dato un campo conservativo in un aperto connesso per poligonali, il suo potenziale è determinato a meno di una costante. Se il dominio  $A$  non è connesso per poligonali allora, come nel caso delle funzioni di una variabile definite nell'unione di piú intervalli, vedi Osservazione ??3, si avrà una costante arbitraria per ogni componente connessa di  $A$ .

Il teorema mostra anche che l'integrale di un campo conservativo lungo una curva dipende solo dagli estremi della curva, e non dalla particolare curva che li congiunge. Come vedremo, questa proprietà caratterizza i campi conservativi.

**Teorema 4.21 (Caratterizzazione dei campi conservativi)** *Sia  $A \subset \mathbf{R}^n$  un aperto connesso per poligonali, e sia  $F : A \rightarrow \mathbf{R}^n$  una funzione continua in  $A$ . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i)  $F$  è conservativo;
- (ii) se  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$  è una curva regolare chiusa con sostegno contenuto in  $A$  allora  $\int_{\varphi} F \cdot d\ell = 0$ ;
- (iii) se  $\varphi$  e  $\psi$  sono due curve regolari chiuse con sostegno contenuto in  $A$  aventi gli stessi estremi (nell'ordine) allora  $\int_{\varphi} F \cdot d\ell = \int_{\psi} F \cdot d\ell$ .

Questo risultato è utile piú per *negare* che un campo sia conservativo che per provarlo: infatti, per provare che un campo è conservativo, in linea di principio si dovrebbe verificare che il suo integrale è nullo su *tutte* le curve chiuse, e questo è chiaramente impossibile. Viceversa, basta provare che l'integrale è diverso da zero su *una* curva chiusa per esser certi che il campo *non* è conservativo. La prima verifica da fare per sapere se un campo può essere conservativo è però quella contenuta nella seguente proposizione.

**Proposizione 4.22** *Se  $F : A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  è un campo conservativo di classe  $C^1(A)$  allora*

$$(4.3.7) \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in A, \forall i, j = 1, \dots, n.$$

DIM. Se  $F = \nabla f$  in  $A$ , allora  $f \in C^2(A)$ , e la condizione (4.3.7) è semplicemente la condizione di simmetria della matrice hessiana di  $f$ . □ QED

La condizione (4.3.7), per  $n = 3$ , dice che il rotore di  $F$  è nullo (vedi (6.7.5)). In tal caso si dice anche che il campo è *irrotazionale*. È una condizione necessaria di facile verifica per la conservatività, ma non è sufficiente, come mostra il seguente esempio.

**Esempio 4.23 (Un campo irrotazionale non conservativo)** Consideriamo il campo piano  $F$  definito in  $A = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ :

$$F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Si verifica facilmente che vale la condizione (4.3.7), ma l'integrale su una circonferenza di centro l'origine e raggio  $R$  non è nullo. Infatti, posto  $\varphi(t) = (R \cos t, R \sin t)$  per  $t \in [0, 2\pi]$ :

$$(4.3.8) \quad \int_{\varphi} F \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} \left( \frac{-R \sin t}{R^2} (-R \sin t) + \frac{R \cos t}{R^2} (R \cos t) \right) dt = 2\pi \neq 0$$

e quindi  $F$  non è conservativo in  $A$ .

Osserviamo infine che, se si estende  $F$  ad  $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, z)\}$  ponendo

$$\mathcal{B}(x, y, z) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

si ottiene (a meno di costanti) il campo magnetico di un filo rettilineo indefinito (coincidente con l'asse  $z$ ) percorso da corrente costante dato dalla legge di Biot-Savart.

Notiamo che l'integrale in (4.3.8) non dipende dal raggio della circonferenza; in realtà, si potrebbe dimostrare che l'integrale  $\int_{\varphi} F \cdot d\ell$  vale  $2\pi$  tutte le volte che  $\varphi$  è una curva chiusa regolare che compie un giro attorno all'origine in verso antiorario. Quest'esempio suggerisce che anche la geometria del dominio  $A$  riveste un ruolo importante nella nostra discussione: infatti, le circonferenze considerate in (4.3.8) e, più in generale, le altre curve descritte prima, girano attorno alla singolarità del campo presente nell'origine. Non approfondiremo questo aspetto, limitandoci a dare qualche semplice condizione geometrica sufficiente affinché un campo verificante le (4.3.7) sia conservativo.

**Teorema 4.24** *Sia  $F : A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  un campo vettoriale di classe  $C^1(A)$  verificante la condizione (4.3.7). Se  $A$  è un aperto convesso o, più in generale, stellato rispetto ad un suo punto, allora  $F$  è conservativo.*

Una conseguenza immediata di questo teorema è il seguente risultato, denominato a volte Lemma di Poincaré.

**Teorema 4.25** *Se  $A \subset \mathbf{R}^n$  è aperto e  $F : A \rightarrow \mathbf{R}^n$  verifica la condizione (4.3.7) allora per ogni  $x_0 \in A$  esistono un intorno  $U$  di  $x_0$  ed una funzione  $f \in C^1(U)$  tali che  $\nabla f = F$  in  $U$ . Tali primitive  $f$  si dicono primitive o potenziali locali di  $F$ .*

Possiamo quindi affermare che nel problema enunciato all'inizio di questo paragrafo è essenziale il dato del dominio  $A$  in cui si vuole risolverlo. A questo punto, comunque, resta da vedere come si possono calcolare le primitive (locali o globali) di un campo dato  $F : A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , che supponiamo di classe  $C^1$ . Per prima cosa, si controlla la (4.3.7): se tale condizione non vale allora certamente il campo  $F$  non è (neanche localmente) conservativo. Se la (4.3.7) è verificata, il passo successivo è vedere se qualcuna delle condizioni nel Teorema 4.24 è soddisfatta: se ciò accade, esistono primitive globali. Altrimenti, le primitive che si troveranno saranno, almeno in principio (vedi Osservazione 4.26) solo locali. In ogni caso, si procede al loro calcolo seguendo uno dei seguenti metodi.

**Primo metodo (integrale lungo una curva)** Si fissa (arbitrariamente) un punto  $x_0$  in  $A$  e per ogni punto  $x$  di  $A$  si considera una curva regolare  $\varphi$  (anch'essa arbitraria) di estremi (nell'ordine)  $x_0$  ed  $x$ . L'integrale  $\int_{\varphi} F \cdot d\ell$  (che per il Teorema 4.21 dipende solo dal punto terminale  $x$ ) dà il potenziale di  $F$  che si annulla in  $x_0$ . Convieni (se la geometria dell'insieme  $A$  lo consente) scegliere un segmento oppure una poligonale con i lati paralleli agli assi coordinati. Se l'insieme  $A$  non è connesso per poligonali si ripete il procedimento in ciascuna componente connessa (vedi Esempio 2.20.3). Per esempio, consideriamo il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left( \frac{-2x}{(x^2 - y - 1)^2}, \frac{1}{(x^2 - y - 1)^2} \right), \quad (x, y) \in A = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = x^2 - 1\}.$$

Il campo  $F$  verifica la (4.3.7) e il suo dominio  $A$  è costituito dalle due componenti connesse  $A_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > x^2 - 1\}$  e  $A_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y < x^2 - 1\}$ , con  $A_1$  convesso ed  $A_2$  né convesso né stellato. Si possono calcolare le primitive in  $A_1$  partendo per esempio dall'origine ed integrando lungo segmenti. Fissato il punto generico  $(x, y) \in A_1$ , il segmento di estremi  $(0, 0)$  e  $(x, y)$  ha parametrizzazione  $\varphi(t) = (tx, ty)$ ,  $t \in [0, 1]$ . La primitiva nulla nell'origine vale allora in  $(x, y)$

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} F \cdot d\ell &= \int_0^1 \left( \frac{-2tx}{(t^2x^2 - ty - 1)^2}, \frac{1}{(t^2x^2 - ty - 1)^2} \right) \cdot (x, y) dt = \int_0^1 \frac{-2tx^2 + y}{(t^2x^2 - ty - 1)^2} dt \\ &= \left[ \frac{1}{t^2x^2 - ty - 1} \right]_0^1 = \frac{1}{x^2 - y - 1} + 1. \end{aligned}$$

In  $A_2$  possiamo fissare ad esempio il punto  $P_0(0, -2)$  ed integrare fino a  $P(x, y)$  lungo la poligonale  $\varphi$  di vertici  $P_0, P_1, P$ , con  $P_1(x, -2)$ . Posto

$$\varphi(t) = \begin{cases} (2tx, -2) & \text{per } 0 \leq t \leq 1/2 \\ (x, -2 + (2t - 1)(y + 2)) & \text{per } 1/2 < t \leq 1, \end{cases}$$

si ha

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} F \cdot d\ell &= \int_0^{1/2} \frac{-8tx^2}{(4t^2x^2 + 1)^2} dt + \int_{1/2}^1 \frac{2(y+2)}{[x^2 - (2t-1)(y+2) + 1]^2} dt \\ &= \left[ \frac{1}{4t^2x^2 + 1} \right]_0^{1/2} + \left[ \frac{1}{x^2 - (2t-1)(y+2) + 1} \right]_{1/2}^1 = \frac{1}{x^2 - y - 1} - 1 \end{aligned}$$

e quest'ultima funzione è la primitiva di  $F$  in  $A_2$  che si annulla in  $(0, -2)$ . In generale, le primitive di  $F$  in  $A$  sono allora

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y - 1} + c_1 \chi_{A_1}(x, y) + c_2 \chi_{A_2}(x, y),$$

dove  $\chi_E$  denota la *funzione caratteristica* dell'insieme  $E$ , vedi (6.2.1).

**Secondo metodo (primitive parziali)** Si calcola l'integrale indefinito della prima componente di  $F$  rispetto ad  $x_1$ :

$$\int F_1(x_1, \dots, x_n) dx_1;$$

sia  $f_1$  una primitiva. Se  $F_1$  dipendesse solo da  $x_1$ , il risultato sarebbe determinato a meno di una costante, ma, poiché sono presenti le altre variabili, che entrano solo come parametri nel calcolo dell'integrale,  $f_1$  sarà determinata *a meno di una funzione delle variabili*  $x_2, \dots, x_n$ , sia  $g(x_2, \dots, x_n)$ . Si impone allora che

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = F_i(x) \quad \forall i = 2, \dots, n$$

e si usano queste equazioni per determinare  $g$ . Per esempio, sia

$$F(x, y) = \left( \frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2} \right), \quad (x, y) \in A = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Si verifica facilmente che  $F$  verifica (4.3.7). Allora

$$\int \frac{2x}{x^2 + y^2} dx = \log(x^2 + y^2) + g(y);$$

con la notazione precedente,  $f_1(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ . Imponendo

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) + g'(y) = \frac{\partial}{\partial y} \log(x^2 + y^2) + g'(y) = F_2(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

si ottiene  $g'(y) = 0$ , ossia  $g$  costante, e, poiché  $A$  è connesso per poligonali, l'espressione  $f(x, y) = \log(x^2 + y^2) + c$ , al variare di  $c \in \mathbf{R}$ , rappresenta tutte le primitive di  $F$ .

**Osservazione 4.26** Se consideriamo l'esempio precedente, possiamo notare che il dominio  $A$  del campo studiato non è né convesso né stellato, sicché non si può affermare a

priori che esistano primitive globali in  $A$ ; anzi, visto che è lo stesso dominio dell'esempio 4.23, sappiamo che in generale non possiamo aspettarci che ce ne siano. In realtà il calcolo delle primitive, inizialmente solo locali, ha condotto direttamente ad ottenere primitive globali, dal momento che le funzioni  $\log(x^2 + y^2) + c$  sono definite in tutto l'aperto  $A$ . Quest'eventualità va sempre considerata: dopo aver calcolato le primitive locali, un esame del loro dominio naturale di definizione dirà se sono solo locali oppure globali.

Nel caso di  $\mathbf{R}^2$  si può dare una condizione geometrica su  $A$  più generale di quelle date nel Teorema 4.24 affinché il campo  $F : A \rightarrow \mathbf{R}^2$  sia conservativo.

**Proposizione 4.27** *Sia  $F : A \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  un campo vettoriale di classe  $C^1(A)$  verificante la condizione (4.3.7). Supponiamo che  $A$  verifichi la seguente condizione:*

*per ogni  $B \subset \mathbf{R}^2$  tale che  $\partial B$  sia il sostegno di una curva regolare contenuta in  $A$  risulta  $B \subset A$ ;*

*allora  $F$  è conservativo.*

Per esempio, il dominio  $A = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  nell'esempio 4.23 non gode della proprietà considerata nella proposizione precedente: la circonferenza di centro l'origine e raggio  $R$ , per esempio, è la frontiera del cerchio  $B_R(0)$ , che *non è contenuto in  $A$* . Lo stesso accade per tutte le curve discusse dopo lo stesso esempio.

## CAPITOLO 5

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Le equazioni differenziali ordinarie esprimono una relazione funzionale tra un certo numero di derivate di una funzione (scalare o vettoriale) di una variabile reale  $y(t)$  che è l'incognita dell'equazione. Possiamo quindi dire che la forma più generale di un'equazione differenziale ordinaria è la seguente

$$(5.0.1) \quad F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k)}(t)) = 0.$$

Il termine *ordinarie* è usato per distinguerle dalle equazioni differenziali *alle derivate parziali* che coinvolgono funzioni di più variabili e le loro derivate parziali. Le equazioni che coinvolgono funzioni vettoriali sono a volte chiamate *sistemi*, e per essi useremo spesso la notazione vettoriale, che è più compatta; se  $y$  in (5.0.1) è a valori in  $\mathbf{R}^n$ , allora s'intenderà che  $F$  è funzione di  $(n(k+1) + 1)$  variabili reali, a valori in  $\mathbf{R}^n$ . Nel seguito parleremo di equazioni anche nel caso vettoriale, dando enunciati unificati. L'*ordine* di un'equazione differenziale è l'ordine massimo delle derivate che vi compaiono, ad esempio l'ordine dell'equazione (5.0.1) è  $k$ .

Osserviamo che in realtà *ogni sistema differenziale si può ricondurre ad un sistema di ordine 1*, a patto di aumentare la dimensione del codominio delle incognite, cioè il numero di equazioni del sistema. Vedremo questo nel caso particolare delle equazioni (scalari) di ordine  $k$  qualunque. Per questa ragione, possiamo limitarci a studiare sistemi del primo ordine, senza perdita di generalità.

