Ex 1

f è continua

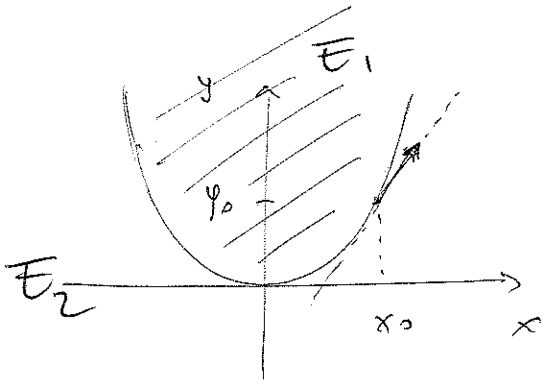
derivabile in $\mathbb{R}^2 \setminus E$ in ogni direzione

differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus E$, dove

$$E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \}.$$

Vediamo in E. Sia $(x_0, y_0) \in E$ $\quad (y_0 = x_0^2)$

$(x_0, y_0) \neq (0,0)$



Sia $v = (v_1, v_2)$, $|v| = 1$ tangente alla curva $y = x^2$

$$v = \frac{(1, 2x_0)}{\sqrt{1+4x_0^2}}$$

Con tale v

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[f\left((x_0,y_0) + t(v_1,v_2) \right) - \overset{= 0}{f(x_0,y_0)} \right] =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(x_0 + t v_1)^2 - (y_0 + t v_2)}{t} (y_0 + t v_2)^2$$

perché $|y - x^2| = x^2 - y$ nella regione non tratteggiata E_2

(mentre è $y - x^2$ nella regione tratteggiata che chiamiamo E_1)

Si ottiene che

$$(*)\quad \lim_{t\to 0} \frac{f((x_0,y_0)+t(v_1,v_2)) - f(x_0,y_0)}{t} \quad \text{è}$$

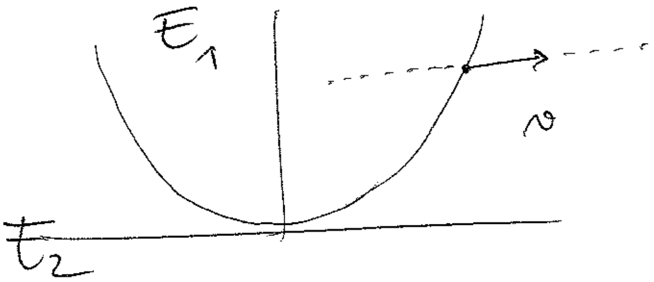
$$\lim_{t\to 0} \frac{(\overbrace{x_0^2 - y_0}^{=0} + t^2 v_1^2 + 2tv_1 - tv_2)(y_0+tv_2)^2}{t}$$

$$= (2v_1 - v_2)\, y_0^2$$

per cui

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = \left(2\,\frac{1}{\sqrt{1+4x_0^2}} - \frac{2x_0}{\sqrt{1+4x_0^2}}\right) x_0^4$$

Negli altri casi, cioè quando si fissa $(x_0,y_0)\in E$ e v non è tangente alla curva,



si ha che per certi valori di t $(x_0,y_0)+t(v_1,v_2)\in E_1$ per valori di t di segno opposto $(x_0,y_0)+t(v_1,v_2)\in E_2$

Per cui non esiste il limite del rapporto incrementale $(*)$ per $t\to 0$ in queste situazioni.

Unico caso : $(x_0, y_0) = (0,0)$.

In tal caso si ha:

analogamente a prima esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ che corrisponde alla derivata lungo la direzione $(1,0)$ (e analogamente quella lungo la direzione $(-1,0)$). Lungo le altre direzioni come fatto precedentemente si otterrebbe

$$\begin{cases} (2v_1 - v_2)\, y_0^2 & \text{se } t(v_1,v_2) \in T_2 \\ (v_2 - 2v_1)\, y_0^2 & \text{se } t(v_1,v_2) \in T_1 \end{cases}$$

ma poiché $y_0 = 0$ tale limite esiste ed è sempre 0. Quindi $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0 \ \forall v$

Analogamente si vede che è differenziabile in $(0,0)$ poiché

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{f((0,0)+(h_1,h_2)) - f(0,0) - \nabla \overset{(0,0)}{\overset{\shortparallel}{f(0,0)}} \cdot (h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{|h| \to 0} \frac{|h_1 - h_2^2| \, h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$= \lim_{|h| \to 0} \left| \frac{h_1 h_2^2 - h_2^4}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \leq$$

$$\leq \lim_{|h| \to 0} \left| \frac{h_1 h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| + \lim_{|h| \to 0} \frac{h_2^4}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

In tutti gli altri punti di E f non è differenziabile.

