Soluzione del 18.2.2014

1. Usando il teorema della divergenza il calcolo è immediato: infatti si ha che $\operatorname{div} F = 2$ e che l'insieme Q è un quadrato di area 1, per cui il flusso è 2.

2. Usiamo le coordinate polari: le due circonferenze $x^2+y^2 = 1$ e $x^2+(y-1)^2 = 1$ si intersecano nei punti $(\sqrt{3}/2, 1/2)$ e $(-\sqrt{3}/2, 1/2)$.
L'integrale, usando le coordiante polari e grazie alla simmetria della funzione integranda e dell'insieme rispetto all'asse y, è quindi dato da

$$2\int_0^{\pi/6} d\vartheta \int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\vartheta} \rho\ \mathrm{sen}^2\,\vartheta\, d\rho + 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^1 \rho\ \mathrm{sen}^2\,\vartheta\, d\rho =$$
$$= \int_0^{\pi/6} \mathrm{sen}^4\,\vartheta\, d\vartheta + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \mathrm{sen}^2\,\vartheta\, d\vartheta\,.$$

Ricordando che

$$\int_0^{\pi/6} \mathrm{sen}^4\,\vartheta\, d\vartheta = -\mathrm{sen}^3\,\vartheta\ \cos\vartheta\Big|_0^{\pi/6} 3\int_0^{\pi/6} \mathrm{sen}^2\,\vartheta\,(1-\mathrm{sen}^2\,\vartheta\,)d\vartheta =$$
$$= -\mathrm{sen}^3\,\vartheta\ \cos\vartheta\Big|_0^{\pi/6} + 3\int_0^{\pi/6} \mathrm{sen}^2\,\vartheta\, d\vartheta - 3\int_0^{\pi/6} \mathrm{sen}^4\,\vartheta\, d\vartheta$$

da cui

$$\int_0^{\pi/6} \mathrm{sen}^4\,\vartheta\, d\vartheta = -\frac{1}{4}\mathrm{sen}^3\,\vartheta\ \cos\vartheta\Big|_0^{\pi/6} + \frac{3}{4}\int_0^{\pi/6} \mathrm{sen}^2\,\vartheta\, d\vartheta\,,$$

e che

$$\mathrm{sen}^2\,\vartheta = \frac{1}{2}\,(1-\cos 2\vartheta)$$

si ottiene che l'integrale dato diventa

$$\ldots = -\frac{1}{4}\mathrm{sen}^3\,\vartheta\ \cos\vartheta\Big|_0^{\pi/6} + \frac{3}{4}\int_0^{\pi/6} \mathrm{sen}^2\,\vartheta\, d\vartheta + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \mathrm{sen}^2\,\vartheta\, d\vartheta =$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\pi}{48} - \frac{3}{8}\int_0^{\pi/6} \cos 2\vartheta\, d\vartheta + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos 2\vartheta\, d\vartheta =$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\pi}{48} - \frac{3\sqrt{3}}{32} + \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{11\pi}{48} - \frac{\sqrt{3}}{32}\,.$$

3. L'equazione $6(1+x^2)(y-4)y'\log(1+x^2)+6x(y-4)^2\log(1+x^2)+6x(y-4)^2=0$ è un'equazione differenziale esatta. Integrando rispetto a y la quantità $6(1+x^2)(y-4)\log(1+x^2)$ si ottiene

$$U(x,y)=3(1+x^2)(y-4)^2\log(1+x^2)+h(x)$$

e derivando tale espressione rispetto a x si ottiene

$$6x(y-4)^2\log(1+x^2)+6x(y-4)^2+h'(x)$$

da cui si ricava che $h(x)=k$ con $k\in\mathbf{R}$, per cui $U(x,y)=3(1+x^2)(y-4)^2\log(1+x^2)+k$ (U è anche il potenziale del campo F). Di conseguenza la soluzione verificherà

$$3(1+x^2)(y(x)-4)^2\log(1+x^2)+k=c'$$

per una qulache $c'\in\mathbf{R}$. Chiamando c la costante $c'-k$ si ha che $y(x)$ verifica $3(1+x^2)(y(x)-4)^2\log(1+x^2)=c$, da cui

$$\big(y(x)-4\big)^2=\frac{c}{3(1+x^2)\log(1+x^2)}\,. \tag{1}$$

Imponendo la richiesta $y(\sqrt{e-1})=3$ si ha

$$1=\frac{c}{3e}$$

da cui si ricava c. Invertendo l'espressione (1) tenendo conto del dato iniziale si ha infine che la soluzione è