Nel seguito indicheremo con  $t$  la variabile reale indipendente, con  $y$  la funzione (scalare o vettoriale) incognita e useremo le lettere  $I, J$  per indicare gli intervalli di definizione delle soluzioni. Per prima cosa, definiamo in modo dettagliato che cosa si intende per *soluzione* di un'equazione differenziale.

**Definizione 5.1 (Soluzioni locali, massimali, globali)** *Siano  $A \subset \mathbf{R}^{n+2}$ ,  $F : A \rightarrow \mathbf{R}^n$  una funzione continua, e consideriamo l'equazione differenziale  $F(t, y, y') = 0$  e la funzione  $u : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ .*

1. *La funzione  $u$  è una soluzione locale se il suo dominio  $I$  è un intervallo reale,  $u$  è derivabile in  $I$ , il punto  $(t, u(t), u'(t))$  appartiene ad  $A$  per ogni  $t \in I$ , e vale l'eguaglianza  $F(t, u(t), u'(t)) = 0$  per ogni  $t \in I$ .*

2. Si dice che la funzione  $v : J \rightarrow \mathbf{R}^n$  è un prolungamento della soluzione locale  $u$  se  $v$  è a sua volta una soluzione locale, l'intervallo  $J$  include  $I$  e  $v(t) = u(t)$  per ogni  $t \in I$ ; se  $J$  include propriamente  $I$  si dice che  $v$  è un prolungamento proprio.
3. Si dice che  $u$  è una soluzione massimale se è una soluzione locale e non ammette prolungamenti propri.
4. Se  $A = J \times \mathbf{R}^{n+1}$ , con  $J \subset \mathbf{R}$  intervallo, si dice che  $u$  è soluzione globale se è soluzione locale e  $I = J$ .
5. Si dice integrale generale, o soluzione generale, l'insieme di tutte le soluzioni massimali.

Nel seguito, col termine soluzione privo di ulteriori specificazioni intenderemo sempre una soluzione locale.

Data un'equazione differenziale, affronteremo i seguenti problemi:

1. Esistono soluzioni?
2. In caso affermativo, si può dire quante sono?
3. Si possono dare condizioni affinché la soluzione esista e sia unica?
4. Le soluzioni trovate sono sempre globali, o almeno massimali?
5. Per quali classi di equazioni si possono dare dei metodi di calcolo delle soluzioni?

Indichiamo il tipo di risultati che ci si può attendere nel seguente esempio.

**Esempio 5.2** In generale un'equazione può non avere alcuna soluzione. Per esempio, l'equazione  $(y')^2 = -e^y$  non ha alcuna soluzione (il primo membro è  $\geq 0$  e il secondo è  $< 0$ ).

Tipicamente, se un'equazione ha soluzioni esse sono infinite. Per esempio, la più semplice equazione differenziale del primo ordine,  $y' = f(x)$ , dove  $f$  è una funzione continua in un intervallo  $I$ , ha per soluzione generale l'integrale indefinito di  $f$ , a norma del Teorema fondamentale del calcolo; in altri termini, fissato  $x_0 \in I$ :

$$y' = f(x) \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt + c_0$$

con  $c_0 \in \mathbf{R}$  costante arbitraria. Analogamente

$$y'' = f(x) \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \int_{x_0}^x \left( \int_{x_0}^t f(s)ds \right) dt + c_1x + c_0$$

con  $c_0, c_1 \in \mathbf{R}$  costanti arbitrarie. Allo stesso modo, la soluzione dell'equazione  $y^{(k)} = f(x)$  dipende da  $k$  parametri, o, più precisamente, da un polinomio arbitrario di grado  $k - 1$ .

Vedremo che questo è un fatto generale: la soluzione di un'equazione differenziale di ordine  $k$  dipende da  $k$  costanti arbitrarie, e se ne può selezionare una assegnando  $k$  condizioni indipendenti. Vedremo nel prossimo paragrafo alcuni risultati che assicurano l'esistenza e l'unicità della soluzione di un problema standard costituito da un'equazione differenziale ed opportune altre condizioni.

Le soluzioni delle equazioni differenziali, anche semplici, in generale non sono globali. Per esempio, vedremo (vedi Paragrafo 5.3.a) che l'integrale generale dell'equazione  $y' = y^2$  è dato da  $u(x) = c/(1 - cx)$ , al variare di  $c \in \mathbf{R}$ , e nessuna di queste funzioni è definita in  $\mathbf{R}$ , malgrado il dominio di  $f(x, y) = y^2$  sia  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  ed  $f$  sia regolare (vedi Osservazione 5.9).

## 5.1 Teoremi di esistenza

L'equazione (5.0.1) è troppo generale per poter ottenere risultati significativi, quindi considereremo, nella trattazione generale, solo equazioni *in forma normale*, cioè del tipo

$$(5.1.2) \quad y' = f(t, y)$$

con  $f$  continua. Nel caso delle equazioni del primo ordine  $y' = f(t, y)$ , la funzione  $f(t, y)$  assegna ad ogni punto del piano  $ty$  una direzione, quella della retta il cui coefficiente angolare è  $f(t, y)$ . Quindi, in termini geometrici, cercare una soluzione dell'equazione vuol dire cercare le curve (anzi i grafici)  $\Gamma$  tali che, in ogni loro punto, la retta tangente a  $\Gamma$  abbia coefficiente angolare uguale a  $f(t, y)$ .

In questa Sezione daremo inizialmente un teorema generale di esistenza *globale* ed unicità per equazioni o sistemi a crescita al più lineare con una condizione iniziale.

**Definizione 5.3 (Problema di Cauchy)** *Sia  $A \subset \mathbf{R}^{n+1}$  aperto, ed  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$  continua; si dice problema di Cauchy la coppia di equazioni*

$$(5.1.3) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

dove  $(t_0, y_0) \in A$ .

Per prima cosa, notiamo che il problema di Cauchy precedente è equivalente ad un'equazione integrale.

**Lemma 5.4** *Siano  $A \subset \mathbf{R}^{n+1}$  aperto,  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$  continua e  $(t_0, y_0) \in A$ ; siano inoltre  $I$  un intervallo reale contenente  $t_0$  e  $u : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ . Sono equivalenti:*

- (i)  $u \in C^1(I)$  è soluzione del problema di Cauchy (5.1.3).
- (ii)  $u$  è continua in  $I$  e verifica l'equazione

$$(5.1.4) \quad u(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds, \quad t \in I.$$

DIM. (i)  $\Rightarrow$  (ii). Per il teorema fondamentale del calcolo, dal momento che vale (5.1.3), risulta

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(s) ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

per ogni  $t \in I$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Poiché  $u$  ed  $f$  sono continue, la funzione  $s \mapsto f(s, u(s))$  è continua e quindi integrandola tra  $t_0$  e  $t$  si ottiene una funzione  $C^1(I)$ . Siccome vale (5.1.4), anche  $u$  è di classe  $C^1(I)$  e risulta  $u(t_0) = y_0$ . Per il teorema fondamentale del calcolo, la derivata di  $u$  è uguale all'integrando, cioè vale  $u'(t) = f(t, u(t))$  per ogni  $t \in I$  e  $u$  è soluzione di (5.1.3).  $\square$

L'utilità del lemma precedente consiste nel fatto che la ricerca della soluzione del problema di Cauchy viene ridotta alla ricerca di una funzione solo *continua*, e questo facilita la dimostrazione dell'esistenza della soluzione. Per quanto riguarda l'unicità invece, sarà utile il seguente enunciato, che è un caso particolare di un risultato noto come *Lemma di Gronwall*.

**Lemma 5.5** *Siano  $L > 0$ ,  $I$  un intervallo,  $t_0 \in I$  e  $w : I \rightarrow [0, +\infty)$  una funzione continua. Se*

$$w(t) \leq L \left| \int_{t_0}^t w(s) ds \right| \quad \forall t \in I$$

*allora  $w(t) = 0$  per ogni  $t \in I$ .*

DIM. Ragioniamo dapprima per  $t \geq t_0$ . Posto, per ogni  $\varepsilon > 0$ ,

$$v_\varepsilon(t) = \varepsilon + L \int_{t_0}^t w(s) ds,$$

risulta  $v'_\varepsilon(t) = Lw(t)$ , e, per ipotesi,  $v'_\varepsilon/v_\varepsilon \leq L$ , per cui:

$$\log \frac{v_\varepsilon(t)}{\varepsilon} = \int_{t_0}^t \frac{v'_\varepsilon(s)}{v_\varepsilon(s)} ds \leq L(t - t_0)$$

e quindi  $w(t) \leq v_\varepsilon(t) \leq \varepsilon \exp\{L(t - t_0)\}$  per ogni  $t \in I$ ,  $t \geq t_0$ . Per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$  segue  $w = 0$ .

Per  $t \leq t_0$ , basta applicare il ragionamento precedente alla funzione  $v(t) = w(t_0 - t)$ .  $\square$

Possiamo ora provare il principale risultato di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy.

**Teorema 5.6 (Esistenza globale in intervalli compatti)** *Siano  $A = [a, b] \times \mathbf{R}^n$  ed  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$  una funzione continua. Supponiamo che esista una costante  $L > 0$  tale che valga la condizione*

$$(5.1.5) \quad \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq L\|y - z\| \quad \forall t \in [a, b], y, z \in \mathbf{R}^n.$$

Allora, per ogni  $(t_0, y_0) \in A$  esiste un'unica soluzione globale del problema di Cauchy

$$(5.1.6) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

DIM. A norma del Lemma 5.4, cercheremo una funzione continua  $u : I \rightarrow \mathbf{R}^n$  tale che valga (5.1.4). Tale funzione sarà ottenuta come limite uniforme di una successione di funzioni continue, e, poiché l'integrale vettoriale nel membro destro è eseguito come al solito componente per componente, useremo il fatto che i risultati visti nel Capitolo 1 si estendono al caso vettoriale (vedi Osservazione 2.46).

Definiamo per ricorrenza la successione di funzioni:

$$u_0(t) = y_0, \quad u_{h+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_h(s)) ds, \quad h \in \mathbf{N},$$

e proviamo che converge uniformemente in  $[a, b]$  alla soluzione (unica) di (5.1.6). Posto  $M = \sup\{\|f(t, y_0)\| : t \in [a, b]\}$ , il primo passo è la dimostrazione, per induzione, della seguente diseuguaglianza:

$$(5.1.7) \quad \|u_h(t) - u_{h-1}(t)\| \leq \frac{ML^{h-1}|t - t_0|^h}{h!}, \quad h \geq 1, t \in [a, b].$$

La diseuguaglianza è ovvia per  $h = 1$ :

$$\|u_1(t) - u_0(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, y_0)\| ds \right| \leq M|t - t_0|.$$

Supposta vera la (5.1.7) per un certo valore  $h$ , proviamola per il valore  $h + 1$ . Risulta:

$$\begin{aligned} \|u_{h+1}(t) - u_h(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, u_h(s)) - f(s, u_{h-1}(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L \|u_h(s) - u_{h-1}(s)\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \frac{ML^h |s - t_0|^h}{h!} ds \right| = \frac{ML^h |t - t_0|^{h+1}}{(h+1)!}. \end{aligned}$$

Prendendo l'estremo superiore per  $t \in [a, b]$ , segue

$$(5.1.8) \quad \sup_{t \in [a, b]} \|u_h(t) - u_{h-1}(t)\| \leq \frac{ML^{h-1}|b - a|^h}{h!}, \quad h \geq 1.$$

Il secondo membro di (5.1.8) è il termine generale di una serie numerica convergente, e quindi per il criterio di convergenza totale di Weierstrass (Teorema 1.14) la serie

$$(5.1.9) \quad \sum_{h=1}^{\infty} (u_h(t) - u_{h-1}(t))$$

converge uniformemente in  $[a, b]$ . Poiché sussiste la seguente ovvia relazione tra i termini della successione  $(u_h)_h$  e la successione delle somme parziali di (5.1.9)

$$u_h(t) = y_0 + \sum_{k=1}^h (u_k(t) - u_{k-1}(t)),$$

la convergenza uniforme della (5.1.9) equivale alla convergenza uniforme della successione  $(u_h)_h$  in  $[a, b]$ . Detta  $u : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  la funzione limite,  $u$  è una funzione continua in  $[a, b]$  per il Teorema 1.5. Inoltre, per la condizione (5.1.5) risulta

$$\|f(t, u_h(t)) - f(t, u(t))\| \leq L \|u_h(t) - u(t)\|$$

e quindi anche la successione  $(f(t, u_h(t)))_h$  converge ad  $f(t, u(t))$  uniformemente in  $[a, b]$ . Per il Teorema 1.7 allora

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, u_h(s)) ds = \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

per ogni  $t \in [a, b]$  e quindi si può passare al limite per  $h \rightarrow \infty$  nell'equazione che definisce  $u_h$ , ottenendo che la funzione  $u$  verifica l'equazione (5.1.4) e quindi risolve il problema di Cauchy (5.1.6).

Resta da provare l'unicità della soluzione. Se  $v \in C([a, b])$  è un'altra soluzione, anch'essa verifica (5.1.4), e quindi, posto  $w(t) = \|u(t) - v(t)\|$ , risulta:

$$w(t) \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \right| \leq L \left| \int_{t_0}^t w(s) ds \right|.$$

Per il Lemma 5.5, si ha allora  $w = 0$ , quindi  $u = v$  e la soluzione è unica.  $\square$

Le ipotesi del teorema precedente sono piuttosto restrittive, ed infatti consentono una conclusione ottimale, cioè l'esistenza di una soluzione globale. In condizioni per certi versi più generali si ottiene una conclusione più debole.

**Teorema 5.7 (Esistenza locale)** *Siano  $A \subset \mathbf{R}^{n+1}$  aperto ed  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$  una funzione di classe  $C^1(A)$ . Allora, per ogni  $(t_0, y_0) \in A$  esiste un'unica soluzione massimale del problema di Cauchy (5.1.6).*

Anche se  $A$  è del tipo  $I \times \mathbf{R}^n$ , con  $I$  intervallo non compatto (quindi non chiuso o non limitato, possibilmente anche coincidente con  $\mathbf{R}$ ), in generale, la soluzione fornita dal teorema precedente non è globale. Sotto ulteriori condizioni si ha esistenza di soluzioni globali.

