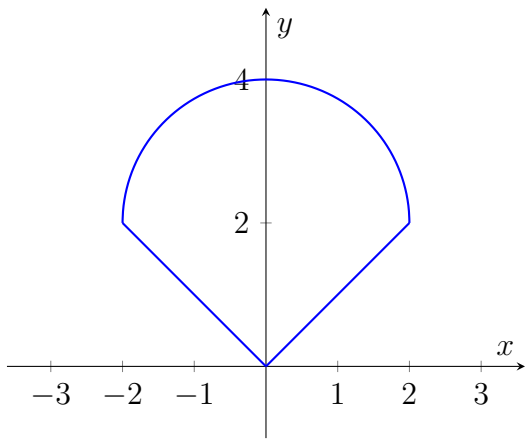
Soluzione del 25.2.2013

1. Dato l'insieme $D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2+y^2-4y \leqslant 0,\ y \geqslant x\right\}$ si calcoli

$$\int_{\partial D^+} x(y-2)dx + x^2 dy\,.$$

L'insieme ∂D è quello rappresentato in figura.



Possiamo parametrizzare orientando positivamente ∂D nel modo seguente: considerando le tre curve

$$\begin{aligned}
&\gamma_1(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t + 2), \quad t \in [0,\pi]\\
&\gamma_2(t) = (t, -t), \quad t \in [-2,0]\\
&\gamma_3(t) = (t, t), \quad t \in [0,2]
\end{aligned}$$

L'integrale diventa

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D^+} x(y-2)dx + x^2 dy =\\
&\quad = \int_0^\pi \left(-8\cos t \operatorname{sen}^2 t + 8\cos^3 t\right) dt + \int_{-2}^0 \left[t\,(-t-2) + t^2(-1)\right] dt + \int_0^2 \left(2t^2 - 2t\right) dt =\\
&\quad = \int_0^\pi \left(-16\cos t \operatorname{sen}^2 t + 8\cos t\right) dt + \int_{-2}^0 \left(-2t^2 - 2t\right) dt + \int_0^2 \left(2t^2 - 2t\right) dt =\\
&\quad = -\frac{16}{3}\operatorname{sen}^3 t\Big|_0^\pi + 8\operatorname{sen} t\Big|_0^\pi + \left(-\frac{2}{3}t^3 - t^2\right)\Bigg|_{-2}^0 + \left(\frac{2}{3}t^3 - t^2\right)\Bigg|_0^2 = 0.
\end{aligned}$$

Più semplicemente si poteva calcolare, utilizzando le formule di Gauss-Green

e ponendo $f(x,y) = x^2$, $g(x,y) = x(y-2)$,

$$\int_{\partial D^+} x(y-2)dx + x^2 dy =$$
$$= \iint_D \left[-\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right] dxdy = \iint_D x\, dxdy$$

che per simmetria del dominio rispetto ad x è nullo.

2. L'equazione differenziale

$$y' = 2\frac{y}{x} - 4\frac{x}{y}$$

può essere risolta introducendo la nuova variabile

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}$$

per cui il membro a destra diventa $f(z) = 2z - 4/z$. Si ottiene l'equazione differenziale

$$z' = \frac{1}{x}\big(f(z) - z\big)$$

che diventa, a patto che

$$f(z) - z \neq 0, \tag{1}$$

l'equazione a variabile separabili

$$x \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{zz'}{z^2-4} = \frac{1}{x}$$

che integrata fornisce l'uguaglianza

$$\frac{1}{2}\log|z^2-4| = \log|x| + c = \log k|x|$$

con $c \in \mathbf{R}$, $k > 0$, da cui

$$z^2 = 4 + k^2x^2 \quad \text{se } z^2 \geqslant 4, \qquad z^2 = 4 - k^2x^2 \quad \text{se } z^2 \leqslant 4.$$

Nel primo caso, se $y^2(x)/x^2 \geqslant 4$, si hanno le soluzioni soddisfacenti

$$y^2(x) = x^2(4 + k^2x^2)$$

e quindi le soluzioni

$$y(x) = \sqrt{x^2(4+k^2x^2)} \quad \text{e} \quad y(x) = -\sqrt{x^2(4+k^2x^2)};$$

nel secondo, se $y^2(x)/x^2 \leqslant 4$, si hanno le soluzioni

$$y(x) = \sqrt{x^2(4-k^2x^2)} \quad \text{e} \quad y(x) = -\sqrt{x^2(4-k^2x^2)}, \tag{2}$$

chiaramente fintanto che $4 - k^2x^2 \geqslant 0$.
Rimane da analizzare il caso scartato in (1): $f(z) = z$ se

$$2z - \frac{4}{z} = z, \qquad \text{cioè se} \quad z^2 = 4.$$

La quantità z^2 è 4 solo se

$$\left(\frac{y(x)}{x}\right)^2 = 4$$

e questo accade solo se

$$y(x) = 2x \qquad \text{oppure} \qquad y(x) = -2x.$$

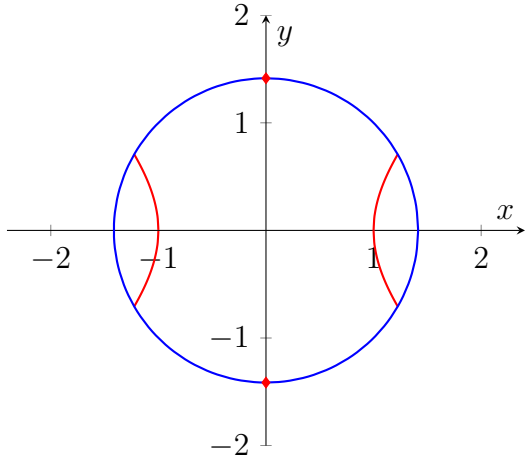
Proprio la funzione $y(x) = 2x$ è *la* soluzione che soddisfa il punto b). D'altra parte la condizione richiesta in b) sarebbe soddisfatta per una delle soluzioni trovate precedentemente solo per $k = 0$, mentre $k > 0$.

