Soluzione del 18.9.2014

1. Si vede facilmente che il campo è irrotazionale per i valori $a = b = 0$ e $c = -1$. I potenziali sono

$$\phi_1(x, y) = \log(x^2 - y) + k_1$$

con $k_1 \in \mathbf{R}$ nella regione

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y < x^2\},$$

e

$$\phi_2(x, y) = \log(y - x^2) + k_2$$

con $k_2 \in \mathbf{R}$ nella regione

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y > x^2\}.$$

Il punto $(0, -1)$ appartiene alla regione D_1 e cerchiamo k_1 in modo tale che $\phi_1(0, -1) = \log 1 + k_1 = 1$, da cui $k_1 = 1$.
Analogamente, poiché $(0, e)$ appartiene alla regione D_2, il potenziale sarà $\log(y - x^2) + k_2$ per un qualche k_2, che risulta essere 0.

2. La più semplice parametrizzazione di S è data da

$$\phi(x, y) = \left(x, y, \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)\right)$$

dove ϕ è definita in

$$D_r = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant r^2\}\,.$$

Si ha che

$$\phi_x \wedge \phi_y = \left(-\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}, 1\right)$$

per cui l'integrale, passando in coordinate polari, diventa

$$\iint_{D_r} \frac{1}{2}\, \frac{\log(x^2 + y^2)}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \sqrt{\frac{1 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}}\, dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^r d\rho\, \frac{1}{2}\, \log \rho^2 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^r d\rho\, \log \rho = 2\pi(r \log r - r + 1)\,.$$

3. Innanzitutto si osservi che l'insieme E_r è compatto e che la funzione in questione è continua, per cui la funzione f ammette sia massimo che minimo in E_r. Derivando f si ottengono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\big(e^{x^2+y^2}+1\big) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y\big(e^{x^2+y^2}-1\big)$$

che si annullano solo per $(x,y) = (0,0)$, unico punto critico all'interno di E.
Per quanto riguarda il bordo di E, può essere parametrizzato con

$$\gamma(t) = (2r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t) \qquad t \in [0,2\pi]\,.$$

Valutando $f\circ\gamma$ si ottiene

$$\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t) = -6\,r^2\cos t\,\mathrm{sen}\,t\big(1+e^{3r^2\cos^2 t+r^2}\big)$$

che si annulla solo per $t=0$, $t=\pi/2$, $t=\pi$, $t=3\pi/2$, valori che corrispondono ai quattro punti

$$(2r,0), (0,r), (-2r,0), (0,-r).$$

Valutando f in questi quattro punti e in $(0,0)$ ci si rende conto che

$$(2r,0) \text{ e } (-2r,0) \quad \text{sono punti di massimo}$$

nei quali f assume il valore $e^{4r^2}+4r^2$.
Per valutare dove f assume il minimo bisogna ricorrere al fatto che $e^t \geqslant 1+t$ per ogni $t\in\mathbf{R}$ e $e^t > 1+t$ per ogni $t\neq 0$, per cui

$$e^{r^2}-r^2 > 1 \qquad \text{per ogni } r>0$$

da cui $(0,0)$ è di minimo poiché in tale punto f assume il valore 1.
Se non si ricorda la disuguaglianza $e^t \geqslant 1+t$ è molto semplice ricavarla considerando la funzione $f(t) = e^t - t$: si ha che $f(0)=1$ e $f'(t) = e^t - 1$, da cui f strettamente decrescente per $t<0$, strettamente crescente per $t>0$.

Venendo al secondo punto, lo studio delle derivate seconde non aiuta, poiché si ottiene che la matrice hessiana nel punto $(0,0)$ è

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'altra parte avendo trovato precedentemente che $(0,0)$ è di minimo assoluto in ogni insieme E_r, qualunque sia r se ne conclude che $(0,0)$ è di minimo locale.

4. La curva può essere parametrizzata con

$$t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t + 2)\,.$$

Il calcolo diretto porta ad ottenere che il lavoro è -2π.
Un modo alternativo, per abbreviare i conti, è il seguente: poiché il rotore del campo è nullo il flusso del rotore attraverso qualunque superficie è nullo. Si consideri la superficie Σ porzione del cilindro S_1 che ha come bordo la curva Γ e la curva Δ data da $S_1 \cap \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, z = 0\}$, parametrizzabile con $t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$. La scelta della curva Δ è del tutto arbitraria, se ne potrebbe scegliere un'altra, l'unica cosa certa è che la superficie compatta sulla quale applicare il teorema di Stokes deve avere come bordo almeno due curve chiuse e per semplicità si è scelta Σ.
Si ha che

$$0 = \iint_\Sigma \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle d\sigma = \int_{\partial\Sigma^+} (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz)\,.$$

Siccome $\partial\Sigma^+$ è l'unione di due curve si avrà che l'integrale su Γ (con la giusta orientazione) sarà uguale all'integrale su Δ. Il lavoro del campo lungo quest'ultima diventa

$$\int_0^{2\pi} \langle (\operatorname{sen} t, -\cos t, 1), (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) \rangle dt = -2\pi\,.$$

5. Si possono facilmente separare le variabili scrivendo

$$\frac{\cos y(t)}{\operatorname{sen} y(t)}\, y'(t) = 1$$

e integrando si ottiene

$$\log |\operatorname{sen} y(t)| = t + c$$

da cui

$$|\operatorname{sen} y(t)| = e^{t+c} = k\, e^t \qquad k > 0\,.$$

Considerando la condizione iniziale, poiché in $-\pi/4$ la funzione seno è negativa, togliendo il modulo si avrà

$$-\operatorname{sen} y(t) = k\, e^t$$

e inoltre inserendo il valore corrispondente a $t = 0$ si ottiene

$$k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

da cui la soluzione

$$y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arcsen}(-e^t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arcsen} e^t \,.$$