Soluzione del 31.1.2014

1. Il calcolo diretto porta all'integrale

$$\int_0^{2\pi} \Big[-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}^2 t - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}^2 t \cos^2 t - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2 t + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos^4 t - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}^2 t \cos^2 t \Big] dt$$

che svolto (ricordando che $\int_0^{2\pi} \cos^4 dt = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2 dt$ e che) dà

$$\int_0^{2\pi} \Big[-\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\cos^4 t - \frac{3}{2\sqrt{2}}\cos^2 t \Big] dt = \int_0^{2\pi} \Big[-\frac{1}{\sqrt{2}} \Big] dt = -\sqrt{2}\,\pi\,.$$

Usando il teorema di Stokes il calcolo è immediato: infatti la curva è una circonferenza che sta sulla sfera di raggio 1 e interseca il piano $x = z$ (come è facile verificare). Di conseguenza parametrizza il bordo dell'insieme

$$D = \big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, z = x,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\big\}\ .$$

L'insieme D è un cerchio inclinato di $\pi/4$ la cui normale (coerente, secondo l'enunciato del teorema di Stokes, con l'orientazione della curva) è

$$\nu = \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \Big)\,.$$

Volendo ricavarla dai calcoli possiamo parametrizzare la superficie D considerando la mappa

$$\varphi : E \to \mathbf{R}^3\,, \quad E = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^3 \,|\, 2x^2 + y^2 \leqslant 1\big\}\ , \quad \varphi(x,y) = (x,y,x)\,.$$

Si ha che $\varphi_x \wedge \varphi_y = (-1, 0, 1)$ da cui si ricava la normale di sopra. Il rotore del campo è dato da

$$\mathrm{rot}\, F = (0, 0, -2)\,,$$

quindi il teorema di Stokes fornisce

$$\int_{\Gamma^+} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_{\partial D^+} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz =$$
$$= \iint_D \langle \mathrm{rot}\ F, \nu \rangle d\sigma = -\frac{2}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Area}(D) = -\sqrt{2}\,\pi\,.$$

2. Prima di tutto poiché l'insieme è un compatto di $\mathbf{R}^3$ ed f è una funzione continua il minimo e il massimo di f su D ci sono.
Annullando il gradiente si ottengono i punto $(0, y, 0)$ con y tale che il punto appartenga all'interno di D, cioè per $y \in (-1, 1)$. Cerchiamo gli eventuali

candidati sulla frontiera di D cominciando da $\partial D \cap \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2=3\}$. Possiamo usare le parametrizzazioni

$$\varphi_1(u,v) = (u,v,\sqrt{3-u^2-v^2}),$$
$$\varphi_2(u,v) = (u,v,-\sqrt{3-u^2-v^2}),$$

con $(u,v) \in \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \,|\, u^2+v^2 \leqslant 3\}$. Il dominio di φ_1 e il dominio di φ_2 sono lo stesso insieme che si trova intersecando $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leqslant 3\}$ e $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2+y^2-z^2 \leqslant 1\}$ e proiettando sul piano xy (e sostituendo (u,v) a (x,y)). Si ottiene l'insieme

$$A = \left\{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, u^2+v^2 \leqslant 2\right\}.$$

Annullando le derivate di $f \circ \varphi_1(u,v) = u\sqrt{3-u^2-v^2}$ si ottengono

$$\begin{cases} 3-u^2-v^2 = u^2 \\ \dfrac{uv}{\sqrt{3-u^2-v^2}} = 0 \end{cases}$$

da cui i punti

$$(0,\sqrt{3}), \quad (0,-\sqrt{3}), \quad (\sqrt{3}/\sqrt{2},0), \quad (-\sqrt{3}/\sqrt{2},0) \tag{1}$$

che corrispondono ai punti

$$(0,\sqrt{3},0), \quad (0,-\sqrt{3},0), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},0,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right), \qquad \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},0,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right).$$

I primi due punti non appartengono all'insieme A, i secondi due sì. Annullando le derivate di $f \circ \varphi_2(u,v) = -u\sqrt{3-u^2-v^2}$ si ottengono gli stessi punti trovati in (1) che corrispondono ai quattro punti

$$(0,\sqrt{3},0), \quad (0,-\sqrt{3},0), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},0,-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right), \qquad \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},0,-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right).$$

