Corsi di laurea in ingegneria aerospaziale e ingegneria meccanica
Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica II

Padova, 25.1.2013

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **motivare** le risposte.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Dire se nell'insieme D la funzione f ammette massimo e/o minimo ed eventualmente trovarli, dove

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, |x^2+y^2-1| \leqslant z \leqslant 2 \right\}, \quad f(x,y,z) = \arccos\left(\frac{z+x}{2+\sqrt{3}}\right).$$

2. Data la funzione $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita da

$$F(x,y,z) = \big(z + \log(z-1)\big)\big(xy + e^x\big)$$

si mostri che l'equazione $F(x,y,z) = 0$ definisce implicitamente una funzione f di due variabili in un intorno del punto $P_o = (1,-e,2)$, specificando quali sono le due variabili. Detta $\tilde{P}_o$ la proiezione del punto P_o nel piano individuato da queste due variabili, si dica se il punto $\tilde{P}_o$ è stazionario per f.
Se sì, si dica se può essere un punto di minimo.

3. Data l'equazione differenziale $y''' - 2y'' + 5y' = 4$ se ne trovi l'integrale generale. Si indichino poi le eventuali soluzioni che soddisfano

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)-1}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)-1}{t} = \frac{4}{5}.$$

4. Data la curva

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t^2 + t^{2/3}, t^2 + t^{1/3}) & \text{se } t \in [0,1]\,, \\ (\log(e+1-t)^2, \log^2(e+1-t)^2) & \text{se } t \in (1,e]\,, \end{cases}$$

a) si verifichi che la curva è semplice e chiusa;
b) denotata con ν la normale esterna alla regione limitata che ha come bordo la curva γ e con F il campo di vettori $F(x,y) = (y^{1/3}, x^{2/3})$ si calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \langle F, \nu \rangle \, ds\,.$$

5. Si calcoli il volume dell'insieme

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, y^2 \leqslant z\,,\; 2 - x^2 - y^2 \geqslant z \right\}.$$

Corsi di laurea in ingegneria aerospaziale e ingegneria meccanica
Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica II

Padova, 25.2.2013

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **motivare** le risposte.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Dato l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 - 4y \leqslant 0,\ y \geqslant x,\ y \geqslant -x\}$ si calcoli

$$\int_{\partial D^+} x(y-2)dx + x^2 dy\,.$$

2. Data l'equazione differenziale $y' = 2\dfrac{y}{x} - 4\dfrac{x}{y}$

a) se ne trovino tutte le soluzioni;
b) si dica se esiste una soluzione dell'equazione soddisfacente $y(1) = 2$. Motivare la risposta.

3. Si trovino, se esistono, il massimo e il minimo della funzione

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{y^2 - x^2} \qquad \text{definita in } E = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqslant 2\right\}.$$

4. Dati la superficie di rotazione S definita da

$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \text{con } (x,y) \in C := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$$

e il campo di vettori $F(x,y,z) = (x,y,z)$ si calcoli il flusso $\int_S \langle F, \nu \rangle d\sigma$ del campo F attraverso la superficie S orientando la normale ν a S in modo tale che la terza componente di ν risulti positiva.

5. Data la funzione $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$F(x,y) = (\cos y)(\log x) + (y - \pi)^2,$$

a) si dica se l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $f = f(y)$ tale che $F(f(y), y) = 0$ in un intorno del punto $(1, \pi)$. Si verifichi che il punto π è stazionario per f e se ne studi la natura;
b) si consideri la funzione $G(x,y,z) = (\cos y)(\log x) + (y - \pi)^2$, cioè $G(x,y,z) = F(x,y)$. Si risponda alle seguenti domande solo basandosi su quanto ottenuto nel punto a): è possibile dire che in un intorno del punto $(1, \pi, 2)$ soddisfacente $G(1, \pi, 2) = 0$ esiste $g = g(y,z)$ tale che $G(g(y,z), y, z) = 0$? Se sì, è possibile dire se il punto $(\pi, 2)$ è stazionario per g ed eventualmente dire quale sia la sua natura per la funzione g?

