Corsi di laurea in ingegneria aerospaziale e ingegneria meccanica
Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica II

Padova, 27.1.2015

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **motivare** le risposte.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Data la funzione $f(x,y) = \operatorname{arcsen}(x+y^2)$ si calcolino, se esistono, il massimo ed il minimo della funzione f ristretta all'insieme

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, y \geqslant |x|\right\} \cap \operatorname{Dom}(f)\,.$$

2. Si calcoli l'area della calotta sferica

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 = 1\,,\ z \geqslant 1-x\right\}\,.$$

3. Si dica se esiste qualche valore del parametro α per il quale il campo di vettori

$$F(x,y) = \left(\frac{2x+y}{1+x^2+xy}\,,\,\frac{\alpha\,x}{1+x^2+xy}\right)$$

è conservativo. Per tale valore (o tali valori) si trovi una primitiva di F indicando le eventuali componenti connesse del dominio massimale di F.

4. Si consideri la superficie S data dalla porzione di piano passante per i tre punti $(2,0,0)$, $(0,1,0$, $(0,0,1)$ e soddisfacente $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.
Si calcoli il flusso del campo $F(x,y,z) = (2x,y,z)$ attraverso S orientata in modo tale che una delle tre componenti della normale sia positiva.

5. Data una funzione $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ di classe $C^1(\mathbf{R})$ (non nota) si consideri la funzione di tre variabili $f(x,y,z) = y^2 + (2x+z+1)\,u(2x+z+1)$. Si dia una condizione sulla funzione u affinché in un intorno del punto $(0,0,0)$ l'insieme di livello $f(x,y,z) = u(1)$ sia localmente grafico di una superficie di equazione $z = g(x,y)$.
In particolare si dica quali funzioni u soddisfano tali condizioni e quali no.

Corsi di laurea in ingegneria aerospaziale e ingegneria meccanica
Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica II

Padova, 20.2.2015

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **motivare** le risposte.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi il campo di vettori

$$F(x,y) = \left(\frac{xy - (1-xy)\log(1-xy)}{1-xy} \, , \, \frac{x^2}{1-xy} \right)$$

specificando se è conservativo e quale sia il suo dominio. Si calcoli poi il lavoro del campo lungo il segmento che parte dal punto $(0,0)$ e raggiunge $(1/2, 1/2)$.

2. Si dica quali sono tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (u'''' denota la derivata quarta)

$$u'''' = u\,.$$

3. Data la curva in forma polare $\rho = \cos\vartheta$ con $\vartheta \in [0,\pi]$

- la si parametrizzi con il parametro d'arco;
- si calcoli la sua lunghezza;
- si calcolino la minima e la massima distanza dei punti del sostegno di tale curva dal punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$;
- si disegni il sostegno della curva indicando, se possibile, di che curva si tratta.

4. Si trovino, se esitono, il massimo e il minimo della funzione $\left[\text{Ricordo: } \exp t := e^t\right]$

$$f(x,y) = \exp\left(\frac{x^2}{y^2+1}\right)$$

nell'insieme $A = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 2\,,\ x \leqslant \sqrt{y^2+1}\,\right\}$.

5. Si calcoli l'integrale $\displaystyle\iiint_E |z|\, dxdydz$ dove

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ x + y \geqslant 0\right\}.$$

Corsi di laurea in ingegneria aerospaziale e ingegneria meccanica
Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica II

Padova, 18.6.2015

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **motivare** le risposte.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Una ditta che produce bibite in lattina vuole ottimizzare il consumo di alluminio, massimizzando il contenuto di una lattina a parità di alluminio impiegato per costruirla. Supponendo, per semplicità, che una lattina sia perfettamente cilindrica, si trovi la forma della lattina che massimizza il volume a parità di superficie assegnata S (suggerimento: la forma è identificata da due parametri, ad esempio da raggio del cerchio di base e altezza del cilindro).

2. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{2\,y\,y'}{x^2-2x+y^2} + \dfrac{2x-2}{x^2-2x+y^2} = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

3. Si calcoli l'area della superficie S, grafico della funzione $f(x,y) = x + y$ definita nell'insieme

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 2\right\}.$$

4. Si calcoli il lavoro svolto dal campo di vettori $F(x,y) = (1 + xy^2, 1 + x^2y)$ lungo la curva $\gamma(t) = (\operatorname{sen}^2 t, \operatorname{sen}(2t)\cos t)$, $t \in [0, \pi/2]$.

