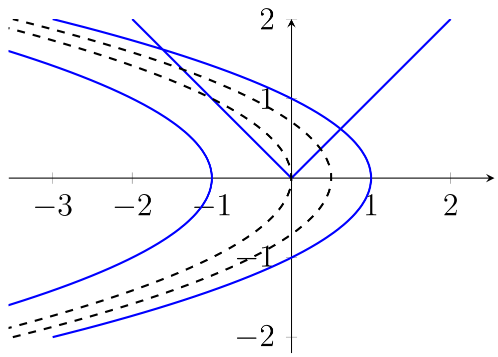
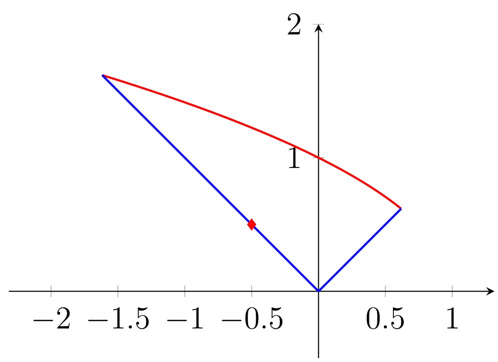
Soluzione del 27.1.2015

1. Si osservi innanzitutto che la funzione $t \mapsto \operatorname{arcsen} t$ è strettamente crescente, per cui è sufficiente studiare la funzione $g(x,y) = x + y^2$.



L'insieme A è disegnato nella figura precedente ed evidenziato, assieme ai punti di massimo e di minimo (marcati in rosso), in quella che segue.



Guardando le curve di livello della funzione g o della funzione f (alcune delle quali sono tratteggiate in figura), ci si accorge che il massimo della funzione è assunto sull'arco di curva

$$\operatorname{arcsen}(x + y^2) = \frac{\pi}{2}$$

contenuta in A, mentre il minimo sarà assunto nel punto nel quale la curva (per una data costante c)

$$\operatorname{arcsen}(x + y^2) = c$$

sarà tangente al segmento di curva $y = -x$ contenuto in A.

Derivando si ottiene il sistema

$$\begin{cases} g_x(x, y) = 1 \\ g_y(x, y) = 2y \end{cases}$$

per cui, come intuibile guardando le curve di livello, non vi sono punti stazionari interni.
Sulla parte di bordo data da $x + y^2 = 1$ si ha che la funzione g è costante e la funzione f assume il valore $\pi/2$.
Sulla parte di bordo data da $y = x$ parametrizzata con $\gamma(t) = (t, t)$ si ottiene

$$g\big(\gamma(t)\big) = t + t^2$$

che ha derivata sempre positiva, mentre sulla parte di bordo data da $y = -x$ parametrizzata con $\gamma(t) = (t, -t)$ con $t \in [-(1 + \sqrt{5})/2, 0]$ si ottiene

$$g\big(\gamma(t)\big) = t + t^2$$

che ha derivata uguale a $2t + 1$ che si annulla per $t = -1/2$. Il valore

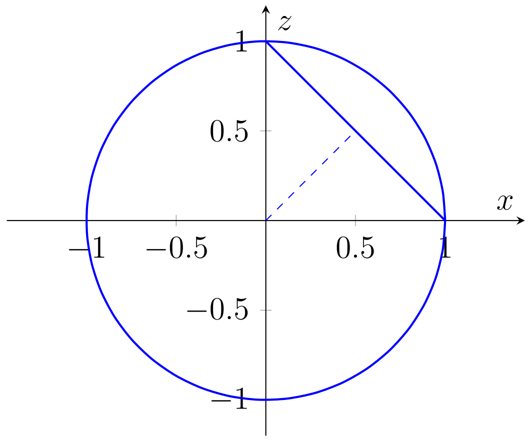
$$-\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

si è ottenuto intersecando $y = -x$ con $x + y^2 = 1$. Poiché $-1/2 \in (-(1 + \sqrt{5})/2, 0)$ abbiamo trovato il candidato $(-1/2, 1/2)$ (che risulterà essere il punto di minimo). Non ci rimane che valutare g nei punti candidati che sono

$$\begin{aligned} &g(0, 0) = 0 \\ &g(-1, 2, 1/2) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \\ &g(1 - y^2, y) = 1 \end{aligned}$$

2. Si consideri la circonferenza $x^2 + z^2 = 1$ e il segmento della retta $z = x$ interno a tale circonferenza, come mostrato in Figura 1. Tale figura mostra la sezione sul piano $y = 0$ della superficie C.