Corsi di laurea in ingegneria aerospaziale e ingegneria meccanica
Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica II

Padova, 15.7.2013

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **motivare** le risposte.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Data la curva γ nel piano xz di equazione $xz = 1$ con $1 \leqslant x \leqslant 2$, sia S la superficie ottenuta facendo ruotare idealmente γ di un angolo giro intorno all'asse z.
a) Si scriva una parametrizzazione di S come superficie regolare;
b) si scriva l'equazione del piano tangente a tale superficie nel punto avente le prime due coordinate pari a $x = y = \sqrt{2}$;
c) si calcoli l'area di S.

2. Si verifichi che il campo di vettori

$$F(x, y) = \left(\log(x^2 y) + \frac{2(x+y)}{x}, \log(x^2 y) + \frac{x+y}{y}\right)$$

è conservativo in un dominio che contenga il punto $(1, 1)$, se ne trovino tutti i potenziali e si dica qual è il dominio massimale che contiene il punto $(1, 1)$ nel quale è possibile definire il campo F e un suo potenziale.
Si consideri il potenziale U che nel punto $(1, 1)$ vale zero. È possibile scrivere l'equazione della retta tangente all'insieme $U(x, y) = 0$?

3. Detta f la funzione $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{x^2 + \cos^2\sqrt{x^2+y^2}}{\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}}$ e γ la curva espressa in forma polare da

$$\rho = \vartheta\,, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi]\,,$$

si calcoli l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma f\,ds$.

4. Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$y' = 2\,x\,e^{x^2 - y}\,, \qquad y(0) = 1\,.$$

Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di y nel punto $x = 1$.

5. Si trovino, se esistono, il massimo e il minimo della funzione $f(x, y, z) = z + x^2 - 4x + y^2$ definita nell'insieme

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, z \geqslant x^2 + y^2,\ z \leqslant 2x\right\}.$$

Corsi di laurea in ingegneria aerospaziale e ingegneria meccanica
Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica II

Padova, 16.9.2013

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **motivare** le risposte.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' + 6y' + 9y = e^{-3t}$$

dopodiché si dica se fra le soluzioni ne esiste almeno una che ha in $t = 0$ un punto di minimo locale stretto.

2. Si considerino le due funzioni $F_1, F_2 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definite da

$$F_1(x, y, z) = x^5 y - y^2\sqrt{z} + 2 \qquad F_2(x, y, z) = \log(x + y + z) + x^2 \operatorname{sen}(y + z).$$

a) Per ciascuna di esse si dica se definisce in un intorno del punto $(1, -1, 1)$ una funzione implicita $f_i(x, y)$ tale che $F_i(x, y, f_i(x, y)) = 0$, $i = 1, 2$.
b) In caso affermativo si scrivano le equazioni dei piani tangenti ai grafici di tali f_i.
c) Si dica se il seguente sistema in un intorno del punto $(1, -1, 1)$ definisce implicitamente una curva

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

3. Si determinino, se esistono, il minimo e il massimo della funzione $f : S \to \mathbf{R}$ definita da $f(x, y, z) = xy - z^2$ dove S è l'insieme

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2 + 4y^2 = 1, -1 \leqslant z \leqslant 1\right\}.$$

4. Sia D l'insieme ottenuto ruotando idealmente attorno all'asse z l'insieme

$$A = \left\{(x, z) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqslant x \leqslant \cos z, 0 \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Si calcoli $\displaystyle\iiint_D \frac{x^2}{x^2 + y^2} dxdydz.$

5. Si calcoli il lavoro del campo F lungo la curva $\partial^+\Sigma$ (cioè l'integrale curvilineo

$$\int_{\partial^+\Sigma} F \cdot dx$$

dove il campo F è dato da

$$F(x, y, z) = (x, y^2, z^3)$$

e la curva $\partial^+\Sigma$ rappresenta il bordo della superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geqslant 0\}$$

con orientazione indotta dalla normale esterna.