Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
Prof. F. Albertini, M. Motta, F. Paronetto
Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, sede di Vicenza

FONDAMENTI DI ANALISI MATEMATICA 2

Vicenza, 20.09.2010

Soluzione

Esercizio 1 Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2} - y$

a) se ne trovino e disegnigno gli insiemi di livello,

b) se ne trovino il massimo e minimo assoluti, se esistono, nell'insieme $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 4\}$.

Soluzione. a) $\sqrt{x^2 + 2y^2} - y = c$ se e solo se vale

$$y \geq -c, \qquad x^2 + (y - c)^2 = c^2.$$

Quindi per $c = 0$ si ha solo l'origine; per $c > 0$ la circonferenza di $C(0, c)$ e $r = \sqrt{2}c$ (sempre sopra alla retta $y = -c$), mentre per $c < 0$ si ha l'insieme vuoto.

b) il vincolo $x^2 + y^2 = 4$ può essere esplicitato in $x^2 = 4 - y^2$ con $y \in [-2, 2]$ (non serve passare a x, perchè f è pari in x). Quindi sostituendo nella f si ottiene $g(y) = \sqrt{4 + y^2} - y$ per $y \in [-2, 2]$. Poichè $g'(y) < 0$, il minimo assoluto viene assunto per $y = 2$ e vale $m = 2(\sqrt{2} - 1)$ e il massimo assoluto viene assunto per $y = -2$ e vale $M = 2(\sqrt{2} + 1)$.

Esercizio 2 Si calcoli il volume del seguente insieme

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1,\, 0 \leqslant z \leqslant x\}\,.$$

Soluzione. C è la porzione del cilindro pieno di asse z' parallelo a z, passante per $C(1, 1, 0)$ e di raggio 1 delimitata dai piani $z = 0$ e $z = x$. In coordinate cilindriche di polo $C(1, 1, 0)$ e asse z':

$$\begin{cases} x - 1 = \rho\cos\theta \\ y - 1 = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \rho \in [0, 1], \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad 0 \leq z \leq x = 1 + \rho\cos\theta.$$

Poichè il determinante Jacobiano è ρ, si ottiene

$$Vol(C) = \iiint_C 1\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 \left[\int_0^{1+\rho\cos\theta} \rho\, dz \right] d\rho \right\} d\theta = \pi.$$

Esercizio 3 Data la funzione$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ se ne trovino i punti critici e se ne studi la loro natura al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ i punti critici sono dati dalle soluzioni del sistema

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 3ay = 0, \qquad f_y(x,y) = 3y^2 - 3ax = 0.$$

Per $a = 0$, esiste l'unico punto critico O dato dall'origine, mentre per $a \neq 0$, esistono O e anche $P(a,a)$. L'origine O è in ogni caso una sella, perchè $f(0,0) = 0$, ma per esempio $f(x,0) = x^3$ è negativa per $x < 0$ e positiva per $x > 0$. Se $a \neq 0$, in $P(a,a)$ la matrice Hessiana è

$$H(a,a) = \begin{pmatrix} 6a & -3a \\ -3a & 6a \end{pmatrix}.$$

Quindi $detH(a,a) = 27a^2 > 0$ e $a_{11} = 6a$, per cui $P(a,a)$ è minimo relativo stretto se $a > 0$ e massimo relativo stretto se $a < 0$.

Esercizio 4

Si calcoli l'area della superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 - 2x \leqslant 0\}.$$

Soluzione. S è costituita dalle 2 "calotte sferiche" ottenute intersecando la sfera cava di centro $O(0,0,0)$ e $r = 2$ con il cilindro pieno di asse z' parallelo a z passante per $C(1,0,0)$ e di raggio 1. Per simmetria basta calcolare l'area di $S^+ = S \cap \{z \geq 0\}$ e moltiplicarla per 2. S^+ è una superficie cartesiana che pu ò essere parametrizzata come

$$z = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)} \qquad (x,y) \in D \doteq \{(x,y) : \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Quindi

$$Area(S) = 2\,Area(S^+) = 2 \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}\right)^2}\, dx\, dy =$$

$$= 4 \iint_D \frac{dx\, dy}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}.$$

Passando in coordinate polari di centro $O(0,0)$ per rappresentare D,

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta$$

ricordando che il determinante Jacobiano è ρ si ottiene

$$Area(S) = 4 \int_{\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_0^{2\cos\theta} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}\right] d\theta = 16.$$

Esercizio 5

Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = y^2 + x^4 - 2yx^2$ si dica se nel punto $(1/2, 1/2)$ l'insieme

$$Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x,y) = 0\}$$

è grafico di una funzione $x = x(y)$ e/o di una funzione $y = y(x)$. In caso affermativo si trovi la retta tangente a tale grafico.
Lo stesso si faccia per il punto $(0, 0)$.

Soluzione. Non sono verificate le hp del Teorema del Dini in nessun punto di Z, però $f(x, y) = (y - x^2)^2 = 0$ se e solo se $y = x^2$. Poichè $(1/2, 1/2)$ non appartiene a Z, la funzione non può essere esplicitata in un suo intorno. In un intorno dell'origine è invece esplicitabile nella forma $y = y(x) = x^2$, mentre non è esplicitabile come $x = x(y)$. La retta tangente alla parabola $y = x^2$ in O è charamente $y = 0$.