

Soluzione del 18.6.2015

1. Due metodi molto naturali sono parametrizzare l'insieme che definisce il vincolo e il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Li vediamo entrambi.

Il volume della lattina, espresso in termini del raggio della base r e dell'altezza h , è dato da

$$V(r, h) = \pi r^2 h,$$

mentre l'area della superficie è data da

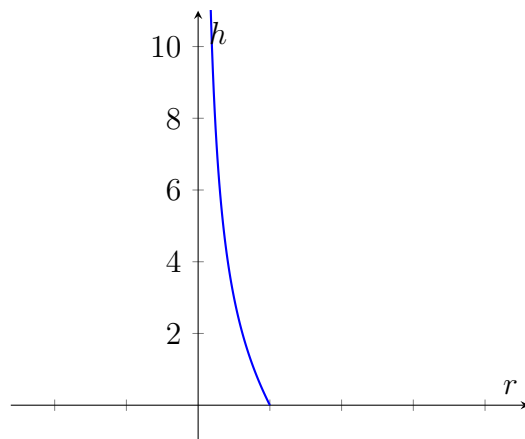
$$2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Si osservi allora che la funzione volume sarà definita in un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ definito da $2\pi r^2 + 2\pi r h = S$; mandando h a zero si osserva che r non può superare $\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$ e quindi per

$$r \in \left(0, \sqrt{\frac{S}{2\pi}}\right), \quad \text{si ha che } h = \frac{S}{2\pi r} - r. \quad (1)$$

Quindi V è definita per (r, h) che sta sulla curva Γ disegnata in Figura A.

Figura A



Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si può considerare la funzione

$$H(r, h, \lambda) = \pi r^2 h + \lambda(2\pi r^2 + 2\pi r h - S).$$

Annullando le sue derivate si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2\pi r h + 4\pi \lambda r + 2\pi \lambda h = 0 \\ \pi r^2 + 2\pi \lambda r = 0 \\ 2\pi r^2 + 2\pi r h = S \end{cases}$$

che risolto fornisce l'unico candidato

$$h = 2r \quad \text{con} \quad r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}.$$

Valutando i limiti agli estremi (usando (1)) si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{r \rightarrow 0^+, \\ (r, h) \in \Gamma}} V(r, h) &= 0 \\ \lim_{\substack{r \rightarrow \sqrt{\frac{S}{2\pi}}^-, \\ (r, h) \in \Gamma}} V(r, h) &= 0 \end{aligned}$$

per cui si ha che l'unico candidato (essendo il volume V sempre positivo) è un punto di massimo ed è il massimo cercato.

Diversamente usando la parametrizzazione (1) ci si riduce ad una funzione di una variabile. Ad esempio (ma si può esprimere anche r in termini di h)

$$\tilde{V}(r) := V(r, h(r)) = \pi r^2 \left(\frac{S}{2\pi r} - r \right), \quad r \in \left(0, \sqrt{\frac{S}{2\pi}} \right).$$

Derivando si ottiene

$$\frac{d}{dr} \tilde{V}(r) = \frac{S}{2} - 3\pi r^2,$$

quantità che si annulla per $r^2 = S/(6\pi)$. Viste le limitazioni in (1) di r , si ha che l'unico punto critico è

$$r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}. \quad (2)$$

Per capire il comportamento della funzione $\tilde{V}$, che è definita in un intervallo aperto, abbiamo due possibilità: una è studiare il limite agli estremi dell'intervallo di definizione. Poiché $\tilde{V}$ è sempre positiva e

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \tilde{V}(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \sqrt{\frac{S}{2\pi}}^-} \tilde{V}(r) = 0$$

si conclude che il punto (2) è di massimo.

L'altra è valutare la derivata seconda di $\tilde{V}$: si ha

$$\frac{d^2}{dr^2} \tilde{V}(r) = -6\pi r,$$

che è negativa per ogni valore positivo di r . In particolare per il valore trovato in (2), che risulta essere quindi di massimo locale. Poiché tale valore è l'unico

punto critico interno all'intervallo $\left(0, \sqrt{\frac{s}{2\pi}}\right)$ e la funzione è regolare (non ci sono punti di non derivabilità) si conclude che non vi possono essere altri punti di massimo, nemmeno al bordo. Se così fosse ci dovrebbe essere almeno un altro punto critico che in tal caso risulterebbe di minimo locale, di conseguenza il punto trovato in (2) è di massimo assoluto.