Passiamo alla parte $\partial D \cap \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2+y^2-z^2 = 1\}$ che può essere parametrizzata con

$$\psi(\vartheta,z) = (\sqrt{1+z^2}\cos\vartheta, \sqrt{1+z^2}\operatorname{sen}\vartheta, z)$$

con $\vartheta \in [0,2\pi]$ e $z \in [-1,1]$. Infatti sottraendo l'espressione $x^2+y^2-z^2=1$ all'espressione $x^2+y^2+z^2=3$ si ottiene

$$z^2 = 1\,.$$

Valutando le derivate di $f \circ \psi(\vartheta, z) = z\sqrt{1+z^2}\cos\vartheta$ e ponendole uguali a zero si ottiene

$$\begin{cases} (1+2z^2)\cos\vartheta = 0 \\ z\sqrt{1+z^2}\operatorname{sen}\vartheta = 0 \end{cases}$$

da cui i due punti

$$(0, \pi/2)\,, \quad (0, 3\pi/2)\,,$$

che corrispondono ai due punti

$$(0,1,0), \quad (0,-1,0).$$

Infine consideriamo lo spigolo dato dall'intersezione

$$\big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\big|\, x^2+y^2+z^2 \leqslant 3\big\} \cap \big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\big|\, x^2+y^2-z^2 \leqslant 1\big\}\,,$$

insieme che può essere parametrizzato con

$$\gamma(t) = \Big(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t, 1\Big)\,, \quad \eta(t) = \Big(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t, -1\Big)$$

$t \in [0, 2\pi]$. Valutando la derivata di $f \circ \gamma$ si ottiene

$$\operatorname{sen} t = 0$$

da cui i due punti

$$\Big(\sqrt{2}, 0, 1\Big)\,, \qquad \Big(-\sqrt{2}, 0, 1\Big)\,.$$

Analogamente annullando la derivata di $f \circ \eta$ si ottengono i due punti

$$\Big(\sqrt{2}, 0, -1\Big)\,, \qquad \Big(-\sqrt{2}, 0, -1\Big)\,.$$

Ora valutiamo f in tutti i punti candidati:

$$f(0, y, 0) = 0$$
$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}$$
$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{2}$$
$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{2}$$
$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}$$
$$f\,(0, 1, 0) = 0$$
$$f(0, -1, 0) = 0$$
$$f\left(\sqrt{2}, 0, 1\right) = \sqrt{2}$$
$$f\left(-\sqrt{2}, 0, 1\right) = -\sqrt{2}$$
$$f\left(\sqrt{2}, 0, -1\right) = -\sqrt{2}$$
$$f\left(-\sqrt{2}, 0, -1\right) = \sqrt{2}$$

da cui $\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ sono i due punti di minimo e $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ sono i due punti di massimo.

Volendo utilizzare (sul bordo) il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si poteva procedere come segue: considerare dapprima

$$H(x, y, z, \lambda) = xz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$$

e annullare le sue derivate ottenendo

$$\begin{cases} z + 2x\lambda = 0 \\ 2y\lambda = 0 \\ x + 2z\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$$

Tale sistema è soddisfatto dai punti

$$(0, \sqrt{3}, 0),\ (0, -\sqrt{3}, 0)$$

con $\lambda = 0$ (che comunque andranno scartati perché non appartenti al bordo di D) e dai punti

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right).$$

Poi considerare la funzione

$$K(x, y, z, \lambda) = xz + \lambda(x^2 + y^2 - z^2 - 1).$$

Le sue derivate poste uguali a zero forniscono

$$\begin{cases} z + 2x\lambda = 0 \\ 2y\lambda = 0 \\ x - 2z\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 = z^2 + 1. \end{cases}$$

Tale sistema è soddisfatto solamente dai punti

$$(0, 1, 0), \ (0, -1, 0)$$

in corrispondenza a $\lambda = 0$. Infine per lo spigolo consideriamo la funzione

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = xz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3) + \mu(x^2 + y^2 - z^2 - 1).$$

Annullando le derivate di L si ottiene

$$\begin{cases} z + 2x\lambda + 2\mu x = 0 \\ 2y\lambda + 2y\mu = 0 \\ x + 2z\lambda - 2z\mu = 0 \\ x^2 + y^2 = 3 - z^2 \\ x^2 + y^2 = z^2 + 1. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che $\lambda + \mu$ non può essere zero, di conseguenza (dalla terza equazione) si ha che $y = 0$. Dalle ultime due equazioni si ricava che $z^2 = 1$ e conseguentemente che $x^2 = 2$. Si verifica che esistono λ e μ per cui sono soddisfatte anche la seconda e la terza equazione. Conclusione: si sono trovati i punti

$$\left(\sqrt{2}, 0, 1\right), \qquad \left(-\sqrt{2}, 0, 1\right), \qquad \left(\sqrt{2}, 0, -1\right), \qquad \left(-\sqrt{2}, 0, -1\right).$$

3. Le derivate sono date da

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 3y \qquad \text{e} \qquad f_y(x, y) = 3y^2 - 3x$$

e si annullano rispettivamente per

$$y = x^2 \qquad \text{e} \qquad x = y^2$$

per cui gli unici punti in cui entrambe si annullano sono $(0,0)$ e $(1,1)$. Di conseguenza intorno a questi punti non è possibile, almeno a priori, dire se i corrispondenti insiemi di livello sono curve cartesiane.

