Soluzione del 16.9.2013

1. Il polinomio caratteristico associato all'equazione dato è

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2,$$

da cui il fatto che la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è data da

$$y_o(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-3t}.$$

Per determinare la soluzione dell'equazione completa possiamo applicare il metodo della variazione delle costanti, oppure più semplicemente, visto che il dato $f(t) = e^{-3t}$ è soluzione dell'equazione $y' + 3y = 0$, cercare tra le soluzioni dell'equazione omogenea (D indica l'operazione di derivazione)

$$(D^3 + 3)^3 y = 0\,.$$

Di conseguenza la soluzione va ricercata tra le soluzioni del tipo

$$y(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)e^{-3t}.$$

Di fatto sarà sufficiente trovare c_3. Possiamo quindi limitarci a valutare l'equazione per la funzione $\bar{y}(t) := c_3 t^2 e^{-3t}$. Otteniamo

$$(D^2 + 6D + 9)\bar{y} = (2c_3 - 12c_3 t + 9c_3 t^2)e^{-3t} + (2c_3 t - 3c_3 t^2)e^{-3t} + c_3 t^2 e^{-3t} = 0$$

da cui $c_3 = 1/2$. Tutte le soluzioni dell'equazione sono allora date da

$$y(t) = y_o(t) + \frac{1}{2}t^2 e^{-3t} = \left(c_1 + c_2 t + \frac{1}{2}t^2\right) e^{-3t}.$$

Per rispondere al quesito posto uguagliamo a zero la derivata prima di y e chiediamo che la derivata seconda sia positiva (in $t = 0$!). Si ha che

$$y'(t) = \left(-3c_1 + c_2 + t + c_2 t - \frac{3}{2}\,t^2\right) e^{-3t}\,,$$
$$y''(t) = \left(1 - 2c_2 + 9c_1 - 6t - 3c_2 t + \frac{9}{2}\,t^2\right) e^{-3t}\,.$$

Valutando per $t = 0$ si ottiene così il sistema

$$\begin{cases} -3c_1 + c_2 = 0 \\ 1 + 9c_1 - 2c_2 > 0 \end{cases}$$

per cui se $c_2 = 3c_1$ con $c_1 > -1/3$ le richieste sono soddisfatte. Ad esempio $c_1 = c_2 = 0$ andava bene.

2. a) Si verifica facilmente che

$$(F_1)_z(1,-1,1) \neq 0\,, \quad (F_2)_z(1,-1,1) \neq 0\,,$$

per cui entrambi i luoghi di zeri $F_1 = 0$ e $F_2 = 0$ rappresentano, in un intorno del punto $(1,-1,1)$, delle superfici cartesiane, grafici rispettivamente di una funzione f_1 e di una f_2.
b) I punti del piano tangente alla superficie determinata da $F_1 = 0$ sono dati da

$$\left(x, y, f_1(x_o, y_o) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_o, y_o)\big(x - x_o\big) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_o, y_o)\big(y - y_o\big)\right).$$

dove $x_o, y_o, z_o) = (1,-1,1)$ e f_1 è la funzione implicita. Il valore $f_1(1,-1)$ è 1, mentre per valutare le derivate parziali di f_1 dobbiamo prima valutare le derivate parziali di F_1:

$$\begin{aligned} (F_1)_x(x,y,z) &= 5x^4 y\,, & (F_1)_x(1,-1,1) &= -5 \\ (F_1)_y(x,y,z) &= x^5 - 2y\sqrt{z}\,, & (F_1)_y(1,-1,1) &= 3 \\ (F_1)_z(x,y,z) &= -\frac{y^2}{2\sqrt{z}} & (F_1)_z(1,-1,1) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Di conseguenza le derivate di f_1 sono date da

$$(f_1)_x(1,-1) = -\frac{(F_1)_x(1,-1,1)}{(F_1)_z(1,-1,1)} = -10 \qquad (f_1)_y(1,-1) = -\frac{(F_1)_y(1,-1,1)}{(F_1)_z(1,-1,1)} = 6.$$

L'equazione del piano tangente è allora

$$z = 1 - 10\big(x-1\big) + 6\big(y+1\big)\,.$$

In maniera analoga si trova che

$$(F_2)_x(1,-1,1) = 1\,, \quad (F_2)_y(1,-1,1) = 2\,, \quad (F_2)_z(1,-1,1) = 2\,,$$

e che il piano tangente al grafico di f_2 nel punto $(1,-1)$ è dato da

$$z = 1 - \frac{1}{2}\big(x-1\big) - \big(y+1\big)\,.$$

c) La risposta all'ultima domanda è sì: è sufficiente vedere che la matrice delle derivate parziali di F_1 e F_2

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & -1/2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ha rango 2.