Ancora: possono essere evitate queste ultime considerazioni se si osserva che la derivata seconda è strettamente negativa in tutto l'intervallo di definizione di $\tilde{V}$, per cui tale valore non può essere altro che un punto di massimo assoluto.

2. Proponiamo due soluzioni.

Nella prima vediamo l'equazione come un'equazione differenziale esatta la quale può essere riscritta come (si noti come, almeno in un intorno di $x = 0$, la quantità $x^2 - 2x + y^2(x)$ sia positiva)

$$\frac{d}{dx} \log(x^2 - 2x + y^2(x)) = 0$$

per cui cerchiamo $y(x)$ tale che

$$\log(x^2 - 2x + y^2(x)) = c, \quad \text{per qualche } c \in \mathbf{R}.$$

Si ricava che

$$x^2 - 2x + y^2(x) = e^c$$

e imponendo che valga la condizione iniziale si ha

$$1 = e^c \quad \text{da cui} \quad c = 0.$$

Ricaviamo quindi che

$$y^2(x) = 1 - x^2 + 2x$$

e poiché $y(0) < 0$ la soluzione cercata è

$$y(x) = -\sqrt{1 - x^2 + 2x}.$$

Un altro modo di risolvere l'equazione può essere il seguente: se y risolve il problema di Cauchy assegnato, risolve anche il seguente

$$\begin{cases} 2y y' + 2x - 2 = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

e viceversa, poiché il denominatore $x^2 - 2x + y^2$ è diverso da zero, perlomeno in un intorno di $x = 0, y = -1$.

Risolvendo questo separando le variabili si ottiene

$$y^2(x) = 2x - x^2 + c$$

e imponendo le condizioni iniziali si ha

$$1 = c.$$

Poiché in un intorno di $x = 0$ la funzione sarà negativa la soluzione è data da

$$y(x) = -\sqrt{1 - x^2 + 2x}.$$

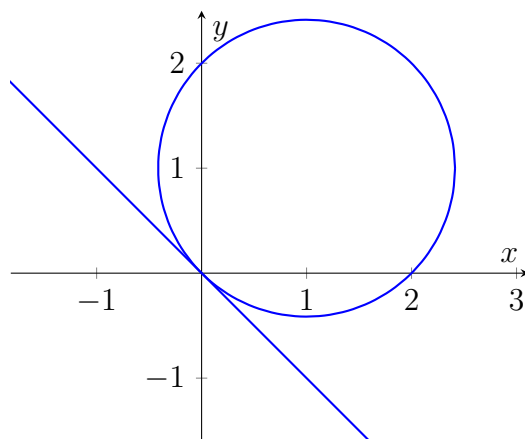
3. Valutiamo l'elemento d'area della superficie

$$(x, y) \mapsto (x, y, x + y), \quad (x, y) \in C.$$

Si ha

$$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{3}.$$

L'insieme ∂C è disegnato in figura, assieme alla retta tangente a tale curva in $(0, 0)$.



Usando le coordinate polari centrate in $(0, 0)$ per parametrizzare il dominio C si ha quindi che

$$\vartheta \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

e per valutare gli estremi di ρ , in dipendenza di ϑ , usiamo le limitazione dell'insieme C :

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

diventa

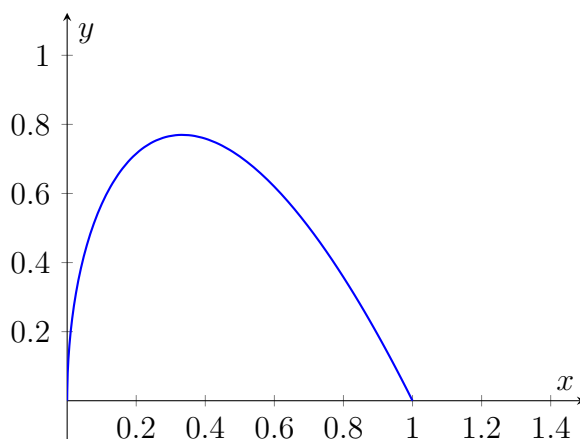
$$\rho(\rho - 2 \cos \vartheta - 2 \sin \vartheta) = 0.$$

Per cui si ha che l'area della superficie S è data da

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_C \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx dy = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\vartheta \int_0^{2 \cos \vartheta + 2 \sin \vartheta} \sqrt{3} \rho \, d\rho = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{3}}{2} \rho^2 \Big|_0^{2 \cos \vartheta + 2 \sin \vartheta} d\vartheta = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{3}}{2} (4 + 8 \cos \vartheta \sin \vartheta) \, d\vartheta = 2\sqrt{3} \pi. \end{aligned}$$

