FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA 2

Prof. F. Albertini, M. Motta, F. Paronetto
Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 26-01-2010

TEMA 1

Esercizio 1 Dato l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \le x \le 2, \quad 1 \le xy \le 3\}$, calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D y^2 e^{xy}\, dx\, dy$$

Sol. Usando il cambiamento di variabili $u = x$, $v = xy$, l'insieme di integrazione diventa il rettangolo $T = [1,2] \times [1,3]$. Tale cambiamento di variabili risulta ammissibile, visto che si inverte: $x = u$, $y = v/u$ (e dunque è iniettivo) e ha determinante Jacobiano $x \ne 0$ nell'insieme D. Poichè il determinante Jacobiano della trasformazione inversa è $[1/x]_{x=u} = 1/u$, l'integrale diventa

$$\int_1^2 \left[\int_1^3 \frac{v^2}{u^2} e^v \frac{1}{u}\, dv\right] du = \left(\int_1^2 \frac{1}{u^3}\, du\right)\left(\int_1^3 v^2 e^v\, dv\right) = \frac{3(5e^3 - e)}{8}$$

Esercizio 2 Dati gli insiemi

$$M = \left\{(x,y,z) : \ z^2 - x^2 - y^2 = 0\right\}, \quad C = \left\{(x,y,z) : \ (x+1)^2 + y^2 \le 4\right\}$$

calcolare l'area della superficie S ottenuta dall'intersezione $M \cap C$.

Sol. S è la porzione della superficie laterale del cono a due falde $z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ di asse z contenuta nel cilindro di raggio 2 e di asse z' parallelo a z, ma passante per $(-1,0,0)$. Per evidenti motivi di simmetria, l'area cercata è il doppio dell'area ottenuta considerando solo una falda del cono, per es. $z = \sqrt{x^2+y^2}$ (cioè considerando $S^+ = S \cap \{z \ge 0\}$). Per S^+ si ha la parametrizzazione cartesiana $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in D = \{(x,y) : \ (x+1)^2 + y^2 \le 4\}$. Quindi

$$Area(S) = 2\, Area(S^+) = 2 \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy =$$

$$2 \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\, dx\, dy = 2\sqrt{2}\, Area(D) = 8\sqrt{2}\pi$$

Esercizio 3 Determinare eventuali punti di massimo e di minimo assoluto per la funzione $f(x,y) = \arctan(x^2 - y^2)$ su $D = \left\{(x,y) : \ -\sqrt{4-y^2} \le x \le \sqrt{2}|y| \le 2\sqrt{2}\right\}$ e calcolare il valore del massimo e del minimo assoluto di f su D.

Sol. L'insieme D è dato dalla regione del piano compresa tra: a sinistra dell'asse y, cioè per $x \le 0$, mezza circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$; a destra dell'asse y, cioè per $x \ge 0$, le due rette $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ e $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$ e sopra e sotto le rette $y = 2$ ed $y = -2$, rispettivamente. Quindi si tratta di un insieme chiuso e limitato e poichè f è continua, dal Teorema di Weierstrass segue che esistono sia il minimo che il massimo assoluto di f su D.

La funzione $r \mapsto \arctan r$ è strettamente crescente, dunque punti di minimo e massimo di f coincidono con quelli di $g(x,y) = x^2 - y^2$. Studiamo g.

Metodo 1: curve di livello. Consideriamo le curve di livello di g, $x^2 - y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}$. Per $c = 0$ sono le due rette $y = x$ e $y = -x$, per $c > 0$ sono iperboli equilatere che intersecano l'asse x in $(\pm\sqrt{c}, 0)$ e per $c < 0$ sono iperboli equilatere che intersecano l'asse y in $(0, \pm\sqrt{-c})$. Graficamente risulta che il valore massimo assunto da g su D è $c = 4$ (iperbole che interseca l'insieme in $(2\sqrt{2}, \pm 2)$ e in $(-2, 0)$, che risultano essere i punti di massimo assoluto); mentre il valore minimo è $c = -4$ (valore assunto da g sull'iperbole che interseca l'insieme in $(0, \pm 2)$, che risultano essere i punti di minimo assoluto). I valori di massimo e minimo assoluto della f di partenza sono allora $M = \arctan(4)$ e $m = \arctan(-4) = -M$, rispettivamente.