5. Data la funzione $F(x,y,z) = y^3 + y(1 + \operatorname{arctg} z^2)\operatorname{sen} x$ si dica se l'insieme di livello $F = 1$ è, localmente in un intorno del punto $(0,1,0)$, il grafico di una funzione g di due variabili. In caso affermativo:
- si dica se g è differenziabile nel punto $(0,1,0)$;
- si trovi il piano tangente a tale grafico nel punto $(0,1,0)$;
- si calcolino tutte le derivate direzionali di g nel punto $(0,1,0)$.

Corsi di laurea in ingegneria aerospaziale e ingegneria meccanica
Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica II

Padova, 10.7.2015

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **motivare** le risposte.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{2x+2y-1}{x^2+y^2}$$

se ne trovino gli insiemi di livello, e se possibile se ne disegnino alcuni, dopodiché si trovino, se esitono, il massimo e il minimo sul suo dominio massimale.

2. Si risolvano i tre problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4\,t\,y\log y}{t^2-1} \\ y(0) = e \end{cases}, \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{4\,t\,y\log y}{t^2-1} \\ y(0) = e^{-1} \end{cases}, \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{4\,t\,y\log y}{t^2-1} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

3. Si calcoli l'integrale

$$\iint_D \log(x+y)\,dxdy$$

dove

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, 1 \leqslant x+y \leqslant 2,\ y \leqslant 2x \leqslant 2y\right\}.$$

4. Dati il campo di vettori

$$F(x,y,z) = \left(x+yz, 2y+2x^2z^2, 3z+3x^3y^3\right)$$

e il solido S

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \geqslant 1,\ x \in [0,2],\ y \in [0,2],\ z \in [0,2]\right\}$$

si calcoli il flusso uscente da S di F: $\displaystyle\iint_{\partial S} \langle F, \nu\rangle\, d\sigma$, ν normale esterna ad S.

5. Data la curva definita in forma polare da

$$\rho = \vartheta \quad \text{per } \vartheta \in [0,\pi] \qquad \text{e} \qquad \rho = 2\pi - \vartheta \quad \text{per } \vartheta \in (\pi, 2\pi]$$

se ne disegni il sostegno, se ne trovi una parametrizzazione e, data la funzione $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$, si calcoli l'integrale

$$\int_\gamma f\,ds.$$

Corsi di laurea in ingegneria aerospaziale e ingegneria meccanica
Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica II

Padova, 21.9.2015

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **motivare** le risposte.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Data la funzione

$$f(x,y,z) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + y^2 + x^2 z^2 - \frac{z^2}{2}$$

se ne trovino gli eventuali punti stazionari e se ne discuta la loro natura.
Si dica poi se esiste, e in tal caso lo si calcoli,

$$\lim_{|(x,y,z)| \to +\infty} f(x,y,z)\,.$$

2. Data la funzione $f(x,y) = 9xy - x^3 - y^3$ si trovino tutti i punti del piano nel quale l'insieme di livello c, $c \in \mathbf{R}$, verifica le ipotesi del teorema del Dini. Detto L l'insieme di livello zero di f, si consideri il punto $Q = (3\sqrt[3]{4}, 3\sqrt[3]{2})$ appartenente a L. Si mostri che esiste un intorno di Q nel quale L è immagine di una curva $y \mapsto (h(y), y)$, ma non può esserlo di una curva $x \mapsto (x, g(x))$.

3. Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$(\lambda + 1)u''' + (\lambda - 1)u' = 0$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbf{R}$.

4. Si considerino il campo di vettori $F(x,y,z) = (-1,-1,z)$ e la superficie S definita da

$$S = \big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\big|\, z = (x^2+y^2)^2 - (x^2+y^2),\ z \leqslant 2\big\}.$$

Si calcoli il flusso del campo F attraverso la superficie S nella direzione della normale ad S che ha la terza componente negativa.

5. Dato il campo di vettori

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

si calcoli il lavoro del campo F lungo il cammino che unisce i punti $(-1,-1)$ e $(1,1)$ $\gamma(\vartheta) = (\sqrt{2}\cos\vartheta, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$ per $\vartheta \in \left[\frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi\right]$.
Tale campo è conservativo?