

Prova scritta di FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA 2
Corso di laurea in ingegneria gestionale, meccanica e mecatronica - canale 3
Vicenza, 19.7.2010

Svolgere i seguenti esercizi.

1. Tra tutti i parallelepipedi con le facce parallele ai piani coordinati ed inscritti nell'ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0$$

determinare, se esiste, quello di volume massimo.

2. Considerata la curva definita da

$$y^2 = (1 - x^2)x^2, \quad x > 0,$$

calcolare il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando idealmente tale curva attorno all'asse x .

3. Data la funzione

$$f(x, y) = y^2 - (1 - x^2)x^2$$

si dica se in un intorno del punto $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ l'insieme

$$Z = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$$

è localmente grafico di una funzione $x = x(y)$ e se lo è di una funzione $y = y(x)$. Se possibile, si trovi la retta tangente a Z nel punto $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4})$.

Cosa si può dire dell'analogo problema in un intorno del punto $(0, 0)$?

4. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

e, se possibile, calcolarne la somma. Se si considera

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^2 n \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

l'insieme di convergenza è lo stesso della serie precedente?

5. Dati $a, b \in \mathbf{R}$ si consideri il campo

$$F(x, y) = \left(axy + b \frac{y}{x^2 + y^2}, x^2 - b^2 \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

definito in $F : (0, +\infty) \times \mathbf{R}$ e a valori in \mathbf{R}^2 . Stabilire se e per quali valori di a e b esiste $f : (0, +\infty) \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ tale che $\nabla f = F$ ed in tal caso determinare tale o tali f .

Si supponga ora che il F sia definito in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Stabilire se e per quali valori di a e b esiste $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ tale che $\nabla f = F$ ed in tal caso determinare tale o tali f .