$$y(x)=4-\sqrt{\frac{e}{(1+x^2)\log(1+x^2)}}\,.$$

4. L'insieme è una parte di un cilindro privata di un cono. Il gradiente di f è dato da $(y,x,2z)$ che si annulla solo in $(0,0,0)$, che non è interno. Parametrizziamo il bordo. Sia

$$C=\{(u,v)\in\mathbf{R}^2\,|\,u^2+v^2\leqslant 1\}.$$

La parte di cono può essere parametrizzata con

$$\varphi_1(u,v)=(u,v,\sqrt{u^2+v^2})\quad\text{con}\quad(u,v)\in C\,.$$

Annullando le derivate di $f\circ\varphi_1(u,v)=uv+u^2+v^2$ si ottiene

$$\begin{cases} v+2u=0\\ u+2v=0,\end{cases}$$

sistema che è soddisfatto solo da $(0,0)$ (che a priori va scaratato perché punto di non differenziabilità di φ_1). Consideriamo poi

$$\varphi_2(u,v) = (u,v,0) \quad \text{con} \quad (u,v) \in C\,.$$

Si che $f \circ \varphi_2(u,v) = uv$ che ha gradiente uguale a (v,u) che ancora si annulla solo in $(0,0)$. Sul bordo laterale, parametrizzato da

$$\psi(\vartheta,z) = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta, z) \quad \text{con} \quad (\vartheta,z) \in [0,2\pi] \times [0,1]\,,$$

si ha: $f \circ \psi(\vartheta,z) = \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta + z^2$ le cui derivate poste uguali a zero forniscono

$$\begin{cases} \cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta = 0 \\ 2z = 0, \end{cases}$$

da cui i punti $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$, $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ che vanno scartati perché a loro volta di bordo.
Infine i due spigoli, parametrizzati da

$$\gamma(\vartheta) = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta, 0), \qquad \eta(\vartheta) = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta, 1)\,,$$

con $\vartheta \in [0,2\pi]$. Valutando $f(\gamma(\vartheta))$ e $f(\eta(\vartheta))$ e le loro derivate si ottengono i punti

$$\begin{gathered}(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0),\\ (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1), (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1), (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1).\end{gathered}$$

Valutando f in questi punti e nell'ulteriore candidato $(0,0,0)$ si ottiene che

$$\begin{aligned} (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1) \text{ e } (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1) &\qquad \text{sono i punti di massimo,} \\ (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0) \text{ e } (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0) &\qquad \text{sono i punti di minimo.} \end{aligned}$$

5. Derivando F rispetto alla variabile z si ha

$$\begin{aligned} F_z(x,y,z) &= 1 + 3kz^2, \\ F_z(0,e,0) &= 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Le altre due derivate sono

$$\begin{aligned} F_x(x,y,z) &= 2x\,, & F_x(0,e,0) &= 0, \\ F_y(x,y,z) &= 2k\,\frac{1}{y}(\log y - 1) & F_y(0,e,0) &= 0, \end{aligned}$$

per cui, poiché valgono

$$F_x(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))f_x(x,y) = 0\,,$$
$$F_y(x,y,f(x,y)) + F_z(x,y,f(x,y))f_y(x,y) = 0\,,$$

si ha

$$f_x(0,e) = f_y(0,e) = 0$$

e il punto $(0,e)$ risulta stazionario per f. Vediamo le sue derivate seconde. Riscrivendo le espressioni per le derivate prime come segue

$$2x + \big(1 + 3kf(x,y)^2\big)f_x(x,y) = 0\,,$$
$$2k\,\frac{1}{y}(\log y - 1) + \big(1 + 3kf(x,y)^2\big)f_y(x,y) = 0\,,$$

e derivandole si ottengono

$$2 + 6kf(x,y)f_x(x,y)^2 + \big(1 + 3kf(x,y)^2\big)f_{xx}(x,y) = 0\,,$$
$$6kf(x,y)f_y(x,y)f_x(x,y) + \big(1 + 3kf(x,y)^2\big)f_{xy}(x,y) = 0\,,$$
$$\frac{2k}{y^2} - \frac{2k}{y^2}(\log y - 1) + 6kf(x,y)f_y(x,y)^2 + \big(1 + 3kf(x,y)^2\big)f_{yy}(x,y) = 0\,,$$

da cui

$$H_f(0,e) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2ke^{-2} \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza per $k > 0$ il punto risulta di massimo, per $k < 0$ di sella.
Un discorso a parte va fatto per il caso $k = 0$: infatti in questo caso la funzione F si riduce a $F(x,y,z) = x^2+1+z$ ed in questo caso si può facilmente esplicitare z in termini di x e y (di fatto solo di x) e ottenere che la funzione implicita è di fatto

$$f(x,y) = -1 - x^2\,.$$

Si conclude che il punto $(0,e)$ è di massimo (non stretto) per f.