3. L'insieme S è una superficie che può essere parametrizzata come segue:

$$(\vartheta, z) \in [0, 2\pi) \times [-1, 1]\,, \qquad \varphi(\vartheta, z) = \left(\cos\vartheta, \frac{1}{2}\operatorname{sen}\vartheta, z\right).$$

Valutando allora

$$f \circ \varphi\,(\vartheta, z) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta - z^2$$

e derivando si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\cos^2\vartheta - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\vartheta = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione si annulla solo per $z = 0$, mentre la prima si annulla se

$$\cos^2\vartheta = \operatorname{sen}^2\vartheta,$$

cioè se

$$\vartheta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}.$$

Abbiamo i quattro punti

$$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right)$$
$$B = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right)$$
$$C = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right)$$
$$D = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right)$$

limitatamente a $z \in (-1, 1)$.
Per quanto riguarda $z = -1$ e $z = 1$ si ha: in corrispondenza a $z = -1$ la curva

$$\gamma(t) = \left(\cos\vartheta, \frac{1}{2}\operatorname{sen}\vartheta, -1\right).$$

Valutando $f \circ \gamma$ e derivando si ottengono i quattro valori

$$t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

corrispondenti ai quattro punti

$$
\begin{aligned}
E &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -1\right) \\
F &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -1\right) \\
G &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, -1\right) \\
H &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, -1\right).
\end{aligned}
$$

Analogamente, considerando la curva $\eta(t) = \left(\cos\vartheta, \frac{1}{2}\operatorname{sen}\vartheta, 1\right)$ per il bordo superiore si ottengono gli altri quattro punti

$$
\begin{aligned}
I &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 1\right) \\
L &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 1\right) \\
M &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, 1\right) \\
N &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, 1\right).
\end{aligned}
$$

Valutando f in tutti questi punti si trovano il minimo e il massimo assoluti di f: i punti A e C sono di massimo, i punti F, H, L, N sono di minimo.

Volendo usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: si considera dapprima la funzione ausiliaria $H(x, y, z, \lambda) = xy - z^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 1)$ e derivando si ottiene

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial H}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial H}{\partial y} = x + 8\lambda y = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial H}{\partial z} = 2z = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = x^2 + 4y^2 - 1 = 0
\end{cases}
$$

da cui il sistema (tralasciando λ)

$$\begin{cases} z = 0 \\ 4y^2 = x^2 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases}$$

che fornisce i quattro punti A, B, C, D. Per continuare e valutare sulle due circonferenze in corrispondenza a $z = 1$ e $z = -1$ procediamo con due moltiplicatori e consideriamo la funzione $K(x, y, z, \lambda, \mu) = xy - z^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 1) + \mu(z - 1)$ (per la seconda di considererà la funzione $J(x, y, z, \lambda, \mu) = xy - z^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 1) + \mu(z + 1)$, ma a titolo di esempio mostrizmo solo i conti riguardanti la funzione K). Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial K}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial K}{\partial y} = x + 8\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial K}{\partial z} = 2z + \mu = 0 \\ \dfrac{\partial K}{\partial \lambda} = x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial K}{\partial \mu} = z - 1 = 0 \end{cases}$$

che fornisce (tralasciando λ e μ)

$$\begin{cases} z = 1 \\ 4y^2 = x^2 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases}$$

da cui i punti I, L, M, N. Analogamente si trovano E, F, G, H.

Più semplicemente studiando separatamente xy sull'ellisse $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + 4y^2 = 1\}$ e $-z^2$ in $[-1, 1]$ si traggono immediatamente le conclusioni.

4. L'insieme D può essere parametrizzando usando le coordinate cilindriche cosicché l'integrale diventa

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{x^2}{x^2 + y^2} dxdydz &= \int_0^{\pi/2} dz \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\cos z} \rho \, d\rho \frac{(\rho \cos \vartheta)^2}{\rho^2} = \\ &= \int_0^{\pi/2} dz \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\cos z} \rho \cos^2 \vartheta \, d\rho = \\ &= \int_0^{\pi/2} dz \int_0^{2\pi} d\vartheta \, \frac{1}{2} \cos^2 z \cos^2 \vartheta = \frac{\pi^2}{8} \, . \end{aligned}$$

5. Applicando il teorema di Stokes, e poiché il rotore del campo in questione è nullo, si trova che tale integrale è zero.