Corsi di laurea in ingegneria aerospaziale e ingegneria meccanica
Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica II

Padova, 31.1.2014

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **motivare** le risposte.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Dati la curva $\gamma(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \operatorname{sen} t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)$ definita per $t \in [0, 2\pi]$ e il campo di vettori $F(x, y, z) = (y + yz^2, -x + xz^2, 2xyz)$ si calcoli $\displaystyle\int_\gamma F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$.

2. Si calcolino, se esistono, il massimo e il minimo della funzione $f(x, y, z) = xz$ nell'insieme

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3,\ x^2 + y^2 - z^2 \leqslant 1\right\}.$$

3. Data la seguente funzione definita in $\mathbf{R}^2$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$$

a) si dica in quali punti del piano valgono le ipotesi del teorema delle funzioni implicite;
b) si studi in particolare nel punto $(4, 2)$ l'insieme di livello $f(x, y) = 49$: è il grafico di una funzione regolare? se sì, se ne scriva il polinomio di Taylor fino al secondo ordine.

4. Sia S la porzione del cilindro di equazione $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ compresa tra i piani $z = 0$ e $z = y$. Si calcoli l'area della supercie S.

5. Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'''' + 2u''' + 2u'' = t\,.$$

Corsi di laurea in ingegneria aerospaziale e ingegneria meccanica
Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica II

Padova, 18.2.2014

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **motivare** le risposte.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Sia Q il quadrato di vertici $(\sqrt{2}/2, 0)$, $(0, \sqrt{2}/2)$, $(-\sqrt{2}/2, 0)$, $(0, -\sqrt{2}/2)$. Dato il campo di vettori $F(x, y) = (x + y, x + y)$ e denotata con ν la normale esterna a Q si calcoli il flusso

$$\int_{\partial Q} \langle F, \nu \rangle ds \, .$$

2. Si calcoli il seguente integrale $\displaystyle\iint_D \frac{y^2}{x^2 + y^2} dxdy$ dove

$$D = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1\big\}.$$

3. Si dica se il campo di vettori definito in $\mathbf{R}^2$ da

$$F(x, y) = (6x(y - 4)^2 \log(1 + x^2) + 6x(y - 4)^2, 6(1 + x^2)(y - 4) \log(1 + x^2))$$

ammette potenziale e si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 6(1 + x^2)(y - 4)y' \log(1 + x^2) + 6x(y - 4)^2 \log(1 + x^2) + 6x(y - 4)^2 = 0 \\ y(\sqrt{e - 1}) = 3 \end{cases}$$

4. Si calcolino, se esistono, il massimo e il minimo della funzione $f(x, y, z) = xy + z^2$ nell'insieme

$$D = \big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\big|\, x^2 + y^2 \geqslant z^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\big\} \, .$$

5. Data la funzione (dipendente anche dal parametro k)

$$F(x, y, z) = k(\log y - 1)^2 + x^2 + 1 + z + kz^3$$

si dica, al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$, se esiste una funzione regolare $f(x, y)$ tale che l'insieme $F(x, y, z) = 1$ è il grafico di f e vale $F(x, y, f(x, y)) = 1$ in un intorno del punto $(0, e, 0)$.
Si dica se il punto $(0, e)$ è un punto stazionario per f e in tal caso se ne studi la natura, sempre al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.

Corsi di laurea in ingegneria aerospaziale e ingegneria meccanica
Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica II

Padova, 15.7.2014

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **motivare** le risposte.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Siano T il tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ ed F il campo di vettori in $\mathbf{R}^3$ dato da $F(x,y,z) = (x,-y,-z)$. Denotata con ν la normale esterna a T si calcoli il flusso

$$\iint_{\partial T} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma \, .$$

2. Si calcoli il seguente integrale $\displaystyle\iint_S \frac{x+1}{\sqrt{(x+y)^2 - 2z + 1}} \, d\sigma$ dove S è il grafico della funzione

$$f : D = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1-x}{1+x} \right\} \to \mathbf{R} \, , \qquad f(x,y) = xy \, .$$

3. Si trovino, se esistono, il massimo e il minimo della funzione

$f(x,y) = x\,y\,e^{-xy}$ definita nell'insieme
$E = \big\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, x^2 + y^2 \leqslant 2 \big\} \cup \big\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, x + y \geqslant 0, y \leqslant x + 2, y \geqslant x - 2 \big\}$.

4. Si trovino tutte le soluzioni della seguente equazione differenziale

$$u'' - 6u' + 9u = e^{3t} + \operatorname{sen} t \, .$$

5. Data la curva Γ in forma implicita

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0,$$

si dimostri che Γ è compatta e si calcolino i punti di massima e minima distanza dall'origine.

Corsi di laurea in ingegneria aerospaziale e ingegneria meccanica
Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica II

Padova, 18.9.2014

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **motivare** le risposte.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Dato il campo di vettori

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2 - y}, \frac{ax + by + c}{x^2 - y} \right)$$

si trovino $a, b, c \in \mathbf{R}$ tali per cui il campo F risulti conservativo e si trovi il più grande sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ nel quale il campo corrispondente a tali valori è conservativo. È possibile trovare un potenziale di tale campo che nel punto $(0, -1)$ valga 1? È possibile trovare un potenziale che valga 1 anche nel punto $(0, e)$?

2. Data la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, z = 1/2 \log(x^2 + y^2), 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$ per un qualche $r > 1$ si calcoli l'integrale di superficie

$$\iint_S \frac{z}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \, d\sigma \, .$$

3. Dati la funzione $f(x,y) = e^{x^2+y^2} + x^2 - y^2$
- si trovino il massimo e minimo nell'insieme (r parametro positivo)

$$E_r = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{4} + y^2 \leqslant r^2 \right\} ;$$

- se ne trovino i punti critici in $\mathbf{R}^2$ e se ne studi la loro natura.

4. Data la curva Γ intersezione delle due superfici

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{e} \quad S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, z = x^2 - y^2 + 2\}$$

si parametrizzi Γ e si calcoli il lavoro del campo

$$F(x,y,z) = \left(2xz + \frac{y}{x^2 + y^2} \, , \, 2yz - \frac{x}{x^2 + y^2} \, , \, x^2 + y^2 \right)$$

lungo tale curva.

5. Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \operatorname{tg} y(t) \\ y(0) = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$