Ex 2 $\quad f(x,y) = \frac{4}{3}(1-a)(x^3+y^3) + 2x^2 + x + 2y^2 + y$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{4}{3}(1-a)\, 3x^2 + 4x + 1 \,, \; \frac{4}{3}(1-a)\, 3y^2 + 4y + 1 \right)$$

$a > 0$

$$= \left(4(1-a)x^2 + 4x + 1 \,, \; 4(1-a)y^2 + 4y + 1 \right)$$

$\nabla f(x,y) = (0,0)$ se e solo se

$$\begin{cases} 4(1-a)x^2 + 4x + 1 = 0 \\ 4(1-a)y^2 + 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

Risolvo $\quad 4(1-a)t^2 + 4t + 1 = 0$

Se $a = 1 \Rightarrow t = -1/4$

Se $a \neq 1 \quad t = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 16(1-a)}}{8(1-a)}$

Se $1 - a > 1$ non ci sono soluzioni reali, ma questo corrisponde ad $a < 0$.

Quindi le due possibilità sono

$$t_1 = \frac{-1-\cancel{\pm}\sqrt{a}}{2(1-a)} \qquad t_2 = \frac{-1+\sqrt{a}}{2(1-a)}$$

Per cui abbiamo:

se $a=1$ il punto $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ (unico punto critico)

se $a \neq 1$ i punti

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{a}-1}{2(1-a)}, \frac{\sqrt{a}-1}{2(1-a)}\right)$$

$$P_2 = \left(\frac{\sqrt{a}-1}{2(1-a)}, \frac{-\sqrt{a}-1}{2(1-a)}\right)$$

$$P_3 = \left(-\frac{\sqrt{a}+1}{2(1-a)}, \frac{\sqrt{a}-1}{2(1-a)}\right)$$

$$P_4 = \left(-\frac{\sqrt{a}+1}{2(1-a)}, -\frac{\sqrt{a}+1}{2(1-a)}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 8(1-a)x + 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 8(1-a)y + 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

Per cui

se $a = 1$ $\qquad D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

e il punto $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ è di minimo locale

In tal caso $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + x + y$

e tale funzione all'infinito tende a $+\infty$

(come visto in generale per forme quadratiche definite positive).

Usando le coordinate polari si poteva anche scrivere

$$f(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta)) = 2\rho^2 + \rho\cos\theta + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \geq$$

$$\geq 2\rho^2 - 2\rho = 2\rho(\rho - 1)$$

per cui $\displaystyle\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x,y) = +\infty$

Per $a=1$ si ha un solo punto critico,

la funzione tende a $+\infty$ all'infinito,

di conseguenza ~~inf f~~

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f = \min_{\mathbb{R}^2} f = f\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$$

Se $a \neq 1$ ~~il determ~~

$$D^2 f(P_1) = \begin{pmatrix} 8(1-a)\dfrac{\sqrt{a}-1}{2(1-a)} + 4 & 0 \\ 0 & 8(1-a)\dfrac{(\sqrt{a}-1)}{2(1-a)} + 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4\sqrt{a} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{a} \end{pmatrix}$$

per cui P_1 risulta di minimo locale.

$$D^2 f(P_4) = \begin{pmatrix} -4\sqrt{a} & 0 \\ 0 & -4\sqrt{a} \end{pmatrix}$$

per cui i due autovalori sono negativi e P_4 risulta di massimo locale.

In P_2 e P_3 abbiamo che i due autovalori sono uno $4\sqrt{a}$, l'altro $-4\sqrt{a}$.

I punti sono di sella.

Inoltre se $a \neq 1$ prendendo ad esempio $x = y$ si vede facilmente che

$f(x,x)$ ha limite

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ -\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