**Teorema 5.8 (Esistenza globale in intervalli qualunque)** *Siano  $I \subset \mathbf{R}$  un intervallo,  $A = I \times \mathbf{R}^n$  ed  $f : A \rightarrow \mathbf{R}^n$  una funzione continua. Se per ogni compatto  $K \subset I$  esistono due costanti  $p, q > 0$  tali che*

$$(5.1.10) \quad \|f(t, y)\| \leq p + q\|y\| \quad \forall t \in K, y \in \mathbf{R}^n,$$

*allora tutte le soluzioni massimali dell'equazione  $y' = f(t, y(t))$  sono globali.*

**Osservazione 5.9** Il risultato precedente è basato sull'ipotesi che la funzione  $f$  abbia una crescita, per  $|y| \rightarrow +\infty$ , al più di ordine 1. In riferimento all'esempio dell'equazione  $y' = y^2$  discusso nell'esempio 5.2, in quel caso l'ordine d'infinito della  $f$  per  $|y| \rightarrow +\infty$  è 2, ed infatti non c'è esistenza globale. La condizione di crescita lineare è verificata anche sotto le ipotesi del Teorema 5.6, dal momento che (5.1.5) implica (5.1.10), per esempio con

$$p = \sup_{t \in [a,b]} \|f(t, 0)\|, \quad q = L.$$

Infatti, risulta

$$\begin{aligned} \|f(t, y)\| &\leq \|f(t, 0)\| + \|f(t, y) - f(t, 0)\| \leq \|f(t, 0)\| + L\|y\| \\ &\leq \sup_{t \in [a,b]} \|f(t, 0)\| + L\|y\| = p + q\|y\|. \end{aligned}$$

Viceversa, se nel Teorema 5.6 si parte da  $A = I \times \mathbf{R}^n$  con  $I$  non compatto e si assume che per ogni compatto  $K \subset I$  esista  $L > 0$  tale che valga (5.1.5) per ogni  $(x, y)$  e  $(x, z)$  in  $K \times \mathbf{R}^n$ , si può ancora provare l'esistenza di soluzioni globali procedendo come nel Teorema 5.6. Con la stessa notazione, la successione  $(u_n)$  convergerà stavolta *uniformemente sui compatti di  $I$*  e non uniformemente su tutto l'intervallo  $I$ .

I risultati precedenti sono stati enunciati per i sistemi del primo ordine e non per le equazioni sia perché, senza alcun aggravio di difficoltà, risultano in tal modo più generali, sia perché si possono applicare ad equazioni e sistemi di ordine qualunque con un semplice cambio di variabili. Il risultato che segue riguarda le equazioni (scalari) di ordine qualunque.

**Teorema 5.10 (Esistenza ed unicità per equazioni di ordine  $k$ )** *Siano  $A \subset \mathbf{R}^{k+1}$  aperto ed  $g : A \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione di classe  $C^1(A)$ . Allora, per ogni  $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}) \in A$  esiste un'unica soluzione massimale del problema di Cauchy*

$$(5.1.11) \quad \begin{cases} y^{(k)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k-1)}(t)) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(t_0) = y_{k-1} \end{cases}$$

*Se poi  $A = I \times \mathbf{R}^k$ , con  $I \subset \mathbf{R}$  intervallo, e per ogni compatto  $K \subset I$  esistono due costanti  $p, q > 0$  tali che*

$$(5.1.12) \quad |g(t, y)| \leq p + q\|y\| \quad \forall t \in K, y \in \mathbf{R}^k,$$

*allora tutte le soluzioni massimali dell'equazione  $y^{(k)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k-1)}(t))$  sono globali.*

**DIM.** Basta scrivere l'equazione in forma di sistema del primo ordine, e il problema di Cauchy (5.1.11) come (5.1.6), per poi applicare i Teoremi 5.7, 5.8. Per questo scopo, sia

$f : A \rightarrow \mathbf{R}^k$  definita da

$$f(t, u_1, \dots, u_k) = (u_2, \dots, u_k, g(t, u_1, \dots, u_{k-1}))$$

e notiamo che  $f$  è di classe  $C^1(A)$ , dal momento che lo è  $g$ . L'equazione in (5.1.11) si scrive allora in forma di sistema (nell'incognita vettoriale  $u = (u_1, \dots, u_k)$ ) nel modo seguente:

$$\begin{cases} u'_1 = f_1(t, u_1, \dots, u_k) = u_2, \\ u'_2 = f_2(t, u_1, \dots, u_k) = u_3, \\ \vdots \\ u'_{k-1} = f_{k-1}(t, u_1, \dots, u_k) = u_k, \\ u'_k = f_k(t, u_1, \dots, u_k) = g(t, u_1, \dots, u_{k-1}) \end{cases}$$

Analogamente si traducono le condizioni iniziali:

$$u_1(t_0) = y_0, \quad u'(t_0) = y_1, \dots, u^{(k-1)}(t_0) = y_{k-1}$$

ed è quindi possibile applicare il Teorema 5.7 visto per i sistemi. Per quanto riguarda l'esistenza globale, fissato  $K$  compatto contenuto in  $I$ , sono determinate per ipotesi due costanti  $p, q$  come in (5.1.12), e si ha

$$\|f(t, u)\| = (u_2^2 + \dots + u_k^2 + (g(t, u))^2)^{1/2} \leq \|u\| + |g(t, u)| \leq p + (1 + q)\|u\|,$$

sicché si può applicare il Teorema 5.8.  $\square$

## 5.2 Equazioni lineari

In questa Sezione studiamo un'importante classe di equazioni differenziali, cioè quelle *lineari*. La loro importanza risiede principalmente nel fatto che quasi tutti i modelli concreti, in prima approssimazione, sono lineari. Dal nostro punto di vista, la teoria è completa e va da una descrizione dell'integrale generale valida per tutte le equazioni lineari a coefficienti continui ad un metodo di calcolo esplicito nel caso dei coefficienti costanti. In questo paragrafo, consideriamo fissato un intervallo reale  $I$  (che può essere limitato o no). Osserviamo che tutto quello che diremo sulle equazioni lineari si può generalizzare ai *sistemi lineari*, per altro con modifiche non sempre facili. I sistemi lineari, comunque, non saranno trattati in questi appunti.

### 5.2.a Risultati generali

**Definizione 5.11 (Operatori differenziali lineari)** *Date  $k$  funzioni continue  $a_0, \dots, a_{k-1} : I \rightarrow \mathbf{R}$ , definiamo l'operatore differenziale lineare di ordine  $k$  a coefficienti  $a_0, \dots, a_{k-1}$  ponendo, per ogni  $y \in C^k(I)$ :*

$$(5.2.13) \quad Ly = y^{(k)} + a_{k-1}(t)y^{(k-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y$$

È ovvio dalle proprietà della derivata che  $Ly$  è una funzione continua in  $I$  e che l'operatore  $L$  è lineare fra gli spazi vettoriali (di dimensione *infinita*)  $C^k(I)$  e  $C(I)$ , cioè verifica  $L(\alpha y + \beta z) = \alpha Ly + \beta Lz$  per ogni  $y, z \in C^k(I)$  e  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ . La forma generale di un'equazione differenziale lineare di ordine  $k$  è allora

$$(5.2.14) \quad Ly = \varphi$$

dove  $\varphi \in C(I)$  ne è il *termine noto*.

**Proposizione 5.12 (Esistenza di soluzioni)** *Tutte le soluzioni massimali dell'equazione  $Ly = \varphi$  sono globali.*

DIM. È una semplice applicazione del Teorema 5.10. Infatti, l'equazione si può scrivere nella forma  $y^{(k)} = g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k-1)}(t))$ , con  $g : I \times \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$  data da

$$g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k-1)}(t)) = -(a_{k-1}(t)y^{(k-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y) + \varphi(t);$$

allora, fissato un compatto  $K \subset I$ , per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz vale la condizione (5.1.12) con  $p = \sup_K |\varphi|$  e  $q = \sup_K (a_{k-1}^2(t) + \dots + a_1^2(t) + a_0^2(t))^{1/2}$ . □ QED

Accanto all'equazione  $Ly = \varphi$  considereremo l'*omogenea associata*  $Ly = 0$ .

**Lemma 5.13 (Integrale generale)** *L'integrale generale  $V$  dell'equazione  $Ly = \varphi$  è dato dalla somma dell'integrale generale  $V_0$  dell'omogenea associata  $Ly = 0$  e di una soluzione particolare della  $Ly = \varphi$ .*

DIM. Sia  $v$  una soluzione particolare (arbitraria) di  $Ly = \varphi$ . Se  $u$  è una qualunque soluzione di  $Ly = 0$  allora  $u + v$  risolve  $Ly = \varphi$ . Infatti:

$$L(u + v) = Lu + Lv = \varphi.$$

Questo prova l'inclusione  $V_0 + v \subset V$ . Viceversa, se  $v_1$  e  $v_2$  sono elementi di  $V$ , allora  $v_1 - v_2 \in V_0$ , dal momento che

$$L(v_1 - v_2) = Lv_1 - Lv_2 = 0.$$

□ QED

Il lemma precedente mostra che il problema della ricerca dell'integrale generale di  $Ly = \varphi$  si può ricondurre al problema della ricerca dell'integrale generale di  $Ly = 0$  e di una soluzione particolare di  $Ly = \varphi$ . Per quanto riguarda l'integrale generale dell'equazione omogenea, vale il seguente risultato.

**Teorema 5.14 (Integrale generale dell'omogenea)** *L'integrale generale  $V_0$  dell'equazione omogenea  $Ly = 0$  è un sottospazio di dimensione  $k$  dello spazio  $C^k(I)$ .*

DIM. Il fatto che  $V_0$  sia un sottospazio vettoriale è ovvio dal corso di Geometria ed Algebra, poiché  $V_0 = \text{Ker } L$  ed il nucleo di un'applicazione lineare è sempre un sottospazio

vettoriale. Il fatto nuovo è che la dimensione di  $V_0$  è finita (mentre potrebbe essere infinita, essendo infinita la dimensione di  $C^k(I)$ ) ed è proprio uguale all'ordine dell'equazione. Per provare questo, costruiamo una base di  $V_0$  costituita da  $k$  funzioni linearmente indipendenti risolvendo i seguenti  $k$  problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(t_0) = 1 \\ y'(t_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(t_0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Ly = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 1 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(t_0) = 0 \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} Ly = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(t_0) = 1 \end{cases}$$

Dette  $u_1, \dots, u_k$  le rispettive soluzioni, proviamo che esse sono linearmente indipendenti, cioè che se  $u(t) = \sum_{i=1}^k c_i u_i(t) = 0$  per ogni  $t \in I$  allora  $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ . Per questo, basta osservare che tutte le derivate di  $u$  sono nulle, e che  $u^{(i)}(t_0) = c_{i+1}$ , per  $i = 0, \dots, k-1$ . Per provare che le  $u_1, \dots, u_k$  sono un sistema di generatori per  $V_0$ , consideriamo  $u \in V_0$  e mostriamo che esistono costanti  $c_1, \dots, c_k$  tali che  $u(t) = \sum_{i=1}^k c_i u_i(t)$ . Fissata allora  $u \in V_0$ , poniamo  $c_i = u^{(i-1)}(t_0)$  e  $v(t) = \sum_{i=1}^k c_i u_i(t)$ . La funzione  $v$  risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(t_0) = c_1 \\ y'(t_0) = c_2 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(t_0) = c_k \end{cases}$$

la cui soluzione, per la scelta delle  $c_i$ , è la funzione  $u$  iniziale. Poiché il problema di Cauchy ha un'unica soluzione, risulta  $v = u$  ed  $u$  è combinazione lineare delle  $u_i$ .  $\square$

Date  $k$  soluzioni  $u_1, \dots, u_k$  dell'equazione  $Ly = 0$ , definiamo la *matrice Wronskiana*

$$(5.2.15) \quad W(t) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_k \\ u_1' & u_2' & \dots & u_k' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(k-1)} & u_2^{(k-1)} & \dots & u_k^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

La principale proprietà della matrice  $W$  è enunciata nella seguente proposizione.

**Proposizione 5.15 (Proprietà della matrice Wronskiana)** *Se le funzioni  $u_1, \dots, u_k$  sono linearmente indipendenti allora la matrice wronskiana (5.2.15)  $W(t)$  è invertibile per ogni  $t \in I$ ; viceversa, se  $W(t_0)$  è invertibile per un  $t_0 \in I$ , allora è invertibile per ogni  $t \in I$  e le  $u_1, \dots, u_k$  sono linearmente indipendenti.*

Notiamo che se le  $k$  soluzioni di  $Ly = 0$  sono linearmente dipendenti allora  $\text{Det } W(t) = 0$  per ogni  $t \in I$ , mentre se sono linearmente indipendenti allora  $\text{Det } W(t) \neq 0$  (e quindi  $W$  è invertibile) per ogni  $t \in I$ .

**Osservazione 5.16** Dal Lemma 5.13 e dal Teorema 5.14 segue che la soluzione generale dell'equazione  $Ly = \varphi$  si esprime nella forma

$$u(t) = c_1 u_1(t) + \cdots + c_k u_k(t) + v(t),$$

con le notazioni già introdotte. Tenendo conto anche della Proposizione 5.12, si ha quindi che, assegnando le  $k$  condizioni iniziali  $y(t_0) = y_1, \dots, y^{(k-1)}(t_0) = y_k$ , esiste un'unica soluzione globale del relativo problema di Cauchy. Per identificarla, bisogna evidentemente determinare i valori delle costanti  $c_1, \dots, c_k$  eseguendo le derivate, calcolandole nel punto  $t_0$  ed eguagliandole ai valori prescritti. La matrice del sistema così ottenuto è la matrice wronskiana delle  $u_i$  calcolata in  $t_0$ , che sappiamo essere invertibile, così che vengono univocamente determinate le  $c_i$ .

Restano da risolvere evidentemente due problemi: calcolare esplicitamente  $k$  soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea  $Ly = 0$  e calcolare una soluzione particolare dell'equazione completa  $Ly = \varphi$ . Non esiste un metodo generale per risolvere il primo di questi due problemi, che risolveremo completamente nel caso particolare (ancorché importante) delle equazioni a coefficienti costanti. Affrontiamo nel Paragrafo 5.2.c il secondo, che si può risolvere nel senso seguente: *se sono note  $k$  soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea, è possibile usarle per calcolare una soluzione dell'equazione completa*. Prima però trattiamo a parte il caso delle equazioni del primo ordine.

### 5.2.b Equazioni di ordine 1

L'equazione lineare del primo ordine si può scrivere in generale nella forma

$$(5.2.16) \quad y' + a(t)y = \varphi(t)$$

con  $a, \varphi$  funzioni continue in  $I$ . In questo caso esiste una semplice formula risolutiva.