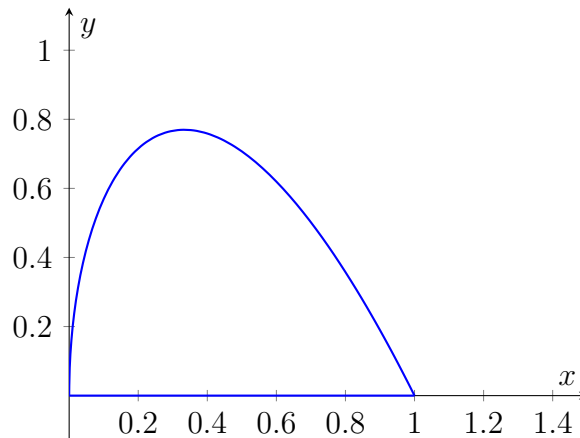
4. Vediamo due modi simili, nel senso che il presupposto per entrambi è che il campo F è irrotazionale.

Primo: si vede facilmente che $\gamma(0) = (0, 0)$ e che $\gamma(\pi/2) = (1, 0)$. Volendo (ma non è necessario in questo caso, visto che il campo è irrotazionale) disegnare la curva, si verifica facilmente che la curva è semplice e che entrambe le componenti di γ sono positive per $t \in (0, \pi/2)$. Si può quindi immaginare grossolanamente il sostegno della curva, raffigurato in maniera precisa nella figura che segue.



Poiché il campo è irrotazionale il lavoro lungo qualunque cammino chiuso è nullo. Di conseguenza possiamo trovare un cammino chiuso “chiudendo” il sostegno di γ in modo che il calcolo del lavoro lungo la curva scelta risulti più semplice di quello assegnato. Ad esempio si può scegliere il segmento immagine della curva $\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da

$$\delta(t) = (1 - t, 0).$$



Poiché F è irrotazionale si ha che

$$\int_{\gamma} (F_1 dx + F_2 dy) = - \int_{\delta} (F_1 dx + F_2 dy) = - \int_0^1 (-1) dt = 1.$$

Altro modo, ancor più semplice, è trovare un potenziale per F . Ad esempio la funzione

$$f(x, y) = x + y + \frac{x^2 y^2}{2}$$

e valutando $f(1, 0) - f(0, 0) = 1$ si ottiene il lavoro richiesto.

5. Derivando F si ottiene

$$\begin{aligned} F_x(x, y, z) &= y(1 + \operatorname{arctg} z^2) \cos x & F_x(0, 1, 0) &= 1 \neq 0 \\ F_y(x, y, z) &= 3y^2 + (1 + \operatorname{arctg} z^2) \sin x & F_y(0, 1, 0) &= 3 \neq 0 \\ F_z(x, y, z) &= \frac{2zy}{1 + z^4} \sin x & F_z(0, 1, 0) &= 0 \end{aligned}$$

per cui tale funzione g esiste ed in particolare ne esiste una dipendente da y e z , che noi andremo a considerare, ma ne esiste sicuramente anche una dipendente da x e z .

Per rispondere alle domande: poiché F è di classe C^1 , così sarà anche g , ed essendo di classe C^1 in un intorno del punto $(1, 0)$ la funzione g , per il teorema del differenziale totale, sarà anche differenziabile.

Per trovare il piano tangente troviamo prima il gradiente di g nel punto $(1, 0)$. Le due derivate sono date da:

$$g_y(y, z) = - \frac{F_y(g(y, z), y, z)}{F_x(g(y, z), y, z)}, \quad g_z(y, z) = - \frac{F_z(g(y, z), y, z)}{F_x(g(y, z), y, z)},$$

da cui

$$g_y(1, 0) = -3, \quad g_z(1, 0) = 0.$$

Quindi il piano tangente alla superficie $F(x, y, z) = 1$ nel punto $(0, 1, 0)$ è dato da

$$x = g(1, 0) + g_y(1, 0)(y - 1) + g_z(1, 0)z = -3(y - 1)$$

cioè

$$x + 3(y - 1) = 0 \quad \text{da cui} \quad x + 3y - 3 = 0.$$

Infine: dal teorema del Dini sappiamo che, data la regolarità di F , la funzione g è sicuramente di classe C^1 . Le derivate direzionali della funzione g nella direzione $v = (v_1, v_2)$, proprio perché tale funzione è di classe C^1 , risultano

$$\frac{\partial g}{\partial v}(1, 0) = \nabla g(1, 0) \cdot v = -3 v_1.$$