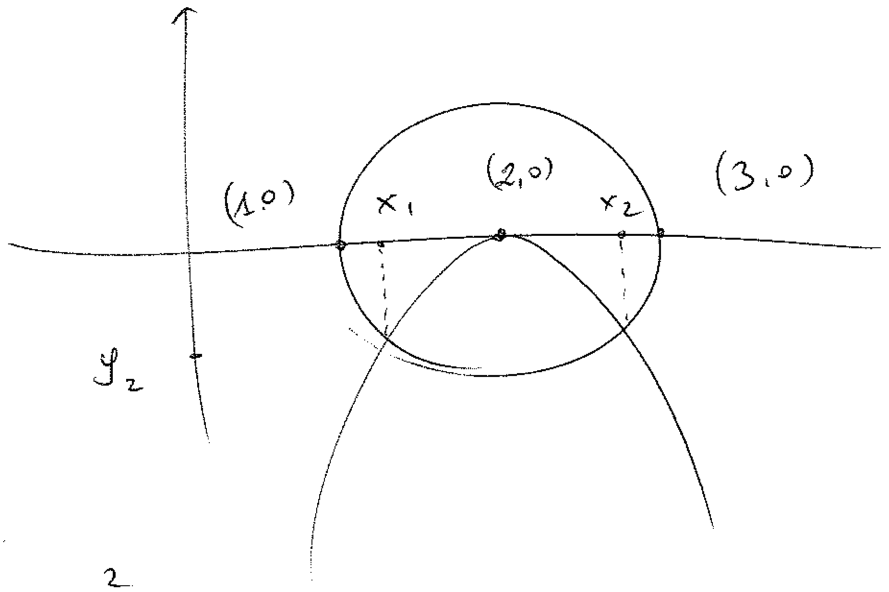
$$\lim_{x \to -\infty} f(x,x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

di conseguenza

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$$

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$$

Ex 3



$$\begin{cases} y + (x-2)^2 = 0 \\ (x-2)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y + 1 - y^2 = 0$$

con $y \leq 0$

$\left(y = -(x-2)^2 \right)$

$$y^2 - y - 1 = 0$$

$$y_1 = \frac{1 + \sqrt{1+4}}{2} \qquad y_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Considero solo y_2

Le coordinate x_1 e x_2 dei due punti di intersezione sono date da

$$(x-2)^2 = -y_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$x_1 - 2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \qquad x_1 = 2 - \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$x_2 - 2 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \qquad x_2 = 2 + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

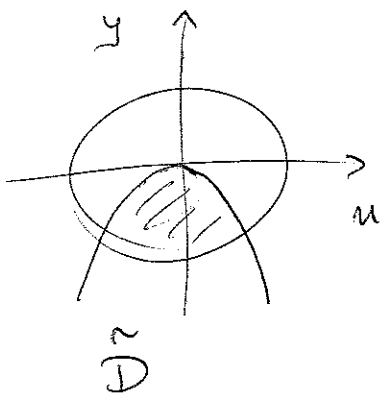
Quindi

$$\int_D (x-2)\,dx\,dy = \int_{2-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}^{2+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} dx \int_{-\sqrt{1-(x-2)^2}}^{-(x-2)^2} dy\,(x-2) =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[-(x-2)^3 + (x-2)\sqrt{1-(x-2)^2}\right] dx =$$

$$= \left[-\frac{(x-2)^4}{4} - \frac{1}{3}\left(1-(x-2)^2\right)^{3/2}\right]\Bigg|_{x_1}^{x_2} = 0$$

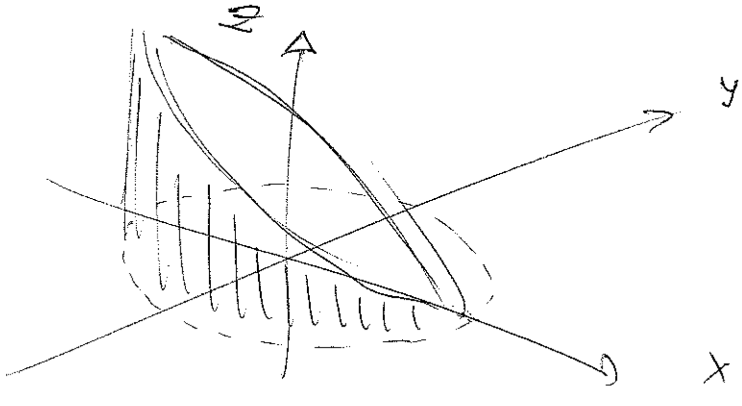
Alternativamente, chiamando per semplicità $x - 2$ u e traslando si ottiene



$$\int_{\tilde{D}} u\,du\,dy.$$

Per simmetria questo integrale è nullo.

EX 4



$$\cancel{\left(R\cos\theta \,,\; R \operatorname{sen}\theta \,,\; R - R\cos\theta \right)}$$

$$\varphi(\theta, z) = \left(R\cos\theta \,,\; R\operatorname{sen}\theta \,,\; z \right) \quad \text{con}$$

$$\theta \in [0, 2\pi] \quad , \quad 0 \le z \le R - R\cos\theta$$

$$\int_\Sigma (3-z)\, d\sigma = R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R - R\cos\theta} (3-z)\, dz$$

dove R è l'elemento d'area

$$\varphi_\theta = (-R\operatorname{sen}\theta \,,\; R\cos\theta \,,\; 0)$$

$$\varphi_z = (0 \,,\; 0 \,,\; 1)$$

$$\varphi_\theta \wedge \varphi_z = (R\cos\theta \,,\; R\operatorname{sen}\theta \,,\; 0)$$

$$|\varphi_\theta \wedge \varphi_z| = R$$

Per cui si ottiene

$$R \int_0^{2\pi} d\theta \left[3R\,(1-\cos\theta) - \frac{R^2}{2}\,(1-\cos\theta)^2 \right]$$