**Proposizione 5.17** *Fissato  $t_0 \in I$ , l'integrale generale dell'equazione (5.2.16) è dato dalla formula*

$$(5.2.17) \quad u(t) = \exp\left\{-\int_{t_0}^t a(s)ds\right\} \left[ c + \int_{t_0}^t \exp\left\{\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds\right\} \varphi(\tau) d\tau \right]$$

al variare di  $c \in \mathbf{R}$ . Se poi all'equazione è associata la condizione iniziale  $y(t_0) = y_0$  si ha

$$(5.2.18) \quad u(t) = \exp\left\{-\int_{t_0}^t a(s)ds\right\} \left[ y_0 + \int_{t_0}^t \exp\left\{\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds\right\} \varphi(\tau) d\tau \right]$$

**DIM.** Risolviamo dapprima l'equazione omogenea nella forma  $y' = -a(t)y$ . Dividendo per  $y$  (supposta non nulla) si ha

$$\log |y(t)| - c = \int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = - \int a(t) dt;$$

prendendo l'esponenziale di ambo i membri e fissando gli estremi di integrazione si ottiene la soluzione generale  $cu_1(t)$ , con  $u_1$  data da

$$(5.2.19) \quad u_1(t) = \exp\left\{-\int_{t_0}^t a(s)ds\right\}.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma

$$v(t) = c(t)u_1(t) = c(t) \exp\left\{-\int_{t_0}^t a(s)ds\right\},$$

dove stavolta il coefficiente  $c$  (da determinarsi) è pensato variabile. Calcolando  $v'$  e sostituendo il risultato in (5.2.16) si ha

$$c'(t) \exp\left\{-\int_{t_0}^t a(s)ds\right\} = \varphi(t)$$

da cui

$$(5.2.20) \quad c(t) = \int_{t_0}^t \exp\left\{\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds\right\} \varphi(\tau) d\tau.$$

La soluzione generale  $u = cu_1 + v$  ( $c \in \mathbf{R}$ ) dell'equazione completa è dunque data da (5.2.17). Se è assegnata la condizione iniziale  $y(t_0) = y_0$ , per ottenere (5.2.18) basta imporre che  $u(t_0) = y_0$ , e si ottiene (5.2.18).  $\square$

Notiamo che nelle formule appena provate è riconoscibile la struttura dell'integrale generale data dal Lemma 5.13.

### 5.2.c Metodo di Lagrange o della variazione dei parametri

Questo procedimento per determinare una soluzione particolare  $v$  dell'equazione  $Ly = \varphi$  è una generalizzazione del procedimento usato nella Proposizione 5.17 per le equazioni di ordine 1. In questo caso, supponiamo di conoscere  $k$  soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea, siano  $u_1, \dots, u_k$ , e cerchiamo  $v$  nella forma:

$$(5.2.21) \quad v(t) = \sum_{i=1}^k c_i(t)u_i(t).$$

Sappiamo che se le  $c_i$  sono costanti allora la formula precedente fornisce una soluzione dell'equazione omogenea; vogliamo invece considerare le combinazioni lineari *con coefficienti variabili* (5.2.21) per vedere se è possibile determinare  $k$  coefficienti in modo da ottenere  $Lv = \varphi$ . L'idea è di imporre  $k$  condizioni alle  $k$  funzioni  $c_i$  e di risolvere il relativo sistema lineare. Fissate allora  $k$  soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea, per esempio le  $u_i$  costruite nella dimostrazione del Teorema 5.14, prendiamo una  $v$  come in (5.2.21) e cerchiamo di determinare in modo opportuno i coefficienti  $c_i$ .

Imponiamo le  $k$  condizioni

$$(5.2.22) \quad \sum_{i=1}^k c'_i u_i = 0, \quad \sum_{i=1}^k c'_i u'_i = 0, \quad \dots, \quad \sum_{i=1}^k c'_i u_i^{(k-2)} = 0, \quad \sum_{i=1}^k c'_i u_i^{(k-1)} = \varphi.$$

Il sistema risultante, nelle incognite  $c'_i$ , ha come matrice associata proprio la matrice Wronskiana delle  $u_i$ , che, per la Proposizione 5.15, è invertibile per ogni  $t \in I$  perché le  $u_i$  sono state scelte linearmente indipendenti. Il sistema è allora risolubile e, detta  $c'_1(t), \dots, c'_k(t)$  la  $k$ -pla di soluzioni, si verifica facilmente che, ponendo in (5.2.21) come coefficienti primitive di queste, si ottiene una soluzione di  $Ly = \varphi$ . Infatti, tenendo conto di (5.2.22), risulta:

$$\begin{aligned} v'(t) &= \sum_{i=1}^k c_i(t) u'_i(t) \\ v''(t) &= \sum_{i=1}^k c_i(t) u''_i(t) \\ &\vdots \\ v^{(k)}(t) &= \sum_{i=1}^k c_i(t) u_i^{(k)}(t) + \sum_{i=1}^k c'_i(t) u_i^{(k-1)}(t) \end{aligned}$$

e, di conseguenza:

$$\begin{aligned} Lv &= v^{(k)} + a_{k-1}(t)v^{(k-1)}(t) + \dots + a_0(t)v(t) \\ &= \left( \sum_{i=1}^k c_i(t) u_i(t) \right)^{(k)} + a_{k-1}(t) \left( \sum_{i=1}^k c_i(t) u_i(t) \right)^{(k-1)} + \dots + a_0(t) \left( \sum_{i=1}^k c_i(t) u_i(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^k c'_i(t) u_i^{(k-1)}(t) + \sum_{i=1}^k c_i L u_i \\ &= \varphi. \end{aligned}$$

**Osservazione 5.18** Usando una notazione vettoriale, possiamo riformulare il metodo visto. Definiamo il vettore  $U(t) = (u_1(t), \dots, u_k(t))$  le cui componenti sono le  $k$  soluzioni linearmente indipendenti e il vettore  $C(t) = (c_1(t), \dots, c_k(t))$  dei coefficienti indeterminati, così che risulti  $v = C \cdot U$ , e il vettore  $G(t) = (0, \dots, 0, \varphi(t))$ . Le condizioni che abbiamo imposto ai coefficienti si possono scrivere in forma compatta

$$W(t)C'(t) = G(t)$$

e, risolvendo questo sistema lineare e integrando, i coefficienti sono dati da

$$C(t) = \int W^{-1}(t)G(t)dt$$

dove l'integrale vettoriale va eseguito componente per componente. È utile confrontare questo metodo, ed i risultati trovati, con quanto visto nel Paragrafo precedente. In quel

caso,  $k = 1$  e sia  $U$  che  $C$  e  $G$  sono scalari; per quanto riguarda la matrice wronskiana, essa si riduce al solo termine  $u_1$  dato da (5.2.19), sicché

$$W^{-1}(t) = \exp\left\{\int a(t)dt\right\}$$

e la formula per  $C$  si riduce alla (5.2.20).

### 5.2.d Equazioni a coefficienti costanti

Come abbiamo detto, non esiste un metodo sistematico per il calcolo esplicito delle soluzioni di un'equazione a coefficienti *continui*, se non per le equazioni del primo ordine (vedi Proposizione 5.17). Esiste invece un metodo sistematico per le equazioni a coefficienti *costanti*, cioè quelle in cui i coefficienti  $a_i$  in (5.2.13) sono numeri reali. In questo caso, l'intervallo in cui si studia l'equazione è quello in cui è definito il termine noto, ed, in particolare, si può studiare l'equazione omogenea in tutto l'asse reale. Il metodo che presentiamo è basato sulla riduzione del problema ad un problema algebrico, la cui risoluzione è a sua volta basata sul Teorema fondamentale dell'algebra visto nella Prima parte (vedi Teorema ??). In questo momento abbiamo bisogno di una sua formulazione più articolata, che descriva completamente le soluzioni di un'equazione algebrica, distinguendo quelle reali da quelle complesse. Ricordiamo la definizione di radice di un polinomio e sua molteplicità (vedi Parte I, Definizione ??).

**Definizione 5.19 (Radice di un polinomio e molteplicità)** *Sia  $P$  un polinomio nella variabile  $\lambda$ , sia  $\lambda_0 \in \mathbf{C}$  e sia  $r \in \mathbf{N}$ . Si dice che  $\lambda_0$  è radice di  $P$  di molteplicità  $r$  se  $P$  è divisibile per  $(\lambda - \lambda_0)^r$  ma non per  $(\lambda - \lambda_0)^{r+1}$ .*

Ricordiamo il seguente importante risultato, conseguenza del Teorema ??, che precisa il Teorema ?? della Parte I.

**Teorema 5.20 (Radici dei polinomi)** *Sia  $P$  un polinomio di grado  $k$  a coefficienti reali nella variabile  $\lambda$ .*

- (i)  *$P$  ammette  $r \geq 0$  radici reali distinte  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  e  $2s \geq 0$  radici complesse (non reali) distinte (a due a due coniugate)  $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_{r+s}, \bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \bar{\lambda}_{r+s}$ .*
- (ii) *Dette  $m_1, \dots, m_r$  le molteplicità delle radici reali  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  ed  $m_{r+j}$  le molteplicità (comuni) delle radici complesse  $\lambda_{r+j}, \bar{\lambda}_{r+j}$  (per  $j = 1, \dots, s$ ), si ha*

$$m_1 + \dots + m_r + 2m_{r+1} + \dots + 2m_{r+s} = k.$$

- (iii) *Supposto che il coefficiente di  $\lambda^k$  in  $P(\lambda)$  sia 1, esistono numeri reali  $p_1, q_1, \dots, p_s, q_s$  tali che*

$$(5.2.23) \quad P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} (\lambda^2 + p_1\lambda + q_1)^{m_{r+1}} \dots (\lambda^2 + p_s\lambda + q_s)^{m_{r+s}}.$$

Osserviamo che il Teorema appena enunciato contiene varie informazioni che conviene commentare. Esso afferma che un polinomio possiede un numero di radici, ove contate con le rispettive molteplicità, pari al suo grado, sicché, per la definizione di radice e di molteplicità, è completamente scomponibile in fattori lineari. Le radici possono essere reali o complesse, ed abbiamo indicato con  $r$  il numero delle radici reali e con  $s$  il numero delle radici complesse non reali, senza escludere naturalmente che possa accadere che sia  $r = 0$  o  $s = 0$ . Siccome appunto in generale le radici sono *complesse* anche se i coefficienti sono reali, la scomposizione è possibile solo in  $\mathbf{C}$ . Inoltre, osserviamo che fin qui quanto detto vale anche per polinomi a coefficienti complessi. Ciò che è peculiare dei polinomi a coefficienti reali è che le radici complesse non reali *si presentano a coppie coniugate*, e questo rende possibile una scomposizione *puramente reale* come in (5.2.23), in cui compaiono fattori di secondo grado.

Il Teorema sulle radici dei polinomi ha un'applicazione diretta al calcolo della soluzione generale dell'equazione omogenea a coefficienti costanti. Sussiste infatti il seguente risultato, in cui adoperiamo le medesime notazioni del Teorema 5.20.

**Teorema 5.21 (Integrale generale dell'omogenea a coefficienti costanti)** *Data l'equazione a coefficienti reali*

$$(5.2.24) \quad Ly = y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0,$$

siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \lambda_{r+s}, \bar{\lambda}_{r+s}$  le radici del polinomio

$$(5.2.25) \quad P(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

con rispettive molteplicità  $m_1, \dots, m_r, m_{r+1}, \dots, m_{r+s}$ . Posto  $\lambda_{r+j} = \alpha_j + i\beta_j$  per  $j = 1, \dots, s$ , un sistema di generatori per l'integrale generale dell'equazione (5.2.24) è dato dalle  $k$  funzioni

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\ & e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \dots, t^{m_2-1}e^{\lambda_2 t}, \\ & \vdots \\ & e^{\lambda_r t}, te^{\lambda_r t}, \dots, t^{m_r-1}e^{\lambda_r t}, \\ & e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t), te^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t), \dots, t^{m_{r+1}-1}e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t), \\ & e^{\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t), te^{\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t), t^{m_{r+1}-1}e^{\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t), \\ & \vdots \\ & e^{\alpha_s t} \cos(\beta_s t), te^{\alpha_s t} \cos(\beta_s t), \dots, t^{m_{r+s}-1}e^{\alpha_s t} \cos(\beta_s t), \\ & e^{\alpha_s t} \sin(\beta_s t), te^{\alpha_s t} \sin(\beta_s t), \dots, t^{m_{r+s}-1}e^{\alpha_s t} \sin(\beta_s t). \end{aligned}$$

Come si è visto nel teorema precedente, nella ricerca delle soluzioni dell'equazione omogenea ha un ruolo fondamentale il polinomio definito in (5.2.25), che si dice *polinomio caratteristico* associato all'operatore  $L$  definito in (5.2.24).

**Osservazione 5.22** L'enunciato del teorema è indubbiamente complesso, anche per la quantità di parametri necessari per enunciarlo, e merita qualche commento. L'idea, ed il procedimento per il calcolo delle soluzioni dell'equazione  $Ly = 0$ , è invece semplice. Il primo passo consiste nell'associare all'operatore  $L$  il polinomio  $P(\lambda)$  che si ottiene sostituendo formalmente alla derivata di ordine  $j$  dell'incognita  $y$  la potenza  $\lambda^j$  della variabile  $\lambda$ . Si ottiene un polinomio algebrico di grado  $k$ , per il quale vale il Teorema fondamentale dell'algebra e quindi il Teorema 5.20. Il secondo passo è la determinazione delle radici del polinomio  $P$ , con le rispettive molteplicità. L'osservazione cruciale che lega le radici alle soluzioni dell'equazione differenziale è la seguente: *se  $\lambda_0$  è radice di  $P$  con molteplicità  $m$  allora le funzioni  $e^{\lambda_0 t}, te^{\lambda_0 t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda_0 t}$  sono soluzioni dell'equazione  $Ly = 0$* . Quest'affermazione è molto facile da verificare, dal momento che è sufficiente sostituire le funzioni indicate al posto dell'incognita  $y$  nell'equazione per controllare che l'equazione sia soddisfatta. Osserviamo anche che in questo modo ogni radice di  $P$  produce un numero di soluzioni di  $Ly = 0$  esattamente uguale alla molteplicità della radice considerata. Non abbiamo ancora preso in considerazione la differenza tra il caso  $\lambda_0 \in \mathbf{R}$  e il caso  $\lambda_0 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ . Nel caso  $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ , poniamo per fissare le idee  $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ , quanto detto è ancora vero, ma la funzione  $e^{\lambda_0 t}$  è a valori complessi, e quindi non rientra nella nostra trattazione. Sappiamo però che, essendo i coefficienti di  $L$  (e quindi di  $P$ ) *tutti reali*, anche il numero  $\bar{\lambda}_0 = \alpha - i\beta$  è radice del polinomio. Dalla definizione dell'esponenziale complesso (vedi ??) sappiamo che

$$e^{(\alpha \pm i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) \pm i \sin(\beta t)),$$

e quindi ad ogni coppia di soluzioni complesse  $e^{\lambda_0 t}$ ,  $e^{\bar{\lambda}_0 t}$  possiamo associare la coppia delle loro combinazioni lineari  $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ ,  $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ , che, essendo  $L$  lineare, sono ancora soluzioni, stavolta *reali*, dell'equazione. In definitiva, ad ogni coppia di soluzioni complesse  $t^j e^{\lambda_0 t}$ ,  $t^j e^{\bar{\lambda}_0 t}$  possiamo sostituire le coppie di soluzioni *reali*  $t^j e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ ,  $t^j e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ , per ogni  $j = 0, \dots, m-1$ . In questo modo avremo ottenuto dalle  $2s$  radici complesse del polinomio  $P$  (a due a due coniugate) un numero di soluzioni dell'equazione differenziale pari alla somma delle loro molteplicità.

