

1. Prima di tutto si osservi che il dominio massimale su cui definire la funzione f è

$$\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

insieme che non è limitato, per cui non è garantita l'esistenza del minimo e del massimo.

Cerchiamo gli insiemi di livello: si fissi una costante $c \in \mathbf{R}$ e si risolva $f(x, y) = c$. Si osserva subito che per $c = 0$ l'insieme di livello è la retta

$$2x + 2y - 1 = 0.$$

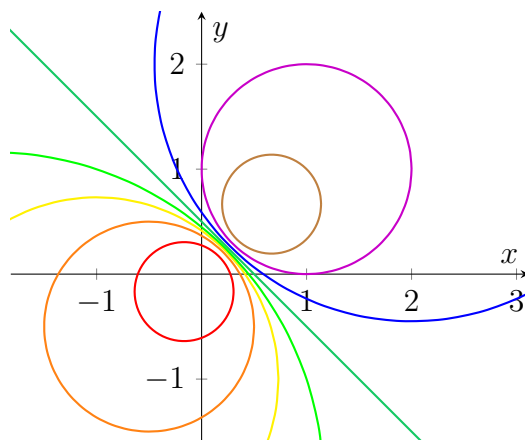
Per $c \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned} f(x, y) = c &\iff \frac{2x + 2y - 1}{x^2 + y^2} = c \\ &\iff \frac{2x + 2y - 1}{c} = x^2 + y^2 \\ &\iff \left(x - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{2 - c}{c^2}. \end{aligned}$$

Gli insiemi di livello (alcuni dei quali rappresentati in figura: il rosso è il valore più basso, negativo, si sale poi fino al verde scuro dove la funzione vale zero, per continuare a salire fino al marrone) sono:

l'insieme vuoto	per $c > 2$
$\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$	per $c = 2$
una circonferenza	per $c < 2$ ($c \neq 0$)
una retta	per $c = 0$

Si deduce che il massimo è assunto nel punto $(1/2, 1/2)$ e vale 2, e che il minimo non è assunto.



Alternativamente, poiché

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = -\infty,$$

si deduce che f non ammette minimo poiché è illimitata inferiormente. Valutando il comportamento all'infinito si ha che

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow +\infty} f(x,y) = 0,$$

per cui la funzione è superiormente limitata ed ammette massimo.

Derivando f si ottiene

$$\begin{cases} \frac{2y^2 - 2x^2 - 4xy + 2x}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \\ \frac{2x^2 - 2y^2 - 4xy + 2y}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{cases}$$

Moltiplicando per $(x^2 + y^2)^2$ le due equazioni e poi sommandole e sottraendole si ottiene

$$\begin{cases} -4xy + x + y = 0 \\ 2x^2 - 2y^2 + y - x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -4xy + x + y = 0 \\ (x - y)[2(x + y) - 1] = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava che o $x = y$ oppure $x + y = 1/2$. Nel primo caso dalla prima equazione si ricava

$$x(2 - 4x) = 0$$

da cui x , e quindi y , uguale a zero, opzione che va scartata, oppure x , e quindi y , uguale ad $1/2$. Nel secondo caso, supponendo $x \neq y$, si ricava

$$\begin{cases} 4xy = 1/2 \\ x + y = 1/2 \end{cases}$$

da cui

$$4x(1/2 - x) - 1/2 = 0 \implies 4x^2 - 2x + 1/2 = 0$$

equazione che non ha soluzioni (reali). Per cui l'unico punto critico è $(1/2, 1/2)$. Questo punto non può essere di minimo, per quanto osservato precedentemente, e non può essere di sella sempre per quanto precedentemente osservato:

poiché f è di classe $C^1(\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ e superiormente limitata, f ammette massimo. Se tale punto fosse di sella, vi sarebbe un altro punto critico, perché il massimo c'è.

Diversamente si può calcolare la matrice hessiana, che fornirà l'informazione che $(1/2, 1/2)$ è un massimo locale e, per le considerazioni fatte precedentemente, anche il massimo assoluto.

2. Separando le variabili l'equazione si integra immediatamente, a patto che $t^2 - 1$ e $y \log y$ siano diversi da zero: ciò è vero per $t^2 \neq 1$, $y \neq 0$ e $\log y \neq 0$. Si ha infatti

$$\int \frac{dy}{y \log y} = \int \frac{4t}{t^2 - 1} dt$$

da cui

$$\log |\log y| = 2 \log(t^2 - 1) + c, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Considerando l'esponenziale di entrambi i membri si ottiene

$$|\log y| = k(t^2 - 1)^2, \quad \text{con } k > 0 \quad (k = e^c). \quad (1)$$

Se $y(0) = e$ oppure se $y(0) = e^{-1}$ si ha che $k = 1$ e quindi

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{(t^2-1)^2} \\ y(t) &= e^{-(t^2-1)^2} \end{aligned}$$

Se $y(0) = 1$ non si possono separare le variabili, come osservato all'inizio, perché $\log y(0) = 0$, ma le condizioni del teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy sono soddisfatte, per cui la soluzione (unica) esiste, almeno localmente intorno a $t = 0$. È facile osservare che la costante $y(t) = 1$ è soluzione per ogni $t \in \mathbf{R}$.

