Soluzione del 20.2.2015

1. Il campo è irrotazionale, come si verifica facilmente poiché

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy-(1-xy)\log(1-xy)}{1-xy}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{1-xy}-\log(1-xy)\right)=\frac{2x-x^2y}{(1-xy)^2}\,,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{1-xy}\right)=\frac{2x-x^2y}{(1-xy)^2}\,.$$

Il campo è definito dove $1-xy>0$, cioè per

$$xy<1\,.$$

Questa disuguaglianza è equivalente a

$$\begin{aligned} y<\frac{1}{x} &\text{ per } x>0\,,\\ y>\frac{1}{x} &\text{ per } x<0\,,\\ y \text{ arbitrario} &\text{ per } x=0\,, \end{aligned}$$

per cui, detti

$$A_1=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,y\geqslant\frac{1}{x}\text{ e } x>0\right\}\,,$$
$$A_2=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,y\leqslant\frac{1}{x}\text{ e } x<0\right\}\,,$$

F risulta definito nell'insieme

$$A:=\mathbf{R}^2\setminus(A_1\cup A_2)$$

che è aperto, connesso, semplicemente connesso. Quindi il campo F ammette potenziale.
Integrando, ad esempio, F_2 rispetto alla variabile y si ottiene che un potenziale è dato da

$$f(x,y)=-x\log(1-xy)+g(x)\,.$$

Derivando tale espressione rispetto alla variabile x si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{xy}{1-xy}-\log(1-xy)+g'(x)$$

per cui g risulta costante. Concludiamo che tutti i potenziali sono

$$f(x,y)=-x\log(1-xy)+c\,,\qquad c\in\mathbf{R}\,.$$

Il cammino indicato è contenuto in A, quindi possiamo valutare il lavoro di tale campo. Il modo più semplice (poiché il lavoro non dipende dal cammino eseguito) è

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)-f(0,0)=\log\frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$

2. L'equazione differenziale $u''''=u$ equivale a $(D^4-1)u=0$ dove D denota l'operatore di derivazione. Risolvendo il polinomio

$$D^4=1$$

si trovano le quattro soluzioni $1,-1,i,-i$. Per cui

$$D^4-1=(D-1)(D+1)(D-i)(D+i)$$

da cui la generica soluzione è data da

$$u(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\operatorname{sen}t\,.$$

3. Una volta considerata la parametrizzazione

$$\gamma(\vartheta)=\vartheta\mapsto(\cos^2\vartheta,\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta)$$

si verifica facilmente che è già parametrizzata con il parametro d'arco e la sua lunghezza è π.
Per calcolare la minima e la massima distanza dei punti del sostegno di tale curva dal punto $\left(\frac{1}{2},0\right)$ basta valutare

$$\begin{aligned}\left(\cos^2\vartheta\ -\frac{1}{2}\right)^2+\cos^2\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta&=\\ &=\cos^4\vartheta+\frac{1}{4}+\cos^2\vartheta\left(\operatorname{sen}^2\vartheta-1\right)=\\ &=\cos^4\vartheta+\frac{1}{4}+\cos^2\vartheta\left(\cos^2\vartheta\right)=\frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

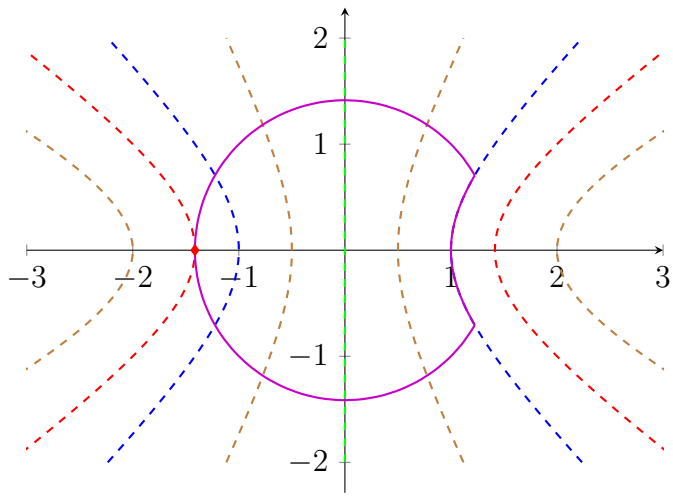
Essendo la distanza di tutti i punti del sostegno di γ costante si conclude che il sostegno di γ è una circonferenza (di centro $\left(\frac{1}{2},0\right)$ e raggio $\frac{1}{2}$).