È meno facile verificare un altro fatto importante, cioè che le funzioni indicate costituiscono un insieme *linearmente indipendente*. Fatto questo, possiamo concludere che alla fine del procedimento abbiamo trovato, come volevamo,  $k$  soluzioni reali linearmente indipendenti, che, per il Teorema 5.14, costituiscono una base del nucleo dell'operatore lineare  $L$ .

### 5.2.e Soluzione dell'equazione completa in casi particolari

Il metodo di variazione dei parametri ha il pregio di essere del tutto generale. Inoltre, poiché è basato sulla conoscenza dell'integrale generale dell'equazione omogenea, può senz'altro essere applicato nel caso delle equazioni a coefficienti costanti, caso in cui sappiamo calcolare esplicitamente l'integrale generale dell'equazione omogenea. Il suo difetto è che richiede molti calcoli, tra cui, come visto nell'Osservazione 5.18, il calcolo dell'inversa di una matrice, ed in più il calcolo di  $k$  integrali. Se però il termine noto  $\varphi$  è

di tipo particolare, è possibile utilizzare, nel caso delle equazioni a coefficienti costanti, un metodo più diretto, anche questo algebrico. Possiamo identificare la classe dei termini noti a cui si applica questo metodo alternativo dicendo che sono *le funzioni che sono soluzioni di qualche equazione lineare omogenea a coefficienti costanti*. A norma del teorema 5.21, queste sono le funzioni contenute nella lista presentata nello stesso teorema e le loro combinazioni lineari. Come nel caso dell'equazione omogenea, presentiamo un risultato generale, riservandoci di commentarlo successivamente.

**Teorema 5.23** Dato l'operatore  $L$  come in (5.2.24), se nell'equazione  $Ly = \varphi$  la funzione  $\varphi$  è del tipo

$$(5.2.26) \quad e^{\alpha t}[p_m(t) \cos \beta t + q_n(t) \sin \beta t] \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R},$$

con  $p_m(t)$  polinomio di grado  $m$  e  $q_n(t)$  polinomio di grado  $n$ , allora esiste una soluzione particolare  $v(t)$  del tipo

$$(5.2.27) \quad v(t) = t^h e^{\alpha t}[r_p(t) \cos \beta t + s_p(t) \sin \beta t]$$

con  $p = \max\{n, m\}$ ,  $r_p(t)$  e  $s_p(t)$  polinomi di grado  $p$  da determinarsi e  $h$  uguale alla molteplicità di  $\lambda = \alpha + i\beta$  rispetto al polinomio  $P$  dato da (5.2.25), con  $h = 0$  se  $\lambda$  non è radice di  $P$ .

Non dimostriamo questo teorema, che vogliamo comunque commentare brevemente. Come anticipato, l'ipotesi è che esista un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti  $M$  tale che  $M\varphi = 0$ . Ne segue che, se  $v$  è soluzione di  $Lv = \varphi$ , allora, applicando iterativamente gli operatori  $M$  ed  $L$  si ottiene  $MLv = M\varphi = 0$ , sicché  $v$  va cercata nel nucleo di  $ML$ , ossia è combinazione lineare dei generatori di tale nucleo. Queste considerazioni suggeriscono che il problema della determinazione di  $v$  si può ricondurre ad un problema algebrico, come quello del calcolo della soluzione generale di un'equazione omogenea.

**Osservazioni 5.24** 1. Se il termine noto  $\varphi$  è *somma* di due funzioni del tipo (5.2.26), allora  $v$  sarà somma di due funzioni del tipo (5.2.27), con i corrispondenti parametri.

2. La formula (5.2.26) esprime il caso più generale, e naturalmente, specializzando i parametri, comprende vari casi particolari che semplificano l'espressione (5.2.27):

- (i)  $\varphi = p_m$  polinomio: questo accade se  $\lambda = \alpha + i\beta = 0$
- (ii)  $\varphi$  esponenziale, se  $m = \beta = 0$ , o  $\varphi(t) = p_m(t)e^{\alpha t}$ , se solo  $\beta = 0$ .
- (iii)  $\varphi$  funzione trigonometrica, se  $n = \alpha = 0$ , o  $\varphi$  prodotto di un polinomio per una funzione trigonometrica, se solo  $\alpha = 0$ .

3. Un caso particolare rilevante si verifica quando  $\lambda$  *non è radice di  $P$* : in questo caso in (5.2.27)  $h = 0$  e la soluzione  $v$  ha un grado, nella sua parte polinomiale, non superiore al grado di  $\varphi$ .

4. Operativamente, si procede così. Si controlla se  $\lambda = \alpha + i\beta$  è radice di  $P$  o no: in caso affermativo, si registra la sua molteplicità  $h$  che entrerà in  $v$ ; in caso negativo, il termine  $t^h$  in (5.2.27) non compare. Si determinano i gradi  $m$  ed  $n$  dei polinomi  $p_m$  e  $q_n$ , ed il più grande fra loro, indicato con  $p$ ; ciò fatto, si scrivono due polinomi di grado  $p$ , a coefficienti indeterminati, che sono  $r_p$  ed  $s_p$  in (5.2.27). Gli altri parametri ( $\alpha$  e  $\beta$ ) sono di immediata determinazione, e quindi si possiede l'espressione esplicita di  $v$ . A quel punto, restano da determinare i coefficienti di  $r_p$  ed  $s_p$ . Per questo, si sostituisce  $v$  al posto dell'incognita in  $Ly$  e si eguaglia il risultato a  $\varphi$ . In questo modo si ottiene un sistema le cui incognite sono i coefficienti di  $r_p$  ed  $s_p$ , che il teorema assicura essere risolvibile.

### 5.3 Altre equazioni integrabili elementarmente

In questa Sezione presentiamo alcune importanti classi di equazioni differenziali ordinarie non lineari del 1° e del 2° ordine per le quali è noto il metodo di risoluzione.

#### 5.3.a Equazioni a variabili separabili

L'equazione differenziale del 1° ordine del tipo

$$(5.3.28) \quad y' = f(t)g(y),$$

dove  $f$  e  $g$  sono funzioni definite e continue negli intervalli aperti  $I$  e  $J$  rispettivamente, è detta *a variabili separabili*.

Supponendo  $g(y) \neq 0$  per ogni  $y \in J$  e dividendo per  $g(y)$  ambo i membri della equazione (5.3.28), si ha

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t);$$

da cui, integrando rispetto a  $t$ , si ottiene

$$\int \frac{y'(t)}{g(y(t))} dt = \int f(t) dt$$

(o equivalentemente, osservando che  $dy = y'(t)dt$ ,  $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt$ ).

Indicata con  $G$  una primitiva di  $\frac{1}{g}$  in  $J$  e con  $F$  una primitiva di  $f$  in  $I$ , dall'equazione precedente si ricava

$$(5.3.29) \quad G(y(t)) = F(t) + c,$$

con  $c$  parametro reale. Abbiamo così dimostrato che ogni funzione derivabile  $y(t)$  che soddisfa (5.3.29) è soluzione dell'equazione differenziale (5.3.28). In particolare la (5.3.29) rappresenta una famiglia di soluzioni in *forma implicita* della (5.3.28). Se la funzione  $G$  è anche invertibile, allora tale famiglia di soluzioni è data in *forma esplicita* da

$$y(t) = G^{-1}(F(t) + c)$$

con  $c$  parametro reale.

Si osservi che se  $g(y_0) = 0$  per qualche  $y_0 \in J$ , allora la funzione costante  $y_0(t) = y_0$ ,  $t \in I$ , è anche una soluzione dell'equazione differenziale (5.3.28), detta *soluzione stazionaria*, non appartenente alla famiglia di soluzioni definita da (5.3.29). Inoltre, si tenga presente che, in alcuni casi, le equazioni differenziali a variabili separabili potrebbero ammettere soluzioni non stazionarie differenti da quelle definite da (5.3.29). Per esempio, per l'equazione differenziale

$$y' = y^{2/3}$$

il metodo delle separazioni delle variabili sopra esposto fornisce le soluzioni  $y(t) = \frac{(t+c)^3}{27}$ . Ma tale equazione ammette come soluzioni anche la soluzione stazionaria  $y_0(t) = 0$  e le funzioni del tipo

$$y(t) = \begin{cases} \frac{(t-a)^3}{27} & \text{se } t < a \\ 0 & \text{se } a \leq t \leq b \\ \frac{(t-b)^3}{27} & \text{se } t > b \end{cases}$$

con  $a < 0 < b$ .

**Esempio 5.25** La seguente equazione differenziale del 1° ordine

$$y' = y^2 \log t$$

è chiaramente a variabili separabili. In particolare, essa ammette come soluzione la funzione identicamente nulla  $y_0(t) = 0$ ,  $t > 0$  (*soluzione stazionaria*). Inoltre, separando le variabili come sopra esposto si ha

$$\frac{dy}{y^2} = \log t dt;$$

da cui, integrando, si ottiene

$$-\frac{1}{y} = t(\log t - 1) + c.$$

Ne segue che tutte le altre soluzioni dell'equazione data sono della forma

$$y(t) = \frac{1}{t(1 - \log t) + C} \text{ con } t > 0 \text{ e } C \text{ costante arbitraria.}$$

**Osservazione 5.26** Equazioni differenziali del 1° ordine del tipo

$$(5.3.30) \quad y' = g(at + by),$$

con  $g$  funzione definita e continua in un intervallo aperto  $J$  e  $a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ , sono immediatamente riconducibili al caso delle equazioni differenziali a variabili separabili. Infatti, posto  $z(t) = at + by(t)$  cosicché  $z'(t) = a + by'(t)$ , la (5.3.30) diventa

$$z' = bg(z) + a$$

che è una equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili.

### 5.3.b Equazioni omogenee

L'equazione differenziale del 1° ordine del tipo

$$(5.3.31) \quad y' = g\left(\frac{y}{t}\right),$$

con  $g$  funzione definita e continua in un intervallo aperto  $J$ , è detta *omogenea*. Per la risoluzione di questa classe di equazioni differenziali basta fare una opportuna sostituzione. Infatti, posto  $z(t) = \frac{y(t)}{t}$  cosicché  $y(t) = tz(t)$  e  $y'(t) = z(t) + tz'(t)$ , la (5.3.31) diventa

$$z + tz' = g(z) \iff z' = \frac{1}{t}(g(z) - z)$$

che è una equazione differenziale a variabili separabili il cui metodo di risoluzione è stato dato in 5.3.a.

Riconducibili alla classe delle equazioni differenziali omogenee sono le equazioni differenziali del 1° ordine del seguente tipo

$$(5.3.32) \quad y' = g\left(\frac{at + by + c}{a't + b'y + c'}\right),$$

con  $g$  funzione definita e continua in un intervallo aperto  $J$  e  $a, a', b, b', c, c' \in \mathbf{R}$ .

Osserviamo che possono presentarsi i seguenti casi:

1. se  $a = a' = b = b' = 0$  e  $c' \neq 0$ , allora la (5.3.32) diventa

$$y' = g\left(\frac{c}{c'}\right)$$

e quindi ammette come soluzione le funzioni del tipo  $y(t) = g\left(\frac{c}{c'}\right)t + C$  al variare di  $C$  in  $\mathbf{R}$ ;

2. se  $a, a', b, b'$  non sono tutti nulli e  $a' = ha, b' = hb$  per qualche  $h \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ , allora la (5.3.32) diventa una equazione del tipo (5.3.30) per la cui risoluzione basta procedere come indicato nell'Osservazione 5.26;
3. se  $ab' - a'b \neq 0$ , allora la (5.3.32) può essere ricondotta ad una equazione differenziale omogenea con una opportuna sostituzione come è indicato di seguito.

Se  $ab' - a'b \neq 0$ , allora le rette di equazioni  $at + by + c = 0$  e  $a't + b'y + c' = 0$  non sono parallele e quindi si intersecano in un solo punto, sia  $P_0 = (t_0, y_0)$ . Posto

$$s = t - t_0 \quad \text{e} \quad z = y - y_0$$

e dato che  $at_0 + by_0 + c = a't_0 + b'y_0 + c' = 0$ , si deduce che  $z'(s) = \frac{dz}{ds} = \frac{dy}{dt}$  e

$$\begin{aligned} at + by + c &= a(s + t_0) + b(z + y_0) + c = as + bz + (at_0 + by_0 + c) = as + bz, \\ a't + b'y + c' &= a'(s + t_0) + b'(z + y_0) + c' = a's + b'z + (a't_0 + b'y_0 + c') = a's + b'z. \end{aligned}$$

Effettuando tali sostituzioni, la (5.3.32) diventa

$$z' = g\left(\frac{as + bz}{a's + b'z}\right) = g\left(\frac{a + b(z/s)}{a' + b'(z/s)}\right),$$

e si ottiene un'equazione differenziale omogenea.