3. Un modo di svolgere l'integrale dato è usare le coordinate cartesiane. Diversamente, utilizzando il cambio di variabile

$$u = x + y, \quad v = \frac{x}{y}$$

si ricava che (usando prima la seconda equazione e poi sempre la prima)

$$\begin{aligned} x = yv &\implies u = yv + y &\implies y = \frac{u}{1+v} \\ &&\implies x = \frac{uv}{1+v}. \end{aligned}$$

La matrice jacobiana di questo cambio di variabile è data da

$$\begin{pmatrix} \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \\ \frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2} \end{pmatrix}$$

con

$$1 \leq u \leq 2, \quad \frac{1}{2} \leq v \leq 1.$$

Calcolando lo jacobiano si ottiene

$$\left| -\frac{u}{(1+v)^2} \frac{v}{1+v} - \frac{u}{(1+v)^2} \frac{1}{1+v} \right| = \frac{uv+u}{(1+v)^3} = \frac{u}{(1+v)^2}$$

quindi l'integrale richiesto diventa

$$\begin{aligned} \iint_D \log(x+y) \, dx dy &= \int_1^2 du \int_{1/2}^1 dv \frac{u}{(1+v)^2} \log u = \\ &= \int_1^2 du \left[-\frac{1}{1+v} \right] \Big|_{1/2}^1 u \log u = \\ &= \int_1^2 du \left[-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right] u \log u = \\ &= \frac{1}{6} \int_1^2 u \log u \, du = \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{u^2}{2} \log u \right] \Big|_1^2 - \frac{1}{6} \int_1^2 \frac{u}{2} \, du = \\ &= \frac{1}{3} \log 2 - \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

4. La cosa più semplice, poiché il campo è a divergenza costante e il volume di S si calcola in maniera immediata, è la seguente: per il teorema della divergenza si ha

$$\iint_{\partial S} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma = \iiint_S \operatorname{div} F \, dx dy dz.$$

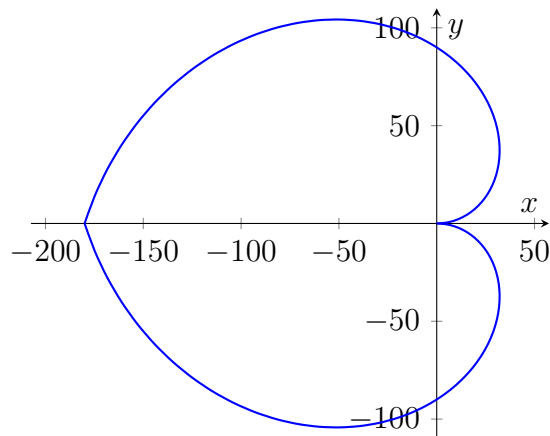
Poiché $\operatorname{div} F = 6$ e il volume di S altro non è che il volume del cubo di lato 2 privato della sfera di raggio 1 concentrica a tale cubo si ha che

$$\operatorname{Vol}(S) = 8 - \frac{4}{3} \pi$$

da cui

$$\iint_{\partial S} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma = 6 \operatorname{Vol}(S) = 48 - 8\pi.$$

5. La curva ha il sostegno mostrato in figura.



La sua più semplice parametrizzazione è

$$\begin{aligned}\gamma(\vartheta) &= (\vartheta \cos \vartheta, \vartheta \sin \vartheta) && \text{per } \vartheta \in [0, \pi] \\ \gamma(\vartheta) &= ((2\pi - \vartheta) \cos \vartheta, (2\pi - \vartheta) \sin \vartheta) && \text{per } \vartheta \in (\pi, 2\pi].\end{aligned}$$

Si osserva che la curva è simmetrica rispetto all'asse x , per cui è sufficiente studiare la parte definita per $\vartheta \in [0, \pi]$. Derivando γ si ha

$$\gamma'(\vartheta) = (\cos \vartheta - \vartheta \sin \vartheta, \sin \vartheta + \vartheta \cos \vartheta) \quad \text{per } \vartheta \in [0, \pi].$$

Valutandone il modulo si ha

$$|\gamma'(\vartheta)| = \sqrt{1 + \vartheta^2} \quad (\text{solo per } \vartheta \in [0, \pi])$$

e analogamente

$$f(\gamma(\vartheta)) = \sqrt{1 + \vartheta^2} \quad (\text{solo per } \vartheta \in [0, \pi]).$$

Per simmetria (di f rispetto al sostegno della curva) si ha che

$$\int_{\gamma} f \, ds = 2 \int_0^{\pi} (1 + \vartheta^2) \, d\vartheta = 2 \left(\pi + \frac{\pi^3}{3} \right).$$

Volendo svolgere tutti i calcoli si otterrebbe che

$$\begin{aligned}|\gamma'(\vartheta)| &= \sqrt{1 + (2\pi - \vartheta)^2} && \text{per } \vartheta \in (\pi, 2\pi], \\ f(\gamma(\vartheta)) &= \sqrt{1 + (2\pi - \vartheta)^2} && \text{per } \vartheta \in [\pi, 2\pi],\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f \, ds &= \int_0^{\pi} (1 + \vartheta^2) \, d\vartheta + \int_{\pi}^{2\pi} (1 + (2\pi - \vartheta)^2) \, d\vartheta = \\ &= \left(\pi + \frac{\pi^3}{3} \right) + \left(\pi + \frac{\pi^3}{3} \right).\end{aligned}$$