

Soluzione del 15.7.2013

1. Una (non è l'unica) parametrizzazione della superficie è data da

$$\phi(x, y) = (x, y, \varphi(x, y)) \quad \text{con } (x, y) \in C,$$

dove

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Valutiamo l'elemento d'area:

$$\phi_x = \left(1, 0, -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right), \quad \phi_y = \left(0, 1, -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right),$$

$$\phi_x \wedge \phi_y = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, 1\right),$$

da cui

$$|\phi_x \wedge \phi_y|^2 = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} + 1.$$

Integrando su C e passando alle coordinate polari si ha

$$\text{Area}(S) = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^2 d\rho \rho \left(\frac{1}{\rho^4} + 1\right)^{1/2},$$

calcolo che è un po' complicato da eseguire. In realtà l'esercizio avrebbe dovuto essere il seguente

$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^2 d\rho \rho \left(\frac{1}{\rho^4} + 1\right) = \\ &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{\rho^2} + \rho\right) \Big|_1^2 = \frac{11}{4}\pi, \end{aligned}$$

ma ho commesso un errore nel preparare l'esercizio inserendo nell'integrale il quadrato di $|\phi_x \wedge \phi_y|$ anziché $|\phi_x \wedge \phi_y|$.

Infine, per trovare il piano tangente richiesto, è sufficiente valutare

$$\varphi(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \frac{1}{2}, \quad \varphi_x(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \varphi_y(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{8}$$

per cui il piano cercato è la funzione

$$p(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}(x - \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{8}(y - \sqrt{2}).$$

2. Si verifica facilmente che

$$(F_1)_y = (F_2)_x$$

per cui il campo ammette potenziale (dove è definito). Integrando, ad esempio, F_2 rispetto alla variabile y si ottiene

$$y \log(x^2 y) - y + x \log |y| + y + g(x).$$

Poiché il campo cercato deve essere definito in un insieme che contiene $(1, 1)$ la cui seconda coordinata è positiva possiamo considerare $y \log(x^2 y) + x \log y + g(x)$. Derivando rispetto a x si ottiene

$$g'(x) = 2 + \log x^2$$

da cui

$$g(x) = 2x + x \log x^2 - 2x + c, \quad c \in \mathbf{R},$$

e infine tutti i potenziali sono dati da

$$\begin{aligned} U(x, y) &= y \log(x^2 y) + x \log y + 2x + 2(x \log x - x) + c = \\ &= y \log(x^2 y) + x \log y + 2x \log x + c = \\ &= (x + y) \log(x^2 y) + c. \end{aligned}$$

Il più grande insieme aperto e connesso contenente $(1, 1)$ nel quale cercare il nostro potenziale è l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}.$$

Ciò non vieta di definire il campo F in $A := \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 0 \text{ oppure } y > 0\}$, ma in tal caso si avranno a priori due potenziali (che potranno differire tra loro per una costante) nelle due componenti connesse di A . Il potenziale che in $P = (1, 1)$ vale zero è quello per cui $c = 0$.

Venendo all'ultimo punto, si ha che $U(x, y) = 0$ è una curva (almeno localmente in un intorno del punto P) che è grafico sia rispetto alla variabile x che alla variabile y . Infatti

$$U_x(1, 1) \neq 0, \quad U_y(1, 1) \neq 0.$$

La retta cercata è $y + 2x - 3 = 0$. Infatti si ha, esprimendo ad esempio la curva come una funzione y funzione della variabile x ,

$$U_x(1, 1) + U_y(1, 1)y'(1) = 0$$

da cui $y'(1) = -2$. Poiché $y(1) = 1$ si ha che lo sviluppo di Taylor al prim'ordine di y è dato da

$$y(x) = 1 - 2(x - 1)$$

e quindi infine la retta cercata è $y = 3 - 2x$.

3. La curva è data da

$$\gamma(\vartheta) = (\vartheta \cos \vartheta, \vartheta \sin \vartheta).$$

Il modulo di γ' è dato da $\sqrt{1 + \vartheta^2}$ e

$$f \circ \gamma(\vartheta) = \sqrt{\frac{\vartheta^2 \cos^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta}{\cos^2 \vartheta}} = \sqrt{1 + \vartheta^2}.$$

Per cui l'integrale si riduce a calcolare l'integrale $\int_0^{2\pi} (1 + \vartheta^2) d\vartheta = 2\pi + 8\pi^3/3$.

4. L'equazione è a variabili separabili, per cui è sufficiente integrare

$$e^y y' = 2x e^{x^2}$$

e inserire le informazioni riguardanti il dato iniziale per ottenere

$$e^{y(x)} = e^{x^2} + c, \quad y(x) = \log(e^{x^2} + e - 1).$$

La retta tangente richiesta è data da:

$$r(x) = y'(1)(x - 1) + y(1).$$

È sufficiente calcolare allora $y(1) = \log(2e - 1)$ e $y'(1) = 2(2e - 1)^{-1}$ per ottenere r .

5. All'interno di E non vi sono punti stazionari per f poiché, ad esempio, $f_z = 1$, quindi $\nabla f \neq (0, 0, 0)$. Intersecando i grafici delle due funzioni $g(x, y) = x^2 + y^2$ e $h(x, y) = 2x$ e proiettando tale intersezione sul piano xy si ottiene il cerchio

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

La frontiera di E è data dall'unione delle due superfici

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, (x, y) \in C\}, \\ S_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 2x, (x, y) \in C\} \end{aligned}$$

e dalla curva

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, z = 2x\}$$

che risulta essere uguale anche a $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, (x, y) \in \partial C\} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 2x, (x, y) \in \partial C\}$. Parametrizziamo S_1 :

$$\begin{aligned}\phi_1(u, v) &= (u, v, u^2 + v^2), & (u, v) \in C, \\ f \circ \phi_1(u, v) &= u^2 + v^2 + u^2 - 4u + v^2.\end{aligned}$$

Cercando gli eventuali candidati su S_1 si ottiene

$$\begin{cases} 4u - 4 = 0 \\ 4v = 0 \end{cases} \implies (u, v) = (1, 0)$$

e quindi un punto candidato è $P_1 = (1, 0, 1)$. Analogamente parametrizziamo S_2 con

$$\begin{aligned}\phi_2(u, v) &= (u, v, 2u), & (u, v) \in C, \\ f \circ \phi_2(u, v) &= 2u + u^2 - 4u + v^2.\end{aligned}$$

Cercando gli eventuali candidati su S_1 si ottiene

$$\begin{cases} 2 + 2u - 4 = 0 \\ 2v = 0 \end{cases} \implies (u, v) = (1, 0)$$

da cui un secondo punto candidato è $P_2 = (1, 0, 2)$. Infine parametrizziamo la curva Γ con la funzione

$$\gamma(\vartheta) = (\cos \vartheta + 1, \sin \vartheta, 2(\cos \vartheta + 1))$$

e derivando $f \circ \gamma(\vartheta)$ si ottiene 0 per qualunque valore di ϑ . Ciò significa che su tale curva la funzione f è costante. Valutando ora f sui candidati si ottiene

$$\begin{aligned}f(P_1) &= -2, \\ f(P_2) &= -1, \\ f(\gamma(\vartheta)) &= 0.\end{aligned}$$

Di conseguenza tutti i punti sull'ellisse Γ sono punti di massimo, il punto P_2 è di minimo.