**Esempio 5.27** Si consideri la seguente equazione differenziale del 1° ordine

$$y' = \frac{t + y}{t - y}$$

e si osservi che

$$y' = \frac{t\left(1 + \frac{y}{t}\right)}{t\left(1 - \frac{y}{t}\right)} = \frac{1 + \frac{y}{t}}{1 - \frac{y}{t}}.$$

Quindi l'equazione data è di tipo omogeneo cosicché per la sua risoluzione basta effettuare la sostituzione  $z(t) = \frac{y(t)}{t}$ , ottenendo la seguente equazione differenziale

$$z' = \frac{1 + z^2}{t(1 - z)}$$

che è a variabili separabili. Separando le variabili e integrando si ottiene

$$\int \frac{1 - z}{1 + z^2} dz = \int \frac{1}{t} dt,$$

cioè

$$\arctan z - \log \sqrt{1 + z^2} = \log |t| + c, \text{ con } c \text{ costante arbitraria.}$$

Ricordando che  $z(t) = \frac{y(t)}{t}$ , si ottiene che l'integrale generale in forma implicita dell'equazione data è il seguente

$$\arctan \frac{y(t)}{t} = \log \sqrt{t^2 + y^2(t)} + c, \text{ con } c \text{ costante arbitraria.}$$

### 5.3.c Equazioni di Bernoulli

L'equazione differenziale del 1° ordine del tipo

$$(5.3.33) \quad y' = a(t)y + b(t)y^\alpha,$$

dove  $a$  e  $b$  sono funzioni definite e continue nell'intervallo aperto  $I$  e  $\alpha \in \mathbf{R}$ , è detta *equazione di Bernoulli*.

Osserviamo che se  $\alpha = 0$  la (5.3.33) si riduce ad un'equazione differenziale lineare del 1° ordine il cui integrale generale è dato da (5.2.17). Invece, se  $\alpha = 1$  la (5.3.33) si riduce ad un'equazione differenziale del 1° ordine a variabili separabili il cui metodo di

risoluzione è stato dato in 5.3.a. Inoltre per un qualsiasi  $\alpha > 0$ , la (5.3.33) ammette come soluzione la funzione identicamente nulla. Per questo nel seguito supporremo che  $\alpha$  non sia né 0 né 1 e trascureremo tra le soluzioni la funzione identicamente nulla.

Il metodo di risoluzione per le equazioni differenziali di Bernoulli è il seguente.

Dividendo ambo i membri di (5.3.33) per  $y^\alpha$ , si ha

$$\frac{y'}{y^\alpha} = a(t)y^{1-\alpha} + b(t);$$

da qui, posto  $z(t) = (y(t))^{1-\alpha}$ , cosicché  $z'(t) = (1 - \alpha)(y(t))^{-\alpha}y'(t)$ , segue che

$$(5.3.34) \quad \frac{z'}{1 - \alpha} = a(t)z + b(t) \iff z' = (1 - \alpha)a(t)z + (1 - \alpha)b(t).$$

L'equazione (5.3.34) così ottenuta è chiaramente un'equazione differenziale lineare del primo ordine e quindi, per (5.2.17), il suo integrale generale è dato dalla seguente formula

$$(5.3.35) \quad z(t) = \exp\left\{-\int(\alpha - 1)a(t)dt\right\} \left[ c + \int \exp\left\{\int(\alpha - 1)a(s)ds\right\}(1 - \alpha)b(t)dt \right]$$

al variare di  $c \in \mathbf{R}$ .

A questo punto, ricordando che  $z(t) = (y(t))^{1-\alpha}$ , da (5.3.35) si ottiene l'integrale generale dell'equazione differenziale di Bernoulli (5.3.33).

**Esempio 5.28** La seguente equazioni differenziale del 1° ordine

$$y' = 2y + ty^2$$

è di tipo Bernoulli con  $\alpha = 2$ . Dividendo ambo i membri per  $y^2$  e ponendo  $z(t) = (y(t))^{-1}$ , si ottiene

$$-z' = 2z + t \iff z' + 2z = -t.$$

Per (5.2.17) l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare del 1° ordine così ottenuta è dato da

$$z(t) = e^{-2t} \left[ c - \int e^{2t} t dt \right] = e^{-2t} \left[ c - \frac{1}{2}e^{2t}t + \frac{1}{4}e^{2t} \right].$$

A questo punto, ricordando che  $z(t) = (y(t))^{-1}$ , si ottiene che l'integrale generale dell'equazione proposta è il seguente

$$y(t) = \frac{1}{e^{-2t} \left[ c - \frac{1}{2}e^{2t}t + \frac{1}{4}e^{2t} \right]}.$$

### 5.3.d Equazioni differenziali non lineari del 2<sup>o</sup> ordine

**Equazioni della forma  $y'' = f(t, y')$**  L'equazione differenziale del 2<sup>o</sup> ordine del tipo

$$(5.3.36) \quad y'' = f(t, y'),$$

dove  $f$  è una funzione continua con derivata continua rispetto alla seconda variabile in un aperto  $A \subset \mathbf{R}^2$ , si riduce ad un'equazione differenziale del 1<sup>o</sup> ordine ponendo  $z(t) = y'(t)$ , cosicché  $z'(t) = y''(t)$ . Infatti, effettuando tali sostituzioni la (5.3.36) diventa

$$z' = f(t, z),$$

il cui metodo di risoluzione dipende dalla forma analitica di  $f$ , come dimostra il seguente esempio.

**Esempio 5.29** Si consideri la seguente equazione differenziale del 2<sup>o</sup> ordine

$$y'' = (y')^2 + 1.$$

Posto  $z(t) = y'(t)$ , essa si riduce ad un'equazione differenziale del 1<sup>o</sup> ordine a variabili separabili. Infatti, diventa

$$z' = z^2 + 1,$$

da cui, separando le variabili e integrando, si ottiene

$$\arctan z = t + c \iff z = \tan(t + c) \text{ con } c \text{ costante arbitraria.}$$

Di conseguenza, l'integrale generale dell'equazione differenziale data è il seguente

$$y(t) = -\log |\cos(t + c)| + d \text{ con } c \text{ e } d \text{ costanti arbitrarie.}$$

**Equazioni del secondo ordine autonome** Le equazioni differenziali del 2<sup>o</sup> ordine del tipo

$$(5.3.37) \quad y'' = f(y, y'),$$

sono dette *autonome* perché la variabile  $t$  non vi compare esplicitamente e quindi, pensando al solito alla  $t$  come variabile temporale, sono tipici modelli di un sistema privo di termini forzanti, il cui comportamento è interamente governato dallo stato del sistema stesso.

Supposto che  $f$  sia una funzione di classe  $C^1$  in un aperto  $A \subset \mathbf{R}^2$ , l'equazione data si risolve integrando successivamente due equazioni differenziali del 1<sup>o</sup> ordine, in una delle quali la funzione incognita dipende dalla variabile  $y$ , che viene assunta come variabile indipendente. Infatti, posto

$$z(y) = y'(t) \implies y''(t) = \frac{dy'}{dt}(t) = \frac{dz}{dy}(y) \frac{dy}{dt}(t) = z(y)z'(y)$$

(dove abbiamo indicato con  $\dot{z}$  la derivata di  $z$  rispetto ad  $y$ ), la (5.3.37) diventa

$$(5.3.38) \quad z\dot{z} = f(y, z),$$

il cui metodo di risoluzione dipende ovviamente dalla forma analitica di  $f$ . Ora, supponendo che  $z = z(y, c_1)$  sia l'integrale generale di (5.3.38) con  $c_1 \in \mathbf{R}$  e ricordando che  $z = y'$ , si perviene alla seguente equazione differenziale del 1° ordine a variabili separabili:

$$y' = z(y, c_1),$$

il cui metodo di risoluzione è dato in 5.3.a e le cui soluzioni sono tutte e sole quelle di (5.3.37).

**Esempio 5.30** Si consideri il Problema di Cauchy

$$(5.3.39) \quad \begin{cases} y'' = y'(1 + y) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Effettuando la sostituzione  $z(y) = y'(t)$  come sopra indicato, l'equazione del problema di Cauchy (5.3.39) diventa

$$z\dot{z} = z(1 + y).$$

Oltre alla soluzione stazionaria  $z(y) = 0$ , da cui si ricava  $y(t) = c$  con  $c$  costante arbitraria (il problema (5.3.39) chiaramente non ammette come soluzione alcuna funzione costante), essa ammette come soluzioni le funzioni del tipo

$$z(y) = y + \frac{1}{2}y^2 + C_1 \iff y' = y + \frac{1}{2}y^2 + C_1, \text{ con } C_1 \text{ costante arbitraria.}$$

Di conseguenza, per le condizioni iniziali, la soluzione di (5.3.39) soddisfa la seguente equazione differenziale

$$y' = y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2} \iff y' = \frac{1}{2}(y^2 + 2y + 1).$$

A questo punto, separando le variabili e integrando, si ottiene

$$\int \frac{2}{(y+1)^2} dy = \int dt;$$

da qui segue

$$-\frac{2}{y+1} = t + C_2 \implies y(t) = -1 - \frac{2}{t+C_2}, \text{ con } C_2 \text{ costante arbitraria.}$$

Infine, dalla condizione iniziale  $y(0) = 0$  si ricava che la soluzione di (5.3.39) è la funzione

$$y(t) = y(t) = -1 - \frac{1}{t-2}.$$

Un caso particolare dell'equazione (5.3.37) è

$$y'' = f(y),$$

in cui non compare esplicitamente la  $y'$ . Col metodo visto, si ha successivamente  $z(y) = y'(t)$ ,  $y'' = z\dot{z}$  e quindi

$$\int z dz = \int f(y) dy$$

da cui, se l'integrale al secondo membro è positivo,

$$(y')^2 = 2 \int f(y) dy \implies y' = \sqrt{2 \int f(y) dy},$$

che è un'equazione a variabili separabili.

**Esempio 5.31** Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' = 2y^3 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Posto  $z(y) = y'(t)$ , risulta, procedendo come detto si ottiene:

$$\begin{cases} z\dot{z} = 2z^3 \\ z(1) = 1 \end{cases}$$

e quindi  $z(y) = y^2$ , da cui il problema

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

che ha soluzione  $y(t) = \frac{1}{1-t}$ .

## CAPITOLO 6

# INTEGRALI MULTIPLI

È molto importante il problema dell'integrazione di funzioni di più variabili reali, ad esempio per il calcolo di volumi, di momenti d'inerzia, ecc.

Noi ci limiteremo al caso di funzioni di due o tre variabili, ma il caso generale non presenta maggiori difficoltà, se non per le notazioni. La costruzione dell'integrale per funzioni di più variabili segue qui da vicino quella vista per funzioni di un variabile nel Paragrafo ??.

La definizione dell'integrale doppio ci permetterà anche di definire integrali su superficie nello spazio, così come si usano gli integrali semplici per definire gli integrali di linea.

### 6.1 Integrale di Riemann

Vogliamo definire il concetto di funzione integrabile secondo Riemann nel caso di due variabili. Estenderemo a questo scopo le nozioni di partizione, somma integrale, funzione integrabile, ecc.

Siano  $I = [a, b]$ ,  $J = [c, d]$  intervalli limitati e sia  $f : I \times J \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione limitata. Consideriamo due partizioni di  $I$  e  $J$ :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_h = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_k = d$$

Chiamiamo *partizione  $P$  del rettangolo  $I \times J$*  l'insieme di tutti i rettangoli  $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$  al variare di  $i, j$ . Definiamo

$$m(R_{ij}) = (x_{i+1} - x_i) \times (y_{j+1} - y_j)$$

e poniamo

$$M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f(x, y),$$

$$m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f(x, y).$$

Indichiamo con il termine *somma superiore di  $f$  relativa alla partizione  $P$*  il numero

$$S(f, P) = \sum_{i,j} M_{ij} m(R_{ij}).$$

Indichiamo con il termine *somma inferiore di  $f$  relativa alla partizione  $P$*  il numero

$$s(f, P) = \sum_{i,j} m_{ij} m(R_{ij}).$$

**Definizione 6.1 (Funzioni integrabili)** Diciamo che  $f$  è integrabile secondo Riemann su  $I \times J$  se risulta

$$\sup s(f, P) = \inf S(f, P)$$

al variare di tutte le possibili partizioni  $P$ . Tale valore comune è l'integrale di  $f$  su  $I \times J$  e si indica con

$$\iint_{I \times J} f dx dy.$$

Il risultato seguente estende al caso di due variabili il Teorema ??.

**Teorema 6.2 (Integrabilità delle funzioni continue)** Se la funzione  $f : I \times J \rightarrow \mathbf{R}$  è continua in  $I \times J$ , allora  $f$  è integrabile in  $I \times J$ .

L'integrale gode delle abituali proprietà già viste nel caso di una variabile (vedi Proposizione ??):

**Teorema 6.3 (Proprietà dell'integrale)** Supponiamo che le funzioni  $f, g : I \times J \rightarrow \mathbf{R}$  siano integrabili. Allora per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$

1.  $\iint_{I \times J} (\lambda f + \mu g) dx dy = \lambda \iint_{I \times J} f dx dy + \mu \iint_{I \times J} g dx dy$ ,
2. se  $f \geq 0$  allora  $\iint_{I \times J} f dx dy \geq 0$ ,
3.  $|\iint_{I \times J} f dx dy| \leq \iint_{I \times J} \sup |f| dx dy = \sup |f| m(I \times J)$ .

In maniera analoga si definisce l'integrale di una funzione di tre variabili su un parallelepipedo (prodotto cartesiano di tre intervalli  $I, J, K$ ), e valgono le proprietà analoghe a quelle appena enunciate.

## 6.2 Insiemi normali del piano e integrali doppi

Abitualmente si considerano domini di integrazione più generali dei rettangoli.

Per considerare integrali di funzioni su insiemi contenuti propriamente nel loro dominio, introduciamo la seguente comoda notazione. Chiamiamo *funzione caratteristica dell'insieme  $E$*  la funzione  $\chi_E : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  così definita:

$$(6.2.1) \quad \chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Usiamo subito la funzione caratteristica di un insieme per definire gli insiemi misurabili.

**Definizione 6.4 (Insiemi limitati misurabili)** *Un insieme limitato  $E \subset \mathbf{R}^2$  si dice misurabile se la sua funzione caratteristica è integrabile. In tal caso si definisce la misura (o area) di  $E$  ponendo*

$$m(E) = \int \int_{I \times J} \chi_E dx dy,$$

dove  $I \times J$  è un qualunque intervallo contenente  $E$ .

Si può allora definire l'integrale di  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  su un qualunque insieme misurabile  $E \subset A$  ponendo

$$\int \int_E f = \int \int_A f \chi_E,$$

purché  $f \chi_E$  sia integrabile in un qualunque rettangolo contenente  $E$ .

Notiamo anche che la definizione appena data estende la nozione di misura (o area) di un rettangolo introdotta all'inizio del capitolo. Inoltre, osserviamo che integrare  $\chi_E$  su un qualunque rettangolo contenente  $E$  è lo stesso che integrare la funzione di costante valore 1 sull'insieme  $E$ . Nell'Osservazione 6.8.2 confronteremo questa definizione con quella già data usando gli integrali di una variabile. Infine, facciamo presente che esistono insiemi *non misurabili*, in accordo col fatto che esistono funzioni (anche di una sola variabile) non integrabili (vedi osservazione ??).

