Soluzione del 15.7.2014

1. Usando il teorema della divergenza il calcolo può ridursi (ma anche un calcolo diretto è possibile) al seguente: poiché $\operatorname{div} F = -1$ si ha che il flusso richiesto è

$$\iiint_T \operatorname{div} F dxdydz = -\iiint_T dxdydz =$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = -\frac{1}{6}\,.$$

2. Poiché la più semplice parametrizzazione di S è data da

$$\phi(x,y) = (x,y,f(x,y)) = (x,y,xy)$$

l'integrale diventa

$$\iint_D \frac{x+1}{\sqrt{(x+y)^2 - 2f(x,y) + 1}} \sqrt{1+x^2+y^2}\, dxdy =$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{1+x}} dy(x+1) = \int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2}\,.$$

3. Innanzitutto si osservi che l'insieme E non è limitatao per cui non è detto che la funzione f ammetta massimo e/o minimo in E.

Possiamo procedere osservando che la funzione

$$g(t) = te^{-t}$$

ha massimo per $t = 1$ ed è strettamente crescente per $t < 1$ e strettamente decrescente per $t > 1$ per cui f avrà massimo quando $xy = 1$ (con $(x,y) \in E$). Analogamente avrà minimo per il minimo valore che xy può assumere in E. Poiché

$$f(x,y) = g(xy)$$

si può immediatamente concludere che il massimo è quindi assunto per $xy = 1$, e cioè nell'arco di iperbole contenuti in E e nel punto $(-1,-1)$, il minimo nei punti $(-1,1)$ e $(1,-1)$.

Volendo invece procedere annullando le derivate parziali della funzione f all'interno dell'insieme E si ottiene il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = ye^{-xy}\big[1-xy\big] = 0 \\ f_y(x,y) = xe^{-xy}\big[1-xy\big] = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni i punti

$$(0,0), \quad \text{e} \quad (x,y) \in \overset{\circ}{E} : xy = 1.$$

Per una parte di bordo usiamo la parametrizzazione

$$\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t), \qquad t \in [3\pi/4, 7\pi/4].$$

Derivando $f \circ \gamma$ si ha

$$(2\cos^2 t - 2\,\mathrm{sen}^2 t)\, e^{-2\,\mathrm{sen}\, t \cos t}\big(1 - 2\cos t\,\mathrm{sen}\, t\big)$$

che si annulla per $t = 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 7\pi/4$.
Per la restante parte di bordo si possono considerare

$$\begin{aligned} \eta(t) &= (t, t+2), \qquad t \in [-1, +\infty), \\ \delta(t) &= (t, t-2), \qquad t \in [1, +\infty). \end{aligned}$$

Considerando $f \circ \eta$ e derivando si ottiene

$$(2t+2)e^{-t(t+2)}(1 - t^2 - 2t) = 0$$

che fornisce i valori

$$t = -1 \qquad \text{e} \qquad t = \sqrt{2} - 1$$

corrispondenti ai punti $(-1,1)$ e $(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$. Analogamente analizzando il comportamento di f lungo la curva δ si ottengono i due punti $(1,-1)$ e $(\sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1)$.
Per quanto riguarda il comportamento all'infinito si verifica facilmente che

$$\lim_{\substack{|(x,y)| \to +\infty, \\ (x,y) \in E}} f(x,y) = 0$$

per cui la funzione assume il valore minimo $-e$ nei punti $(-1,1)$ e $(1,-1)$, il valore massimo e^{-1} nei punti $(-1,-1)$ e in tutto l'arco di iperbole $xy = 1$, $x > 0$, contenuto in E.
4. Cominciamo con il risolvere l'equazione

$$u'' - 6u' + 9u = 0$$

che ha come soluzioni tutte le funzioni del tipo

$$y(t) = c_1\, e^{3t} + c_2\, t\, e^{3t}\,.$$

Volendo ora risolvere

$$u'' - 6u' + 9u = e^{3t}$$

dovremo cercare fra le soluzioni del tipo

$$v(t) = c_1\, e^{3t} + c_2\, t\, e^{3t} + c_3\, t^2\, e^{3t}$$

mentre per risolvere

$$u'' - 6u' + 9u = \operatorname{sen} t$$

cercheremo tra le funzioni del tipo

$$w(t) = c_1\, e^{3t} + c_2\, t\, e^{3t} + c_4 \cos t + c_5 \operatorname{sen} t\,.$$

Poiché l'equazione è lineare una generica soluzione sarà data dalla somma di v e w. Trascurando i termini $c_1\, e^{3t} + c_2\, t\, e^{3t}$ che risolvono l'omogenea ci si può limitare a cercare una soluzione tra le funzioni del tipo

$$c_3\, t^2\, e^{3t} + c_4 \cos t + c_5 \operatorname{sen} t\,.$$

Inserendo nell'equazione si ottengono

$$c_3 = \frac{1}{2}\,, \quad c_4 = \frac{3}{50}\,, \quad c_5 = \frac{4}{50}\,.$$

5. Passando alle coordinate polari si può scrivere la curva come

$$\rho^2 \big(\rho^2 - 2(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)\big) = 0\,.$$

Da ciò si deduce immediatamente che l'origine fa parte del sostegno della curva, da cui il punto di minima distanza dall'origine è l'origine stessa. Dall'uguaglianza di sopra si deduce che, una volta eliminata l'origine, i punti del sostengo della curva devono soddisfare

$$\rho^2 - 2(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta) = 0\,,$$

cioè

$$\rho^2 = 2(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)\,, \tag{1}$$

che avrà senso solo quando la quantità a destra non è negativa, cioè solo per

$$\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \quad \text{oppure per} \quad \vartheta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]\,.$$

Poiché $\rho(x,y)$ rappresenta proprio la distanza dall'origine del punto (x,y) per trovare tali punti basterà massimizzare, al variare di ϑ, la quantità $\sqrt{2(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)}$ che è massima dove è massima la funzione

$$f(\vartheta) := \cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta\,.$$

Derivando si ottiene

$$f'(\vartheta) := -4\cos\vartheta\,\operatorname{sen}\vartheta$$

che si annulla per

$$\vartheta = 0, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta = \pi, \quad \vartheta = \frac{3\pi}{2}\,.$$

La distanza dall'origine è quindi massima in corrispondenza a $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \pi$ che corrispondono ai due punti

$$\big(\sqrt{2}, 0\big) \qquad \text{e} \qquad \big(0, \sqrt{2}\big)\,.$$

A questo punto verificare che Γ è compatta è immediato: è il sostegno di una curva continua, e quindi è chiusa, è limitata perché la sua massima distanza adll'origine è $\sqrt{2}$.

Per la cronaca (parte che nell'esercizio non era richiesta): la curva espressa da (1) può facilmente essere parametrizzata nel modo seguente

$$\begin{aligned}&\gamma(\vartheta) = \Big(\sqrt{2(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)}\,\cos\vartheta, \sqrt{2(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)}\,\operatorname{sen}\vartheta\Big)\\ &\text{fintanto che} \quad \vartheta \in \Big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\Big]\end{aligned}$$

il cui sostengo è la parte della curva in figura nel semipiano $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x \geqslant 0\}$; la stessa parametrizzazione con il parametro in un altro intervallo, cioè

$$\begin{aligned}&\gamma(\vartheta) = \Big(\sqrt{2(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)}\,\cos\vartheta, \sqrt{2(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)}\,\operatorname{sen}\vartheta\Big)\\ &\text{fintanto che} \quad \vartheta \in \Big[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\Big]\end{aligned}$$

ha come sostengo la parte della curva in figura nel semipiano $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x \leqslant 0\}$.