

L'unica variazione riguarda il primo punto dell'esercizio n. 5, nel quale la funzione in questione è $f(x, y) = y^2 + x^4 - 2yx^2 - \frac{1}{16}$. Di conseguenza il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ appartiene al luogo degli zeri di f .

È immediato verificare che le derivate

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \neq 0,$$

di conseguenza Z è localmente (intorno al punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$) grafico sia di una funzione implicita della variabile y che di una della variabile x .

Si osservi che

$$f(x, y) = (y - x^2)^2 - \frac{1}{16}$$

per cui le due funzioni implicite (attorno al punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$!!!) sono in questo caso anche facilmente esplicitabili, e sono

$$x(y) = \sqrt{y - \frac{1}{4}}, \quad y(x) = x^2 + \frac{1}{4}.$$

Per quanto riguarda la retta tangente: se si esplicita la variabile x rispetto alla y (si ha $f(x(y), y) = 0$ localmente attorno al punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$) si ricava che

$$\frac{d}{dy} x\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = 1$$

per cui la retta tangente è data da

$$x = \frac{1}{2} + \left(y - \frac{1}{2}\right), \quad \text{cioè } y = x.$$

Analogamente si ricava la retta tangente al grafico di $y(x)$ che è (ovviamente) ancora $y = x$.