Figura 1



Il modo più semplice per calcolare l'area di C è calcolare l'area di C' (che ha la stess area), la superficie ruotata di $\pi/4$ in modo tale che l'analogo della Figura 1 diventi la Figura 2 e C' sia la superficie in Figura 3. In Figura 2 sono disegnati la circonferenza $x^2+z^2=1$ e e il segmento della retta $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$ interno a tale circonferenza. Tale segmento si trova valutando la distanza dall'origine della retta $z=1-x$, che corrisponde alla lunghezza del segmento tratteggiato in Figura 1.

Figura 2

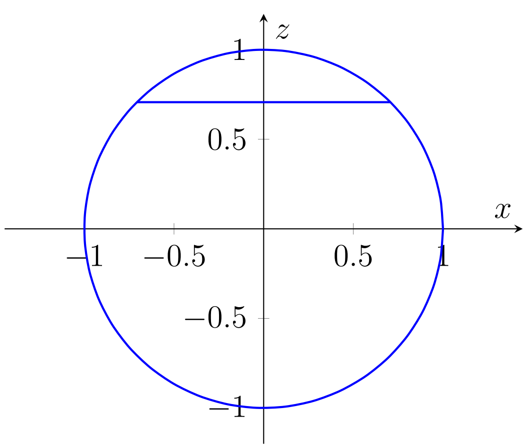
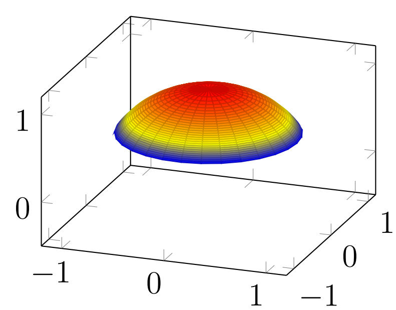


Figura 3



La superficie C' è quindi

$$C'=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2=1\,,\, z\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

e può essere parametrizzata come segue:

$$\text{per } (u,v) \in D \quad \text{si considera} \quad \varphi(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$$

dove l'insieme D può essere trovato imponendo le limitazioni date per definire C', e cioè

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2\,, \qquad z \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

da cui

$$1 - x^2 - y^2 \geqslant \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \quad \iff \quad x^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

Tale limitazione ci fornisce l'insieme D che è il cerchio

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

Valutiamo l'elemento d'area superficiale: si ha

$$\varphi_u(u,v) = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)\,, \qquad \varphi_v(u,v) = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)\,,$$
$$\varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v) = \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1\right)\,,$$
$$\left|\varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v)\right| = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\,.$$

L'insieme D può essere parametrizzato usando le coordinate polari:

$$x = \rho\,\cos\vartheta\,, \qquad y = \rho\,\operatorname{sen}\vartheta\,,$$
$$\rho \in [0, 1/\sqrt{2}]\,, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi]\,.$$

Per cui l'area di C è data da

$$A(C) = A(C') = \iint_D \left|\varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v)\right| dudv = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\, dudv =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{1/\sqrt{2}} d\rho\, \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,.$$

3. Si verifica facilmente che il campo è irrotazionale per $\alpha = 1$. Integrando si trova che le primitive sono date da

$$\log|1 + x^2 + xy| + c_1\chi_{A_1}(x,y) + c_2\chi_{A_2}(x,y) + c_3\chi_{A_3}(x,y)$$

dove A_1, A_2, A_3 sono le tre componenti connesse del dominio di F e, come al solito, χ_B denota la funzione caratteristica di B, cioè

$$\chi_B(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B\,, \\ 0 & \text{se } x \notin B\,. \end{cases}$$

