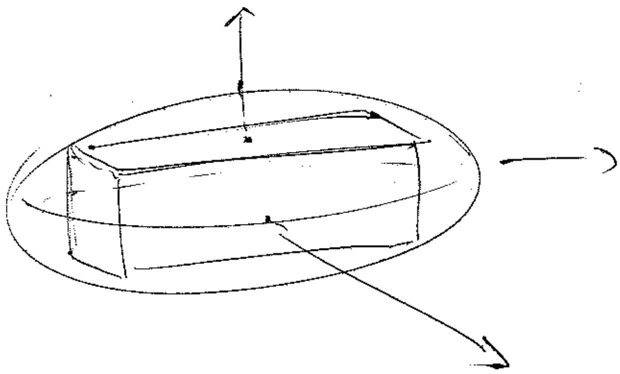
1. Un modo per risolvere l'esercizio è quello di usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.



Si denotino con $x, y, z \geq 0$ le semilunghezze dei tre spigoli in modo che il volume del parallelepipedo risulti

$$V(x,y,z) = 8xyz .$$

Si osservi che se anche uno solo dei tre lati ha lunghezza zero, $V = 0$, mentre se tutti e tre i lati hanno lunghezza positiva $V > 0$.

Si consideri la funzione

$$F(x,y,z,\lambda) = 8xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 8yz + 2\lambda \dfrac{x}{a^2} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 8xz + 2\lambda \dfrac{y}{b^2} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 8xy + 2\lambda \dfrac{z}{c^2} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Possiamo escludere i valori $x=0$, $y=0$, $z=0$ poiché se il problema ha soluzione sarà per $x, y, z > 0$.

Ricavando λ dalle prime due equazioni ed eguagliando quanto ottenuto si ha

$$\lambda = -\frac{8yz}{2x}a^2 = -\frac{8xz}{2y}b^2$$

cioè $\begin{pmatrix} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ z \neq 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

Analogamente dalla terza si ricava anche che

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

cioè le tre quantità sono uguali. Esiste quindi una costante $k > 0$ tale che

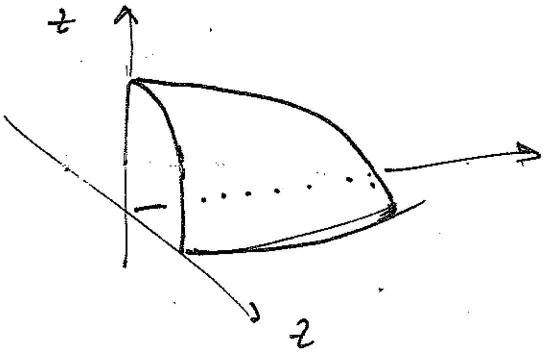
$$\frac{x^2}{a^2} = k \qquad \frac{y^2}{b^2} = k \qquad \frac{z^2}{c^2} = k$$

da cui $x = \sqrt{k}\,a$, $y = \sqrt{k}\,b$, $z = \sqrt{k}\,c$

Inserendo nella quarta equazione si ha

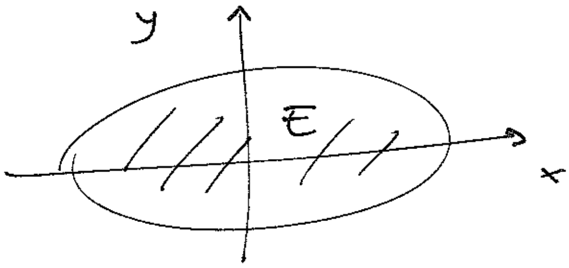
$3k = 1$ da cui $k = 1/3$.

Questo è un punto di massimo in quanto unico punto stazionario di V definita su una porzione dell'ellissoide sul cui bordo $V = 0$ mentre all'interno $V > 0$.



Alternativamente si può parametrizzare.