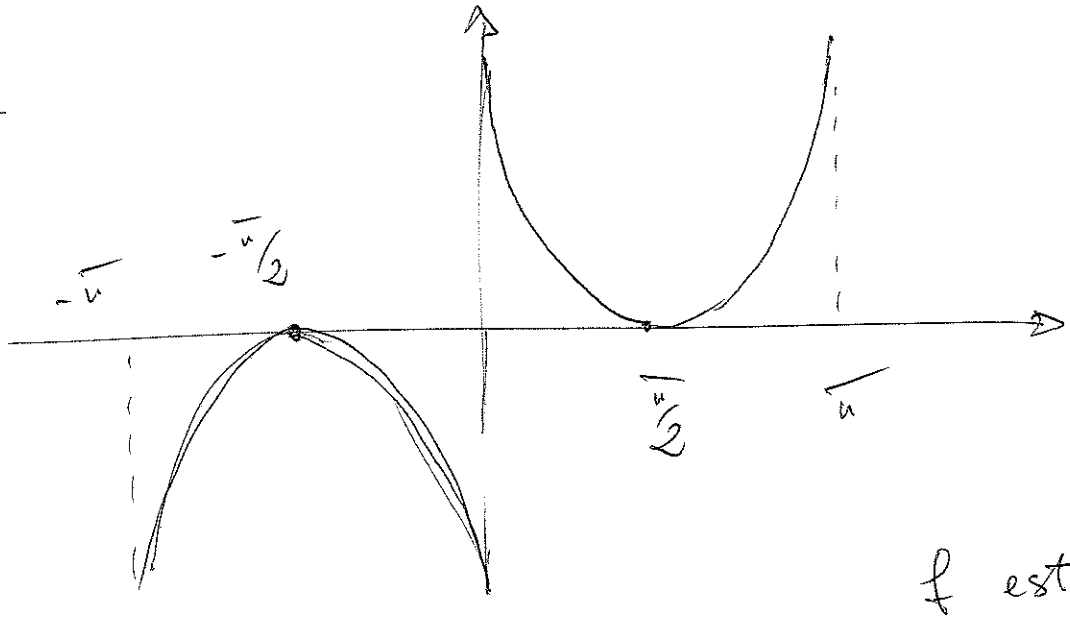
$$= 3R^2 \cdot 2\pi - \frac{R^3}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta\right) d\theta$$

$$= 6R^2\pi - \frac{R^3}{2}\, 2\pi + \frac{R^3}{2}\,\pi =$$

$$= 6R^2\pi - \frac{R^3}{2}\,\pi$$

//

Ex 5



f estesa per periodicità diventa 2π-periodica

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 \qquad \forall n = 0,1,2,\dots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx = 2\int_{0}^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 \mathrm{sen}\,nx\,dx$$

$$= 2\left[-\frac{\left(x-\pi/2\right)^2\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\cos nx}{n}\right]$$

$$2\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\cos nx}{n}\,dx =$$

$$= 2\left[\underbrace{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}}_{=\,0} - \int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}\,dx\right]$$

$$= +2\,\frac{\cos nx}{n^3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n^3}\begin{cases}0 & n \text{ pari}\\ -2 & n \text{ dispari}\end{cases}$$

$$-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{n}\begin{cases}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot 0 & n \text{ pari}\\ \left(\frac{\pi}{2}\right)^2(-2) & n \text{ dispari}\end{cases}$$

Per cui

$$b_n = 2\left[\frac{2}{n}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{4}{n^3}\right] \quad \text{se } n \text{ dispari}$$

$$0 \quad \text{se } n \text{ pari}$$

~~$f(x)=$~~ La serie di Fourier di f è allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi^2}{(2n+1)} - \frac{8}{(2n+1)^3} \right) \operatorname{sen} (2n+1) x$$

Tale serie converge puntualmente a f in tutti i punti $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$

In tali punti converge a zero.

La convergenza non può essere uniforme in $\mathbb{R}$ poiché la funzione f è discontinua.

È uniforme e totale in tutti gli intervalli $[a,b] \subset (0,\pi)$ o $[a,b] \subset (-\pi,0)$ (e sugli analoghi traslati di multipli di 2π).