Metodo 2: punti interni+frontiera. Esiste un solo punto critico di g interno a D, dove $\nabla g(x,y) = (2x, -2y) = (0,0)$, l'origine. E' chiaramente un punto di sella: $g(0,0) = 0$ e $g(x,0) = x^2 > 0$, $g(0,y) = -y^2 < 0$ in un intorno di $(0,0)$. Studiamo il bordo di D.

Lungo i segmenti $y = \pm 2$ con $x \in [0, 2\sqrt{2}]$, $g(x,y) = x^2 - 4$ assume il minimo per $x = 0$ e vale -4 e il massimo per $x = 2\sqrt{2}$ e vale 4.

Lungo i segmenti $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$ con $x \in [0, 2\sqrt{2}]$, $g(x,y) = x^2 - x^2/2 = x^2/2$ assume il minimo per $x = 0$ e vale 0 e il massimo per $x = 2\sqrt{2}$ e vale 4.

Lungo l'arco di circonferenza $x = -\sqrt{4 - y^2}$ con $y \in [-2, 2]$, $g(x,y) = 4 - 2y^2$ assume il minimo per $y = \pm 2$ e vale -4 e il massimo per $y = 0$ e vale 4. Le conclusioni a questo punto sono le stesse ottenute con il metodo 1.

Esercizio 4 Dato il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{a+2}{x^2 y} - \sin(x+y+az), \frac{a^2-4}{xy^2} - \sin(x+y+az), -3\sin(x+y+az) \right)$$

(a) determinare il dominio di F per ogni $a \in \mathbb{R}$;

(b) determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui il rotore di F, rot$F$, risulta nullo nel dominio di F;

(c) verificare che in corrispondenza ai valori di a determinati nel punto (b), F è conservativo nell'insieme $D = \{(x,y,z) : \ x > 0, \quad y > 0\}$ e calcolare un potenziale di F su D per tali a.

Sol. Quando $a + 2 = 0$ e $a^2 - 4 = 0$, cioè nel caso $a = -2$, il dominio di F è $\mathbb{R}^3$. Per $a \neq -2$, il dominio è invece $\mathbb{R}^3 \setminus \{$piano $x = 0$ e piano $y = 0$ $\}$, cioè: $Dom(F) = \{(x,y,z) : \ x \neq 0, \quad y \neq 0\}$. In $Dom(F)$ si ha:

$$\text{rot}F = (-3\cos(x+y+az) + a\cos(x+y+az), 3\cos(x+y+az) - a\cos(x+y+az),$$
$$\left. -\frac{a^2-4}{x^2y^2} - \cos(x+y+az) + \frac{a+2}{x^2y^2} + \cos(x+y+az) \right).$$

Quindi rot$F = (0,0,0)$ se e solo se $a = 3$. Un potenziale in D in questo caso è $U(x,y,z) = -\frac{5}{xy} + \cos(x+y+3z)$.

Esercizio 5 Sia f è una arbitraria funzione di classe C^∞ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e si consideri l'equazione

$$h(x,y,z) = e^x + f(3x+y) + e^z - 1 = 0.$$

(a) Determinare delle condizioni sufficienti su f affinchè l'equazione definisca in un intorno di $(0,0,0)$ una superficie di equazione $y = g(x,z)$ tale che $g(0,0) = 0$;

(b) verificare che $f(t) = \sin(t) - 1$ soddisfa le condizioni determinate nel punto (a) e per tale scelta di f determinare il piano tangente e un versore normale in $(0,0,0)$ alla superficie implicitamente definita dall'equazione assegnata.

Sol. (a) Le ipotesi del Teorema del Dini che garantiscono la tesi sono: $h(0,0,0) = 0$ e $h_y(0,0,0) \neq 0$. Esplicitandole si ha:

$$h(0,0,0) = 1 + f(0) + 1 - 1 = 0; \quad h_y(0,0,0) = f'(0) = 0,$$

che sono soddisfatte se e solo se $f(0) = -1$ e $f'(0) \neq 0$.

(b) La funzione $f(t) = \sin(t) - 1$ verifica banalmente le condizioni trovate. L'equazione del piano tangente e l'espressione del versore normale alla superficie in $(0,0,0)$ sono rispettivamente

$$h_x(0,0,0)x + h_y(0,0,0)y + h_z(0,0,0)z = 0 \quad \text{che diventa} \quad 4x + y + z = 0$$

e

$$N = \left(\frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \right)$$