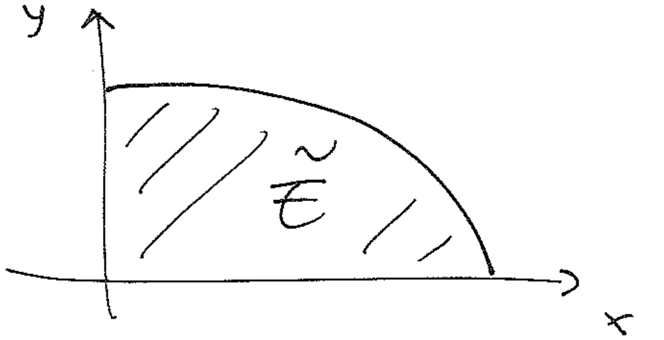
Ad esempio:



$$\varphi : E \to \mathbb{R}^3$$

$$(x,y) \mapsto \left(x, y, c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right)$$

parametrizza solamente $z \geq 0$. Anche in questo caso ci si può limitare all'insieme



$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} \quad \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}$$

$x \geq 0$
$y \geq 0$

La funzione $V(x, y, \varphi(x,y))$ diventa

$$\tilde{V}(x,y) = 8\, x y c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

Si noti che sul bordo di $\tilde{E}$ $\tilde{V} = 0$.

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} = c 8 y \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \frac{8xyc}{a^2} \frac{2x}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

$$= c 8 y \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \frac{8 x^2 y c}{a^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = 0$$

da cui (assumendo $x \neq 0$, $y \neq 0$)

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \qquad (1)$$

e analogamente, da $\frac{\partial \hat{V}}{\partial y} = 0$, si ottiene

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \qquad (2)$$

Da (1) e (2) si ricava che $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = k$

(e anche $1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k$).

da cui $x = \sqrt{k}\, a$

$y = \sqrt{k}\, b$

Su $\partial\tilde{E}$ si ha che $V = 0$ mentre

in $\mathring{\tilde{E}}$ $V > 0$, $(\sqrt{k}\, a, \sqrt{k}\, b)$ è l'unico

punto stazionario per cui è di massimo.

Valutando poi $\varphi(\sqrt{k}\, a, \sqrt{k}\, b) = \sqrt{k}\, c$ si

trova anche il valore di z.

Per trovare k da (1) si ha

$$\frac{x^2}{a^2} = k \qquad 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k$$

$$\quad \qquad 1 - k - k$$

per cui $1 - 2k = k \Rightarrow k = 1/3$.

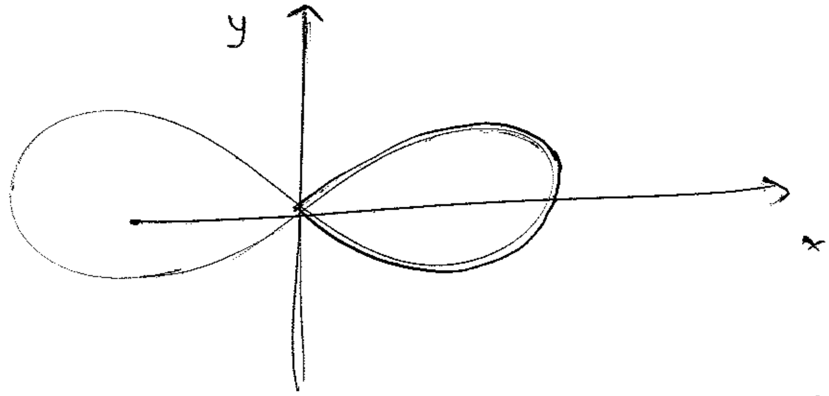
Il volume massimo è $8 \frac{1}{\sqrt{3}} a \frac{1}{\sqrt{3}} b \frac{1}{\sqrt{3}} c$

$$= \frac{8}{3\sqrt{3}} abc$$

in corrispondenza del parallelepipedo i cui lati

hanno lunghezza $\frac{2}{\sqrt{3}} a$, $\frac{2}{\sqrt{3}} b$, $\frac{2}{\sqrt{3}} c$.