3. L'insieme E è compatto e la funzione f è continua, per cui f ammette sia massimo che minimo in E.

Possiamo procedere osservando che la funzione

$$g(t) = te^{-t}$$

ha massimo per $t = 1$ ed è strettamente crescente per $t < 1$ e strettamente decrescente per $t > 1$ per cui f avrà massimo quando $x^2 - y^2 = 1$ (con $(x, y) \in C$). Analogamente avrà minimo per il minimo valore negativo che $x^2 - y^2$ può assumere in C, cioè in $(0, \sqrt{2})$ e $(0, -\sqrt{2})$.



Volendo invece procedere annullando le derivate parziali della funzione f all'interno dell'insieme E si ottiene

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xe^{y^2-x^2}\big[1-(x^2-y^2)\big] = 0 \\ f_y(x,y) = 2ye^{y^2-x^2}\big[1-(x^2-y^2)\big] = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni i punti

$$(0,0), \quad \text{e} \quad (x,y) \in \mathring{E} : x^2 - y^2 = 1.$$

Per il bordo usiamo la parametrizzazione

$$\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Derivando $f \circ \gamma$ si ha

$$8\,\mathrm{sen}\, t \cos t\, e^{2\,\mathrm{sen}^2 t - 2\cos^2 t}\big(-1 + 2(\cos^2 t - \mathrm{sen}^2 t)\big)$$

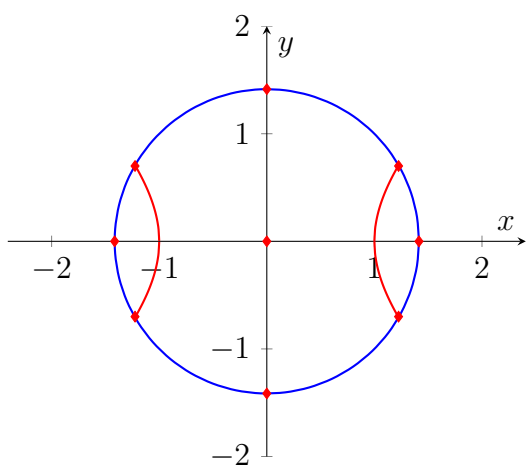
che si annulla per $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ e inoltre per t che soddisfa

$$2(\cos^2 t - \mathrm{sen}^2 t) = 1$$

cioè, scrivendo $\mathrm{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t$, per

$$\cos^2 t = \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{\pi}{6}, t = \frac{5\pi}{6}, t = \frac{7\pi}{6}, t = \frac{11\pi}{6}.$$

I candidati sono rappresentati in figura in colore rosso.



Si verifica che i punti di massimo e minimo sono quelli trovati precedentemente osservando gli insiemi di livello della funzione.

4. La superficie è parametrizzata da

$$\phi(x,y) = \left(x, y, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad \text{con } (x,y) \in C.$$

Per trovare il vettore normale cercato valutiamo prima

$$\phi_x = \left(1, 0, -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right), \qquad \phi_y = \left(0, 1, -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$$

da cui

$$\phi_x \wedge \phi_y = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}, 1\right).$$

La terza componente è positiva per cui la normale cercata è

$$\nu(x,y) = \frac{\phi_x \wedge \phi_y}{|\phi_x \wedge \phi_y|}.$$

Valutando

$$\big\langle F(\phi(x,y)), \nu(\phi(x,y))\big\rangle = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} \, \frac{1}{|\phi_x \wedge \phi_y|}.$$

L'integrale diventa

$$\iint_C \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} \, \frac{1}{|\phi_x \wedge \phi_y|} \, |\phi_x \wedge \phi_y| dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^2 d\rho \, \rho \, \frac{2}{\rho} = 4\pi.$$

5. La funzione $F(x,y) = (\cos y)\,(\log x) + (y-\pi)^2$ ha derivata parziale rispetto a x diversa da zero nel punto $(1,\pi)$. Infatti

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\cos y}{x}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = (-\operatorname{sen} y)\,(\log x) + 2(y-\pi),$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,\pi) = -1, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(1,\pi) = 0.$$

Di conseguenza esiste una funzione $f = f(y)$ che descrive localmente il luogo $F(x,y) = 0$ e si ha $F(f(y),y) = 0$. Poiché vale

$$\frac{d}{dy} F(f(y),y) = F_x(f(y),y) f'(y) + F_y(f(y),y) = 0 \tag{3}$$

la derivata $F_x(1,\pi) = 0$ ci dice che il punto π è stazionario per f. Per valutarne la natura troviamo le derivate seconde di F:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{\cos y}{x^2}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{\operatorname{sen} y}{x}$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = (-\cos y)\,(\log x) + 2$$

da cui

$$F_{xx}(1,\pi) = 1, \qquad F_{xy}(1,\pi) = 0, \qquad F_{yy}(1,\pi) = 2.$$

Derivando (3) ulteriormente rispetto ad y si ha

$$F_{xx}(f(y),y)\big(f'(y)\big)^2 + 2F_{xy}(f(y),y)f'(y) + F_x(f(y),y)f''(y) + F_{yy}(f(y),y) = 0$$

da cui

$$f''(\pi) = 2.$$

Se ne deduce che il punto π è di minimo per f.

Per venire al punto b) la risposta è sì: esiste una tale g e si ha $g(y,z) = f(y)$. Il punto $(\pi, 2)$ è quindi di minimo per g, ma non di minimo stretto.