4. La funzione assume valori costanti sugli insiemi determinati da:

$$x^2=c\,(y^2+1)\,,\qquad(c\in\mathbf{R})\,.$$

Si osservi che per $c<0$ l'insieme di livello è il vuoto.
Volendo possiamo scrivere questi insiemi come

$$x=k\sqrt{y^2+1}\,,\qquad\text{con } k\geqslant 0$$



In figura è rappresentato in violetto il bordo dell'insieme A e, tratteggiati, alcuni insiemi di livello (ad un colore corrisponde un insieme di livello). Al tratteggio verde corrisponde l'insieme di livello 0, e poiché la funzione è sempre non negativa, in tali punti la funzione assume il suo valore minimo, che è 1.
Il punto segnato con un diamante rosso, il punto $(-\sqrt{2}, 0)$, è invece il punto di massimo che sta sull'insieme di livello che corrisponde a $k = \sqrt{2}$ e $c = 2$. Per cui la funzione assume il suo massimo nel punto $(-\sqrt{2}, 0)$ e tale valore è e^2.

Volendo procedere facendo i conti si può fare così: innanzitutto osservare che la funzione $t \mapsto \exp t$ è strettamente crescente, per cui momentaneamente ci si può limitare a studiare la funzione

$$g(x, y) = \frac{x^2}{y^2 + 1}\,.$$

Derivando si ottiene il sistema

$$\begin{cases} g_x(x, y) = \dfrac{2x}{y^2 + 1} = 0 \\ g_y(x, y) = -\dfrac{2x^2 y}{(y^2 + 1)^2} = 0 \end{cases}$$

che è soddisfatto da $x = 0$ (la linea verde tratteggiata in figura).
Sul bordo abbiamo: una prima parte può essere parametrizzata con

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{t^2 + 1}, t\right)$$

e

$$g \circ \gamma(t) = 1.$$

Sul resto del borso possiamo parametrizzare con

$$\eta(\vartheta) = \big(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta\big)$$

e derivando

$$g \circ \eta(\vartheta) = \frac{\cos^2\vartheta}{\operatorname{sen}^2\vartheta + 1}$$

si ottiene

$$\frac{d}{d\vartheta}(g \circ \eta)(\vartheta) = -\frac{2\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta(\operatorname{sen}^2\vartheta + 1 + \cos^2\vartheta)}{(\operatorname{sen}^2\vartheta + 1)^2}$$

che si annulla per $\vartheta = \pi/2, \pi, 3\pi/2$ ($\vartheta = 0$ corrisponde ad un punto che non sta sul bordo di A). A questo punto si verifica facilmente che $\vartheta = \pi$ corrisponde ad un punto di massimo, mentre gli altri due punti, con tutti i valori di A che soddisfano $x = 0$, sono di minimo (sia per g che per f).

5. L'insieme E può essere parametrizzato sia con le coordinate sferiche che con quelle cilindriche.

Coordinate sferiche: parametrizziamo E con

$$\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right], \quad \varphi \in [0, \pi], \quad \rho \in [0, 1].$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}
\iiint_E |z|\, dxdydz &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\vartheta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho\, \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, |\rho\cos\varphi| = \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\vartheta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 d\rho\, \rho^3 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi = \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\vartheta \int_0^{\pi/2} d\varphi \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi = \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\vartheta = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Coordinate cilindriche: parametrizziamo E con

$$\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right], \quad \rho \in [0, 1], \quad -\sqrt{1-\rho^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-\rho^2}.$$

L'integrale diventa

$$
\begin{aligned}
\iiint_E |z|\, dxdydz &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\vartheta \int_0^1 d\rho \int_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{1-\rho^2}} dz\, \rho\, |z| = \\
&= 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\vartheta \int_0^1 d\rho \int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} dz\, \rho\, z = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\vartheta \int_0^1 d\rho\, \rho\, (1-\rho^2) = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\vartheta \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}
$$