2.



$$y^2 = (1-x^2)x^2$$
$$x > 0$$

Per calcolare il volume del solido è sufficiente parametrizzare con

$$x \in [0,1]$$
$$y = \rho\cos\vartheta \qquad \text{con } \vartheta \in [0, 2\pi)$$
$$z = \rho\,\text{sen}\,\vartheta \qquad \rho \in [0, x\sqrt{1-x^2}]$$

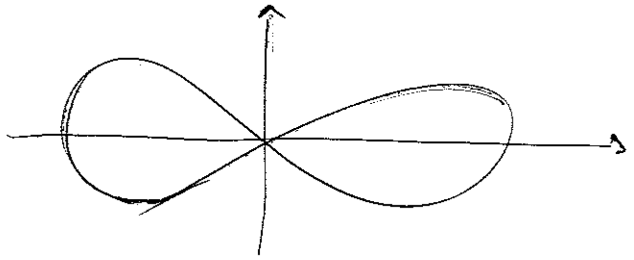
e si ha

$$\text{Volume} = \int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{x\sqrt{1-x^2}} \rho\, d\rho =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\vartheta \; \frac{1}{2} x^2(1-x^2) =$$

$$= \pi \int_0^1 x^2(1-x^2)\,dx = \frac{2\pi}{15}.$$

3.



$\mathcal{Z}$

Data $f(x,y) = y^2 - (1-x^2)\,x^2$

il luogo degli zeri di f è la curva rappresentata in figura e che chiamiamo $\mathcal{Z}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \left(-2x(1-x^2) + 2x^3\right)\Big|_{\substack{x = 1/2 \\ y = \sqrt{3}/4}} =$$

$$= \left(-2x + 4x^3\right)\Big|_{x = 1/2} = -1 + \frac{1}{2} = -1/2 \neq 0$$

Questo, per il teorema della funzione implicita, garantisce che ~~[illegible]~~ localmente intorno al punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ il luogo degli zeri di f è grafico di una funzione $x = x(y)$

$\left(\text{e } f(x(y), y) = 0\right)$.

In maniera analoga

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 2y\Big|_{y = \frac{\sqrt{3}}{4}} \neq 0 \qquad \text{per cui}$$

è garantita l'esistenza di una funzione implicita $y = y(x)$ per cui Z è localmente grafico di y e $f(x, y(x)) = 0$.

Dal teorema della funzione implicita e dalla regolarità di f sappiamo che $y = y(x)$ è continua e derivabile in un intorno di $x_0 = 1/2$. Per cui la retta tangente a Z in $(1/2, \sqrt{3}/4)$ sarà data dalla retta tangente al grafico di y in $x_0 = 1/2$ o dal suo polinomio di Taylor di grado 1.

$$y(x_0) = y(1/2) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\left(1/2, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}{\frac{\partial f}{\partial y}\left(1/2, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)} = -\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

per cui la retta risulta essere

$$y = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

In maniera analoga si valuta, per la funzione implicita $x = x(y)$,

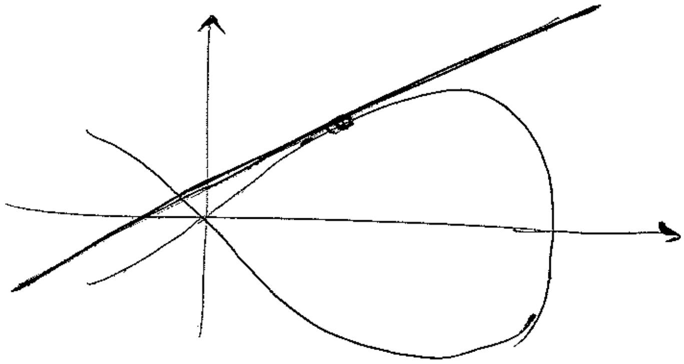
$$x\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{2} + x'\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(y - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + o\left(\left|y - \frac{\sqrt{3}}{4}\right|\right)$$

dove $$x'\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}{\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)} = \sqrt{3}$$

per cui

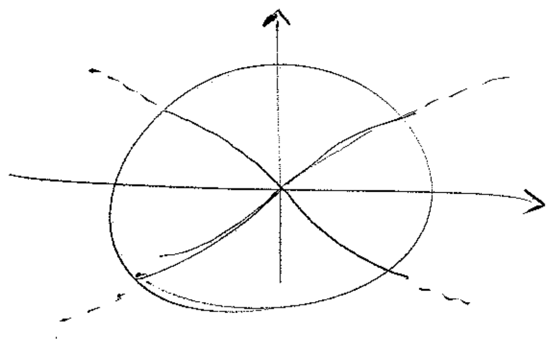
$$x = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{1}{4} + \sqrt{3}\, y$$

che descrive la stessa retta



Nel punto $(0,0)$ si ha che sia $\frac{\partial f}{\partial x}$ che $\frac{\partial f}{\partial y}$ si annullano. Ma questo non esclude nulla!