Il calcolo effettivo di un integrale doppio, ove possibile, si riconduce in generale al caso di insiemi piani di geometria semplice. Tali insiemi si chiamano normali rispetto ad uno degli assi coordinati.

**Definizione 6.5 (Integrali doppi su insiemi normali)** *Si dice insieme normale rispetto all'asse  $x$  un insieme chiuso e limitato del tipo*

$$(6.2.2) \quad E = \{(x, y); x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

dove  $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  sono funzioni continue con  $\alpha(x) \leq \beta(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

Se  $E \subset I \times J$  e la funzione  $f$ , definita su  $E$ , si prolunga a zero al di fuori di  $E$ , allora  $f$  si dice integrabile su  $E$  se il prolungamento detto, denotato con  $f^*$ , è integrabile su  $I \times J$ ; in tal caso si pone

$$\int \int_E f dx dy = \int \int_{I \times J} f^* dx dy.$$

I risultati che presentiamo ora permettono di calcolare integrali su insiemi più generali di quelli normali: l'idea è di cercare di decomporre l'insieme dato in un numero finito di insiemi normali a due a due disgiunti, per poi calcolare gli integrali sui singoli pezzi e sommare i risultati ottenuti. Quest'idea può essere formalizzata, dal momento che, oltre alle proprietà analoghe a quelle dei teoremi 6.2 e 6.3, vale la proprietà di additività rispetto agli insiemi di integrazione.

**Teorema 6.6 (Proprietà di additività dell'integrale)** *Supponiamo che l'insieme  $E$  sia l'unione di un numero finito di insiemi normali  $E_h$  ( $h = 1, \dots, N$ ) a parti interne a due a due disgiunte e la funzione  $f : E \rightarrow \mathbf{R}$  sia integrabile. Allora*

$$\iint_E f dx dy = \sum_{h=1}^N \iint_{E_h} f dx dy.$$

Non abbiamo ancora affrontato il problema del calcolo effettivo degli integrali doppi. Nel caso di una variabile, lo strumento essenziale è il Teorema fondamentale del calcolo, che è basato sulla nozione di primitiva. Nel caso degli integrali doppi è di fondamentale importanza nel calcolo di integrali la seguente formula di riduzione che riduce il calcolo di un integrale doppio al calcolo di due integrali semplici.

**Teorema 6.7 (Teorema di riduzione per gli integrali doppi)** *Sia  $E \subset \mathbf{R}^2$  un insieme normale come in (6.2.2) e sia  $f : E \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua. Allora*

$$\iint_E f dx dy = \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

### Osservazioni 6.8

1. Per brevità si usano spesso le notazioni

$$\iint_E f dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy dx.$$

2. La formula di riduzione ci permette di mostrare che la misura di un insieme normale coincide con l'area definita usando gli integrali in una variabile nella Definizione ???. Infatti, se  $E \subset I \times J$  è un insieme normale come nella Definizione 6.5, si ha

$$m(E) = \iint_{I \times J} \chi_E dx dy = \iint_E dx dy = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x)) dx.$$

3. Ovviamente, si può dare in modo naturale la nozione di insieme normale rispetto all'asse  $y$ , e può naturalmente accadere che un insieme sia normale rispetto ad entrambi gli assi (basta pensare ad un cerchio), e vale l'analoga formula di riduzione. In tal caso, si hanno due modi di calcolare l'integrale dato, e la scelta dipende più che altro dalla facilità dei calcoli. In riferimento al Teorema 6.6, può essere utile decomporre  $E$  in insiemi  $E_h$  alcuni dei quali normali rispetto all'asse  $x$  ed altri rispetto all'asse  $y$ .

### 6.3 Insiemi normali dello spazio e integrali tripli

Nel caso delle funzioni di tre variabili abbiamo una definizione di insieme normale analoga alla (6.2.2). Siano  $I, J, K$  tre intervalli chiusi limitati.

**Definizione 6.9 (Integrali su insiemi normali in  $\mathbf{R}^3$ )** *Si dice insieme normale rispetto al piano  $z = 0$  un insieme del tipo*

$$(6.3.3) \quad G = \{(x, y, z); (x, y) \in E, \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

dove  $\phi, \psi : E \rightarrow \mathbf{R}$  sono funzioni continue con  $\phi(x, y) \leq \psi(x, y)$  per ogni  $(x, y) \in E$  ed  $E$  è un insieme piano normale.

Se  $G \subset I \times J \times K$  e la funzione  $f$ , definita su  $G$ , si prolunga a zero al di fuori di  $G$ , allora  $f$  si dice integrabile su  $G$  se il prolungamento detto, denotato con  $f^*$ , è integrabile su  $I \times J \times K$  e si pone

$$\iiint_G f dx dy dz = \iiint_{I \times J \times K} f^* dx dy dz.$$

Come nel caso piano, un insieme limitato  $G \subset \mathbf{R}^3$  si dice misurabile se la sua funzione caratteristica è integrabile su un qualunque parallelepipedo  $I \times J \times K$  contenente  $G$ . In tal caso si pone

$$m(G) = \iiint_{I \times J \times K} \chi_G dx dy dz$$

e la misura (volume) di  $G$  si può anche ottenere integrando la funzione di costante valore 1 sull'insieme  $G$ , in quanto

$$\iiint_G dx dy dz = \iiint_{I \times J \times K} \chi_G dx dy dz.$$

Valgono per gli integrali tripli i seguenti risultati, analoghi a quelli visti nel paragrafo precedente.

**Teorema 6.10 (Proprietà dell'integrale)** *Sia  $G \subset \mathbf{R}^3$  un insieme normale e supponiamo che le funzioni  $f, g : G \rightarrow \mathbf{R}$  siano integrabili. Allora per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$*

1.  $\iiint_G (\lambda f + \mu g) dx dy dz = \lambda \iiint_G f dx dy dz + \mu \iiint_G g dx dy dz,$
2. se  $f \geq 0$  allora  $\iiint_G f dx dy dz \geq 0,$
3.  $|\iiint_G f dx dy dz| \leq \iiint_G \sup |f| dx dy dz = \sup |f| m(G).$

**Teorema 6.11 (Proprietà di additività dell'integrale)** *Supponiamo che  $G \subset \mathbf{R}^3$  sia l'unione di un numero finito di insiemi normali  $G_h$  ( $h = 1, \dots, N$ ) a parti interne a due a due disgiunte e la funzione  $f : G \rightarrow \mathbf{R}$  sia integrabile. Allora*

$$\iiint_G f dx dy dz = \sum_{h=1}^N \iiint_{G_h} f dx dy dz.$$

**Teorema 6.12 (Integrabilità delle funzioni continue)** *Sia  $G \subset \mathbf{R}^3$  un insieme normale e supponiamo che la funzione  $f : G \rightarrow \mathbf{R}$  sia continua in  $G$ . Allora  $f$  è integrabile in  $G$ .*

Il teorema di riduzione si estende al caso degli integrali tripli. La corrispondente formula di riduzione riduce il calcolo di un integrale triplo al calcolo di un integrale semplice e un integrale doppio.

**Teorema 6.13 (Primo teorema di riduzione per gli integrali tripli)** *Sia  $G \subset \mathbf{R}^3$  un insieme normale come in (6.3.3) e sia  $f : G \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua in  $G$ . Allora*

$$\iiint_G f dx dy dz = \iint_E \left( \int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dx dy.$$

È chiaro che per il calcolo dell'integrale doppio si usa la formula di riduzione vista in precedenza. Questo metodo di integrazione è detto anche "per fili".

**Osservazione 6.14 (Volume di un sottografico)** *Se  $E \subset \mathbf{R}^2$  è un insieme piano normale ed  $f : E \rightarrow \mathbf{R}$  è positiva, il suo integrale fornisce il volume dell'insieme*

$$G = \{(x, y, z); (x, y) \in E, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

cioè del sottografico di  $f$  delimitato dal piano  $z = 0$ . Infatti, applicando la formula di riduzione, risulta:

$$m(G) = \iiint_G dx dy dz = \iint_E \left( \int_0^{f(x,y)} dz \right) dx dy = \iint_E f(x, y) dx dy.$$

Più in generale, come nel caso della Definizione ??, se  $f, g : E \rightarrow \mathbf{R}$  sono integrabili, con  $f(x, y) \leq g(x, y)$  per ogni  $(x, y) \in E$ , risulta

$$m(\{(x, y, z); (x, y) \in E, f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}) = \iint_E (g - f) dx dy.$$

Può essere utile talvolta procedere in maniera diversa, trasformando un integrale triplo in un integrale doppio e un integrale semplice. Questo secondo metodo di integrazione è detto anche "per strati". Esso si utilizza quando l'insieme  $G$  è del seguente tipo

$$(6.3.4) \quad G = \{(x, y, z); z \in [a, b], (x, y) \in G_z\}$$

dove i  $G_z$  sono insiemi piani normali. In tal caso il teorema di riduzione diventa:

**Teorema 6.15 (Secondo teorema di riduzione per gli integrali tripli)** *Sia  $G$  un insieme del tipo (6.3.4), e sia  $f : G \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua in  $G$ . Se la funzione*

$$z \mapsto \iint_{G_z} f(x, y, z) dx dy$$

*è continua in  $[a, b]$ , allora si ha*

$$\iiint_G f dx dy dz = \int_a^b \left( \iint_{G_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz.$$

## 6.4 Cambiamenti di coordinate

Un secondo gruppo di formule molto utili per il calcolo di integrali multipli si ottiene dal teorema di cambiamento di variabili, che generalizza il metodo di sostituzione per gli integrali semplici visto nel Teorema ??; esso fornisce un metodo per calcolare un integrale doppio o triplo attraverso una sostituzione nelle coordinate. Enunciamolo simultaneamente nel caso di due o tre variabili.

**Definizione 6.16 (Diffeomorfismi)** *Sia  $n = 2$  o  $3$  e siano  $A, B \subset \mathbf{R}^n$  due insiemi aperti. Un'applicazione  $F : A \rightarrow B$  si dice un diffeomorfismo se  $F$  è bigettiva ed inoltre  $F$  e  $F^{-1}$  sono di classe  $C^1$ .*

I diffeomorfismi portano un insieme su un altro della stessa dimensione (intuitivamente, questo è un ovvio requisito, dal momento che il numero di parametri necessario per descrivere gli elementi di un insieme non dipende dal sistema di coordinate scelto) attraverso una funzione regolare e con inversa regolare. Per poter usare i diffeomorfismi allo scopo di cambiare il sistema di coordinate da usare per il calcolo di un integrale doppio o triplo, ci restringiamo ad insiemi regolari, secondo la seguente definizione.

**Definizione 6.17 (Insiemi regolari)** *Si dice che l'insieme  $E \subset \mathbf{R}^2$  è regolare se è unione di un numero finito di insiemi piani normali a due a due privi di punti interni in comune, ciascuno dei quali definito come nella Definizione 6.5 con  $\alpha, \beta \in C^1([a, b])$ .*

*Si dice che l'insieme  $E \subset \mathbf{R}^3$  è regolare se è unione di un numero finito di insiemi piani normali a due a due privi di punti interni in comune, ciascuno dei quali definito come nella Definizione 6.9 con  $\phi, \psi$  funzioni di classe  $C^1$  definite su un insieme piano regolare  $E$ .*

Possiamo ora enunciare il teorema sul cambiamento di variabili.

**Teorema 6.18 (Cambiamento di variabili negli integrali multipli)** *Se  $F$  è un diffeomorfismo in  $\mathbf{R}^n$  (con  $n = 2$  o  $3$ ) ed  $E, G$  sono insiemi regolari di  $\mathbf{R}^n$ , con  $F(E) = G$ , e se  $f$  è integrabile su  $G$ , allora  $f \circ F$  è integrabile su  $E$  e si ha*

$$\int_G f(x, y) dx dy = \int_E f(F(u, v)) |\det DF(u, v)| du dv$$

se  $n = 2$ , e:

$$\int_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_E f(F(u, v, w)) |\det DF(u, v, w)| du dv dw$$

se  $n = 3$ .

Osserviamo che, a differenza del caso della formula di sostituzione per gli integrali di una variabile, qui si richiede che  $F$  sia una funzione bigettiva (vedo Osservazione ??4).

Particolarmente frequente è l'uso del teorema precedente con i cambiamenti di variabili visti nel capitolo tre (coordinate polari, cilindriche, sferiche).

**Esempio 6.19** Vogliamo calcolare

$$\iint_G x dx dy$$

dove  $G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$ . Utilizzando le coordinate polari, si determina l'insieme  $E$  effettuando la sostituzione nelle disuguaglianze. In questo caso si ottiene  $\rho^2 - 2\rho \cos \vartheta \leq 0$  e quindi

$$E = F^{-1}(G) = \{(\rho, \vartheta) : -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2 \cos \vartheta\}.$$

Dunque avremo

$$\iint_G x dx dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2 \cos \vartheta} \rho \cos \vartheta \rho d\rho = \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \vartheta d\vartheta = \pi.$$

## 6.5 Integrali generalizzati

In questo paragrafo consideriamo il caso di funzioni non limitate o domini di integrazione non limitati. Dato che non ci sono differenze formali, a questo livello, tra il caso di  $\mathbf{R}^2$  e il caso di  $\mathbf{R}^3$ , svolgeremo la nostra trattazione denotando con  $\mathbf{R}^n$  lo spazio ambiente, con l'intesa che  $n$  può essere 2 o 3. Il tipo di problema che consideriamo, ed anche il modo di affrontarlo, sono molto vicini a quanto visto nel Paragrafo ???. Iniziamo a specificare che cosa intendiamo per insieme misurabile nel caso di insiemi illimitati.

**Definizione 6.20 (Insiemi misurabili illimitati)** *Un insieme illimitato  $E$  si dice misurabile se risulta misurabile la sua intersezione con ogni intorno sferico dell'origine, nel senso della Definizione 6.4.*

Nel caso delle funzioni di una variabile, l'integrale improprio era definito passando al limite su opportuni sottointervalli dell'intervallo di integrazione. Nel caso di due variabili diamo la seguente definizione.

**Definizione 6.21 (Insiemi invadenti)** Sia  $E$  un insieme misurabile e sia  $(E_h)$  una successione di insiemi misurabili compatti. Diciamo che  $E_h$  è una successione di insiemi invadenti per  $E$  se  $E_h \subset E_{h+1}$  per ogni  $h \in \mathbf{N}$  e  $E = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h$ .