In particolare nel punto $(4,2)$ la derivata rispetto alla variabile y è zero, ma è diversa da zero quella rispetto ad x. Di conseguenza esisterà una funzione x della variabile y tale che

$$f\big(x(y), y\big) = 49$$

in un intorno del punto 2, con $x(2) = 4$. Si ha che

$$f_x\big(x(y), y\big)x'(y) + f_y\big(x(y), y\big) = \big[3(x(y))^2 - 3y\big]x'(y) + 3y^2 - 3x(y) = 0$$

da cui

$$x'(2) = 0\,.$$

La derivata seconda si ricava dall'espressione

$$f_{xx}\big(x(y), y\big)\big(x'(y)\big)^2 + 2f_{xy}\big(x(y), y\big)x'(y) + f_x\big(x(y), y\big)x''(y) + f_{yy}\big(x(y), y\big) = 0$$

ottenendo

$$x''(2) = -\frac{f_{yy}(4,2)}{f_x(4,2)} = -\frac{2}{7}$$

da cui

$$x(y) = 4 - \frac{1}{7}(y-2)^2 + o((y-2)^2)\,.$$

4. Il calcolo diretto può essere fatto parametrizzando la superficie con le coordinate cilindriche (ϑ, z) nel modo seguente: $\vartheta \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, \operatorname{sen}\vartheta + 1]$ e

$$\varphi(\vartheta, z) = (\cos\vartheta,\, \operatorname{sen}\vartheta + 1, z)\,.$$

Si ha che $\varphi_\vartheta = (-\operatorname{sen}\vartheta, \cos\vartheta, 0)$, $\varphi_z = (0,0,1)$ e

$$|\varphi_\vartheta \wedge \varphi_z| = 1\,.$$

Per cui l'area è data da

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\operatorname{sen}\vartheta + 1} dz = 2\pi\,.$$

Più semplicemente si osservi che la superficie di cui si richiede l'area è esattamente la metà della superficie del cilindro di equazione $x^2 + (y-1)^2 = 1$

compresa tra i piani $z = 0$ e $z = 2$. Di conseguenza l'area è data dalla lunghezza della curva di base, che è 2π, moltiplicata per l'altezza, che è 2, il tutto diviso per 2; il che restituisce nuovamente 2π.

5. L'equazione può essere scritta come

$$(D^4 + 2D^3 + 2D^2)u = t\,.$$

Risolvendo prima l'equazione omogenea si ha prima di tutto che le radici del polinomio $D^4 + 2D^3 + 2D^2$ sono 0 (con molteplicità 2), $-1+i$, $-1-i$. Di conseguenza le soluzioni dell'omogenea sono date da

$$c_1 e^{-t}\cos t + c_2\, e^{-t}\,\mathrm{sen}\, t + c_3 + c_4\, t\,.$$

Ora si osservi che l'annichilatore per il dato $f(t) = t$ è D^2, per cui la soluzione andrà cercata tra le soluzioni dell'equazione

$$(D^6 + 2D^4 + 2D^4)u = 0$$

che sono tutte quelle del tipo

$$c_1 e^{-t}\cos t + c_2\, e^{-t}\,\mathrm{sen}\, t + c_3 + c_4\, t + c_5 t^2 + c_6 t^3\,.$$

Scartando quelle che risolvono l'omogenea ci si può limitare a cercare tra le funzioni u del tipo $c_5 t^2 + c_6 t^3$. Valutiamo

$$\begin{gathered} u'(t) = 2c_5 t + 3c_6 t^2 \\ u''(t) = 2c_5 + 6c_6 t \\ u'''(t) = 6c_6 \\ u''''(t) = 0 \end{gathered}$$

che inserite nell'equazione forniscono

$$12c_6 + 4c_5 + 12c_6 t = t$$

da cui si ricava che

$$c_6 = \frac{1}{12}\,, \qquad c_5 = -\frac{1}{4}\,.$$

Le soluzioni cercate sono dunque tutte e sole le funzioni

$$c_1 e^{-t}\cos t + c_2\, e^{-t}\,\mathrm{sen}\, t + c_3 + c_4\, t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{12}t^3$$

al variare di $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$.