È però non può essere grafico in quanto



unione (localmente!) di due curve diverse incidenti in $(0,0)$ con derivate diverse.

Ad esempio $\mathcal{Z}$ è unione dei ~~due~~ grafici delle due funzioni

$$y_1(x) = x\sqrt{1-x^2} \quad \text{e} \quad y_2(x) = -x\sqrt{1-x^2}.$$

4. Si consideri dapprima la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n y^n$ (alla quale ci si riduce sostituendo y a $\frac{1}{x}$)

Tale serie converge (puntualmente) se $y \in (-1,1)$, è indeterminata per $y \le -1$, diverge a $+\infty$ per $y \ge 1$.

Non può convergere uniformemente su $(-1,1)$, mentre converge uniformemente su $[a,b]$ per ogni a, b tali che $[a,b] \subset (-1,1)$.

Poiché $n y^n = y \frac{d}{dy} y^n$ si ha

(nei chiusi e limitati di $(-1,1)$ nei quali vi è convergenza uniforme)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n y^n = y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dy} y^n \overset{\text{conv. unif.}}{=}$$

$$= y \frac{d}{dy} \sum_{n=1}^{\infty} y^n = y \frac{d}{dy} \frac{y}{1-y} =$$

$$= y \frac{1}{(1-y)^2}$$

Analogamente $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{x}\right)^n$

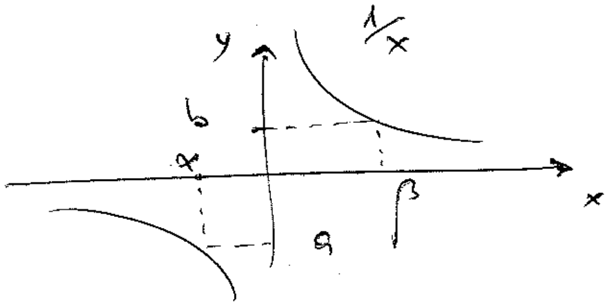
converge puntualmente (solo) in

$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, cioè quando

$\frac{1}{x} \in (-1, 1)$

converge uniformemente in

$(-\infty, \alpha] \cup [\beta, +\infty)$ cioè per



$a \leq \frac{1}{x} \leq b$

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{b} \\ \alpha = \frac{1}{a} \end{cases}$$

e la somma è data da

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x} \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

5. Si consideri dapprima il caso in cui $(x,y) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}$, insieme semplicemente connesso. Poiché F e' di classe C^1 basterà verificare che

$$(*) \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$ per avere $F = \nabla f$ per una qualche f.

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = ax + b\,\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = 2x + b^2\,\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

L'uguaglianza $(*)$ è verificata se (e solo se)

$a = 2$ e $b = 1$ oppure

$a = 2$ e $b = 0$

Se $a = 2$ e $b = 0$ si ha semplicemente che tutte le possibili f sono date da

$$f(x,y) = x^2 y + c \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

Nel caso in cui $b = 1$ si ha che

f deve verificare $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - \frac{x}{x^2+y^2}$$

per cui $f(x,y) = x^2 y - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Nel caso in cui il dominio di F è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

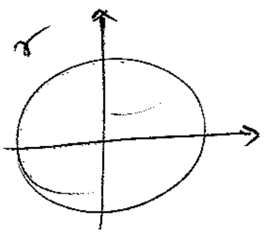
solamente il caso in cui $a = 2$ e $b = 0$

fornisce un campo conservativo.

Se $b = 1$ infatti l'integrale

$$\int_\gamma F(x) \cdot dx$$, il lavoro di F lungo

il cammino γ dato da



$t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t) \quad t \in [0, 2\pi],$

non è nullo!