Utilizzando le successioni di insiemi invadenti possiamo definire l'integrale generalizzato di una funzione.

**Definizione 6.22 (Integrale generalizzato)** Sia  $E$  un insieme misurabile e sia  $(E_h)$  una successione di insiemi invadenti per  $E$ . Sia  $f : E \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua su  $E$ . Diciamo che  $f$  è assolutamente integrabile in senso generalizzato su  $E$  se

$$\sup_{h \in \mathbf{N}} \int_{E_h} |f(x)| dx < +\infty.$$

In questo caso esiste finito il  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{E_h} f(x) dx$  e poniamo

$$\int_E f(x) dx = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{E_h} f(x) dx.$$

Osserviamo che la definizione precedente non dipende dalla scelta della successione  $(E_h)$  di insiemi invadenti.

**Esempio 6.23** Sia  $E = \bar{B}_1(0,0) \setminus (0,0) \subset \mathbf{R}^2$  e sia  $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ . Evidentemente, la funzione  $f$  è illimitata su  $E$ . Scegliamo  $E_h = \bar{B}_1(0,0) \setminus B_{1/h}(0,0)$ . La funzione  $f$  è integrabile su  $E_h$  per il Teorema 6.2 e risulta

$$\iint_{E_h} f(x,y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_{1/h}^1 \frac{1}{\rho} \rho d\rho d\vartheta = 2\pi \left(1 - \frac{1}{h}\right).$$

Pertanto

$$\int_E f(x,y) dx dy = 2\pi.$$

## 6.6 Superficie regolari ed integrali di superficie

In questo paragrafo definiamo il concetto di superficie in  $\mathbf{R}^3$  e di integrale su una superficie.

**Definizione 6.24 (Superficie regolari)** Sia  $A \subset \mathbf{R}^2$  aperto connesso e sia  $\varphi : A \rightarrow \mathbf{R}^3$  una applicazione. Diciamo che  $\varphi$  è una superficie regolare in  $\mathbf{R}^3$  se  $\varphi \in C^1(A)$ ,  $\varphi$  è iniettiva in  $A$  e  $D\varphi$  è una matrice di rango due in ogni punto.

**Osservazione 6.25** Notiamo che la superficie è un'applicazione mentre chiamiamo sostegno di  $\varphi$  l'insieme immagine di  $\varphi$ .

La richiesta di iniettività dell'applicazione  $\varphi$  nella Definizione 6.24 è piuttosto restrittiva: sono (sostegno di) superficie regolari per esempio i piani, i cilindri, ma non le sfere; conviene perciò affiancare alla definizione precedente un'altra nozione di superficie, che ci permetta di considerare casi diversi, come appunto le sfere.

**Definizione 6.26 (Superficie regolari compatte)** *Sia  $K \subset \mathbf{R}^2$  un insieme compatto e sia  $\varphi : K \rightarrow \mathbf{R}^3$  una applicazione. Diciamo che  $\varphi$  è una superficie regolare compatta in  $\mathbf{R}^3$  se  $K$  è la chiusura della sua parte interna e la restrizione di  $\varphi$  alla parte interna di  $K$  è una superficie regolare.*

Può accadere che il sostegno di una superficie compatta racchiuda una porzione limitata dello spazio. Tale situazione è considerata nella seguente definizione.

**Definizione 6.27 (Superficie chiuse)** *Una superficie regolare compatta si dice chiusa se il suo sostegno è la frontiera di un insieme aperto connesso.*

Ricordiamo che la matrice  $D\varphi = D\varphi(u, v)$  è data da

$$D\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix},$$

dunque la condizione sul rango significa che i due vettori

$$\varphi_u = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, v), \quad \varphi_v = \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u, v)$$

sono linearmente indipendenti, e questo assicura che essi generano un piano, detto il *piano tangente al sostegno della superficie*, in ogni punto del sostegno di  $\varphi$ .

Indichiamo con  $(A, B, C) = \varphi_u \wedge \varphi_v$  il loro prodotto vettoriale, cioè

$$A = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

$$B = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

$$C = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}.$$

Risulta che  $(A, B, C)$  è ortogonale a  $\varphi_u$  e  $\varphi_v$ , pertanto è ortogonale al piano tangente e sarà detto vettore normale alla superficie.

Sia  $(u_0, v_0)$  un punto interno al dominio di  $\varphi$  e sia  $(x_0, y_0, z_0) = \varphi(u_0, v_0)$ . Posto

$$A_0 = A(u_0, v_0), \quad B_0 = B(u_0, v_0), \quad C_0 = C(u_0, v_0)$$

l'equazione del piano tangente al sostegno di  $\varphi$  nel punto  $(x_0, y_0, z_0)$  è data da

$$A_0(x - x_0) + B_0(y - y_0) + C_0(z - z_0) = 0.$$

Consideriamo ora superficie compatte e supponiamo che il dominio  $K$  sia l'unione di un numero finito di insiemi normali a parti interne disgiunte.

**Definizione 6.28 (Area di una superficie compatta)** *Definiamo area della superficie  $\varphi$  il numero*

$$\mathcal{A}(\varphi) = \iint_K \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} du dv.$$

Notiamo che è interessante il caso in cui il sostegno di  $\varphi$  è il grafico di una funzione di due variabili,  $f : K \rightarrow \mathbf{R}$ . Allora la superficie si dice *cartesiana* ed è data da

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y) = x \\ \varphi_2(x, y) = y \\ \varphi_3(x, y) = f(x, y) \end{cases}$$

e la sua area è data dalla formula

$$\iint_K \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dx dy.$$

Accanto all'area si possono dare la definizione di integrale superficiale di una funzione  $f$  e di flusso di un campo vettoriale su una superficie compatta  $\varphi$ .

**Definizione 6.29 (Integrale di superficie)** *Sia  $\varphi$  una superficie regolare compatta, e supponiamo che  $f$  sia una funzione reale continua sul sostegno di  $\varphi$ . Definiamo integrale superficiale di  $f$  su  $\varphi$  il numero*

$$\int_{\varphi} f d\sigma = \iint_K f(\varphi(u, v)) \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} du dv.$$

**Definizione 6.30 (Flusso di un campo vettoriale)** Siano  $\varphi$  una superficie regolare compatta, ed  $F$  un campo vettoriale continuo sul sostegno di  $\varphi$ . Definiamo flusso di  $F$  attraverso  $\varphi$  il numero

$$\int_{\varphi} F \cdot \nu d\sigma = \iint_K F(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u \wedge \varphi_v) dudv.$$

Anche gli integrali superficiali godono delle abituali proprietà di linearità e positività.

### Osservazioni 6.31

1. L'area di una superficie  $\varphi$ , sebbene definita usando la parametrizzazione  $\varphi$ , è in realtà una proprietà del suo sostegno. Infatti, se  $\varphi : K_1 \rightarrow \mathbf{R}^3$  e  $\psi : K_2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  sono due superficie compatte aventi lo stesso sostegno, tali cioè che  $\varphi(K_1) = \psi(K_2)$ , allora  $\mathcal{A}(\varphi) = \mathcal{A}(\psi)$ . Analogamente, l'integrale su  $\varphi$  di una funzione  $f$  non dipende dalla parametrizzazione, ma da  $f$  e dal sostegno di  $\varphi$ , cioè  $\int_{\varphi} f d\sigma = \int_{\psi} f d\sigma$  per due superficie  $\varphi$  e  $\psi$  come prima. La verifica di queste proprietà dipende dalla formula di cambiamento di variabili negli integrali doppi, che mostra come, nelle nostre ipotesi, si possa trasformare l'integrale su  $\varphi$  in quello su  $\psi$  attraverso un cambiamento regolare di coordinate.
2. Il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie è definito usando il campo vettoriale  $\varphi_u \wedge \varphi_v$ , che, come si è detto, è normale al sostegno di  $\varphi$ . Ponendo

$$\nu = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$$

si ottiene un campo vettoriale unitario normale al sostegno di  $\varphi$  che permette di ricondurre il flusso di un campo  $F$  all'integrale della funzione reale  $f = F \cdot \nu$ , componente del campo  $F$  lungo  $\nu$ . Per quanto riguarda il comportamento del flusso rispetto ad un cambio di parametrizzazione, però, bisogna tener conto del fatto che  $\nu$  ha un verso che può cambiare se si cambia la rappresentazione parametrica del sostegno della superficie. Con la notazione del punto precedente, chiamando  $(u, v)$  le coordinate in  $K_1$  e  $(s, t)$  quelle in  $K_2$ , si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} F \cdot \nu d\sigma &= \int_{\psi} F \cdot \nu d\sigma & \text{se } \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} &= \frac{\psi_s \wedge \psi_t}{\|\psi_s \wedge \psi_t\|}, \\ \int_{\varphi} F \cdot \nu d\sigma &= - \int_{\psi} F \cdot \nu d\sigma & \text{se } \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} &= - \frac{\psi_s \wedge \psi_t}{\|\psi_s \wedge \psi_t\|}. \end{aligned}$$

In particolare, se si considera una superficie chiusa si avrà un flusso *entrante* se il vettore normale determinato dalla parametrizzazione scelta è diretto verso l'interno della superficie, *uscende* nel caso opposto.

3. Se  $\varphi$  è una superficie regolare non limitata, si possono definire la sua area (eventualmente infinita), l'integrale di una funzione continua e il flusso di un campo

vettoriale continuo usando la stessa tecnica degli integrali generalizzati. Supposto che  $\varphi : A \rightarrow \mathbf{R}^3$  sia una superficie regolare, sia  $(K_h)$  una successione di compatti contenuti in  $A$  e invadenti  $A$ . Detta  $\varphi_h$  la restrizione di  $\varphi$  a  $K_h$ , si pone

$$\text{area}(\varphi) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \text{area}(\varphi_h);$$

se poi  $f$  e  $F$  sono rispettivamente una funzione reale ed un campo vettoriale continui su  $\varphi$ , se

$$\sup_{h \in \mathbf{N}} \int_{\varphi_h} |f| d\sigma < +\infty \quad \text{e} \quad \sup_{h \in \mathbf{N}} \int_{\varphi_h} \|F\| d\sigma < +\infty$$

allora si pone

$$\int_{\varphi} f d\sigma = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{\varphi_h} f d\sigma \quad \text{e} \quad \int_{\varphi} F \cdot \nu d\sigma = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{\varphi_h} F \cdot \nu d\sigma.$$

## 6.7 Teorema della divergenza e formula di Stokes

Il teorema della divergenza generalizza al caso degli integrali multipli la formula di integrazione per parti per gli integrali semplici presentata nel Teorema ???. Soffermiamoci separatamente sui casi di dimensione due e tre.

**Teorema 6.32 (Teorema della divergenza in  $\mathbf{R}^2$ )** *Sia  $D$  un dominio regolare di  $\mathbf{R}^2$ . Se  $F : D \rightarrow \mathbf{R}^2$  è un campo vettoriale di classe  $C^1$ , si ha*

$$\iint_D \text{div} F dx dy = \int_{\partial D} F \cdot \nu ds,$$

dove  $\partial D$  denota la curva avente la frontiera di  $D$  come sostegno,  $\nu$  è il versore normale a  $\partial D$  orientato verso l'esterno di  $D$  e la divergenza  $\text{div} F$  di  $F = (F_1, F_2)$  è data da

$$\text{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}.$$

Osserviamo che è possibile scegliere un verso di percorrenza per  $\partial D$  in modo che, detto  $\tau$  il versore tangente e  $\nu$  il versore normale esterno a  $D$ , la coppia  $(\nu, \tau)$  risulti congruente a quella dei versori degli assi coordinati. È facile vedere che se  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  allora risulta  $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$ . Indichiamo quest'orientamento con  $+\partial D$ . Il teorema della divergenza può essere riformulato nel modo seguente.

**Teorema 6.33 (Formula di Stokes in  $\mathbf{R}^2$ )** *Sia  $F = (F_1, F_2) : D \rightarrow \mathbf{R}^2$  un'applicazione di classe  $C^1$  nel dominio regolare  $D \subset \mathbf{R}^2$ . Allora risulta*

$$\int_{+\partial D} F \cdot d\ell = \iint_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

La formula di Stokes si ottiene immediatamente applicando il Teorema della divergenza al campo  $(F_2, -F_1)$  e tenendo conto della relazione tra  $\nu$  e  $\tau$ .

Analogamente in tre dimensioni risulta:

**Teorema 6.34 (Teorema della divergenza in  $\mathbf{R}^3$ )** *Sia  $T$  un dominio regolare di  $\mathbf{R}^3$ . Se  $F = (F_1, F_2, F_3) : T \rightarrow \mathbf{R}^3$  è un campo vettoriale di classe  $C^1$ , si ha*

$$\iiint_T \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial T} F \cdot \nu \, d\sigma,$$

dove  $\partial T$  denota la superficie avente la frontiera di  $T$  come sostegno,  $\nu$  è il versore normale a  $\partial T$  orientato verso l'esterno di  $T$  e la divergenza  $\operatorname{div} F$  di  $F$  è data da

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Il teorema precedente afferma che l'integrale della divergenza di  $F$  su  $T$  è pari al flusso del campo uscente da  $T$ .

Per enunciare la formula di Stokes, consideriamo una superficie compatta  $\varphi : D \rightarrow \mathbf{R}^3$  ed indichiamo con  $\nu$  il campo dei versori normali individuato da  $\varphi$ . Sia  $\gamma$  una curva regolare a tratti che orienta positivamente il bordo di  $D$ . Allora diciamo che la curva  $\varphi \circ \gamma$  orienta positivamente il bordo della superficie  $\varphi$ . Infine ricordiamo che il rotore di un campo vettoriale  $F = (F_1, F_2, F_3)$  di classe  $C^1$  è il campo vettoriale definito da

$$(6.7.5) \quad \operatorname{rot} F = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

**Teorema 6.35 (Formula di Stokes in  $\mathbf{R}^3$ )** *Sia  $\varphi : D \rightarrow \mathbf{R}^3$  una superficie regolare e sia  $F = (F_1, F_2, F_3) : A \rightarrow \mathbf{R}^3$  un'applicazione di classe  $C^1$  in un aperto  $A$  contenente il sostegno  $S$  della superficie  $\varphi$ . Allora risulta*

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, d\sigma = \int_{+\partial S} F \cdot dl,$$

dove  $\nu$  è il campo dei versori normali ad  $S$  e il bordo  $+\partial S$  è orientato nel verso positivo corrispondente all'orientamento della superficie  $S$ .