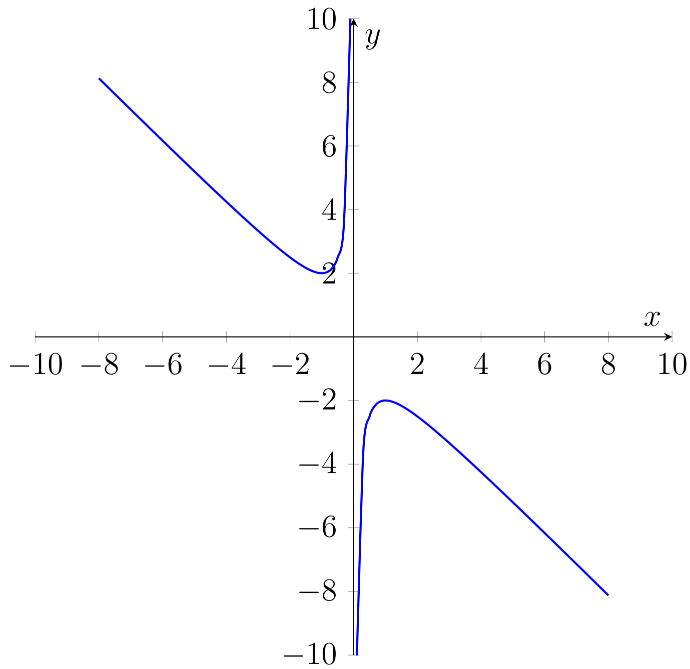
Si trovano facilmente poiché si deve avere $1 + x^2 + xy \neq 0$, cioè

$$y \neq -\frac{1+x^2}{x} = -\frac{1}{x} - x\,.$$

Il luogo dei punti di $\mathbf{R}^2$ nel piano xy che soddisfa

$$y = -\frac{1+x^2}{x} = -\frac{1}{x} - x$$

è indicato nella figura che segue



per cui i tre insiemi sono

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x < 0 \text{ e } y > -\frac{1+x^2}{x} = -\frac{1}{x} - x \right\}\,, \\ A_3 &= \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x > 0 \text{ e } y < -\frac{1+x^2}{x} = -\frac{1}{x} - x \right\}\,, \\ A_2 &= \mathbf{R}^2 \setminus \left(\bar{A}_1 \cup \bar{A}_3\right)\,. \end{aligned}$$

4. La superficie S è il triangolo mostrato in figura. La proiezione sul piano xy è il triangolo di vertici $(2,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,0)$. Consideriamo allora il triangolo T in $\mathbf{R}^2$ di vertici $(2,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$ e la parametrizzazione di S data da

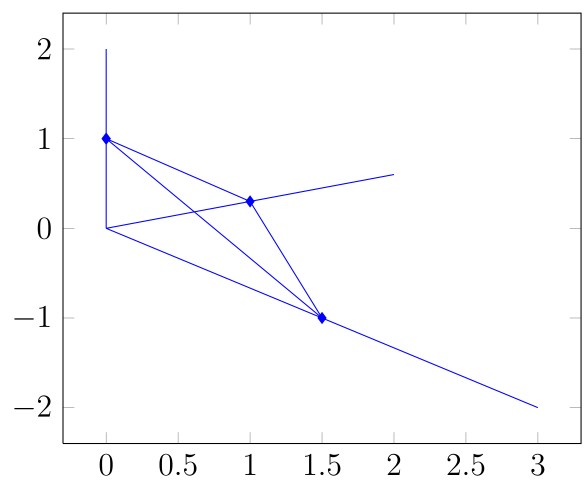
$$\varphi : T \to \mathbf{R}^3\,, \qquad \varphi(u,v) = \left(u, v, 1 - \frac{1}{2}u - v\right)\,.$$

Per trovare la normale ad S valutiamo le derivate di φ:

$$\varphi_u = \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right)\,, \qquad \varphi_v = (0, 1, -1)$$

da cui la normale soddisfacente la richiesta (si noti che tutte le componenti sono positive) è

$$\nu(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\,.$$



Si ha che

$$\langle F(x,y,z), \nu(x,y,z)\rangle = \frac{2}{3}(x+y+z)$$

per cui

$$\iint_S \langle F, \nu \rangle \, d\sigma = \iint_T \frac{2}{3} \left(u + v + 1 - \frac{1}{2}u - v \right) \frac{3}{2} \, dudv =$$

$$= \iint_T \left(1 + \frac{1}{2}u \right) dudv =$$

$$= \int_0^2 du \int_0^{1-\frac{u}{2}} dv \left(1 + \frac{1}{2}u \right) =$$

$$= 1 + \int_0^2 du \int_0^{1-\frac{u}{2}} \frac{u}{2} \, dv = \frac{4}{3} \, .$$

5. È sufficiente che la derivata rispetto alla terza variabile sia non nulla. La derivata di f rispetto alla variabile z è

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = u(2x + z + 1) + (2x + z + 1) \, u'(2x + z + 1) \, .$$

Si deve quindi avere

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) = u(1) + u'(1) \neq 0$$

quindi u deve essere tale che $u(1) + u'(1) \neq 0$.