

1. Calcolando le derivate di f e imponendole uguali a zero si ottiene il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = x^4 - x^2 + 2xz^2 = 0 \\ f_y(x, y, z) = 2y = 0 \\ f_z(x, y, z) = 2x^2z - z = 0. \end{cases}$$

Riscrivendolo si ha il sistema

$$\begin{cases} x^4 - x^2 + 2xz^2 = 0 \\ y = 0 \\ z(2x^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni i punti

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\sqrt[4]{2}}{2\sqrt{2}} \right), \quad P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{\sqrt[4]{2}}{2\sqrt{2}} \right),$$

$$P_3 = (0, 0, 0), \quad P_4 = (1, 0, 0), \quad P_5 = (-1, 0, 0).$$

Le derivate seconde sono

$$f_{xx}(x, y, z) = 4x^3 - 2x + 2z^2$$

$$f_{xy}(x, y, z) = 0$$

$$f_{xz}(x, y, z) = 4xz$$

$$f_{yy}(x, y, z) = 2$$

$$f_{yz}(x, y, z) = 0$$

$$f_{zz}(x, y, z) = 2x^2 - 1$$

da cui

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & \sqrt[4]{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt[4]{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_f(P_2) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & -\sqrt[4]{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt[4]{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_f(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H_f(P_4) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_f(P_5) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In quanto diagonali, le ultime tre matrici ci forniscono informazioni immediate: il punto P_3 è di sella, il punto P_4 è di minimo stretto, il punto P_5 è di sella. Per quanto riguarda gli altri due bisogna fare qualche semplice considerazione: in entrambi i casi il determinante è negativo e la traccia è positiva, per cui i punti P_1 e P_2 sono di sella.

Infine è facile vedere che il limite non esiste: è sufficiente valutare i due limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 0, 0) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 0, 0)$$

per accorgersi che il limite non c'è.

2. Valutiamo le derivate parziali per vedere dove il gradiente ha modulo non nullo. Si ha

$$f_x(x, y) = 9y - 3x^2, \quad f_y(x, y) = 9x - 3y^2.$$

La prima si annulla per $y = x^2/3$, la seconda per $x = y^2/3$, per cui gli unici punti in cui si annullano entrambe, e quindi le ipotesi del teorema del Dini non sono verificate, sono

$$(0, 0) \quad \text{e} \quad (3, 3).$$

In ogni altro punto diverso da questi due sicuramente l'equazione $f(x, y) = c$, qualunque sia $c \in \mathbf{R}$, è localmente il grafico di una funzione.

Consideriamo ora il punto $Q = (3\sqrt[3]{4}, 3\sqrt[3]{2})$ soddisfacente $f(Q) = 0$. Si verifica facilmente che

$$f_x(3\sqrt[3]{4}, 3\sqrt[3]{2}) \neq 0$$

per cui sicuramente il luogo degli zeri di f è, localmente intorno a Q , il grafico di una funzione h definita in un intervallo I che contiene il valore $3\sqrt[3]{2}$ e immagine della curva $y \mapsto (h(y), y)$ sempre definita per $y \in I$.

Il fatto che

$$f_y(3\sqrt[3]{4}, 3\sqrt[3]{2}) = 0$$

non garantisce che il luogo degli zeri di f non sia immagine di una curva $x \mapsto (x, g(x))$ per una qualche funzione g . Per vedere ciò studiamo meglio il

luogo degli zeri di f scrivendo lo sviluppo di Taylor di h fino al secondo ordine.
Si ha che per $y \in I$

$$\begin{aligned} h'(y) &= -\frac{f_y(h(y), y)}{f_x(h(y), y)} \\ h''(y) &= -\frac{[f_{xy}(h(y), y)h'(y) + f_{yy}(h(y), y)]f_x(h(y), y)}{(f_x(h(y), y))^2}, \\ &\quad + \frac{[f_{xx}(h(y), y)h'(y) + f_{xy}(h(y), y)]f_y(h(y), y)}{(f_x(h(y), y))^2}. \end{aligned}$$

Valutando le derivate seconde di f si ha

$$f_{xx}(x, y) = -6x, \quad f_{xy}(x, y) = 9, \quad f_{yy}(x, y) = -6y.$$

Valutando le derivate nel punto Q si ha

$$\begin{aligned} f_x(Q) &= -27\sqrt[3]{2}, \quad f_y(Q) = 0, \\ f_{xx}(Q) &= -18\sqrt[3]{4}, \quad f_{xy}(Q) = 9, \quad f_{yy}(Q) = -18\sqrt[3]{2}, \end{aligned}$$

da cui

$$h'(Q) = 0, \quad h''(Q) = -\frac{2}{3}.$$

Si ha quindi che, per $y \in I$,

$$h(y) = 3\sqrt[3]{4} - \frac{1}{3} \left(y - 3\sqrt[3]{2} \right)^2 + o \left(y - 3\sqrt[3]{2} \right)^2.$$

Deduciamo che localmente intorno a $3\sqrt[3]{2}$ la funzione h è concava per cui il luogo degli zeri di f , intorno al punto Q , non può essere espresso come immagine di una curva $x \mapsto (x, g(x))$.

3. Consideriamo l'equazione

$$(\lambda + 1)D^3 + (\lambda - 1)D = 0.$$

Sicuramente abbiamo la soluzione $D = 0$. Per $\lambda = -1$ l'equazione diventa di primo grado e $D = 0$ è l'unica soluzione. Negli altri casi, cioè per $\lambda \neq -1$, oltre a $D = 0$ si hanno le due radici (complesse) di

$$D^2 = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}.$$

Per $\frac{1-\lambda}{1+\lambda} > 0$, cioè per $\lambda \in (-1, 1)$, si hanno le due radici reali distinte

$$D = \sqrt{\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}}, \quad D = -\sqrt{\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}},$$

per $\lambda = 1$ le due radici reali coincidenti

$$D = 0$$

(e quindi in questo caso $D = 0$ ha molteplicità 3!), per $\frac{1-\lambda}{1+\lambda} < 0$, cioè per $\lambda < -1$ oppure per $\lambda > 1$, si hanno le due radici complesse

$$D = \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} i, \quad D = -\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} i.$$

In conclusione si ha che le soluzioni sono:

$$\text{per } \lambda \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$u(t) = a \cos \sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}} t + b \sin \sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}} t + c,$$

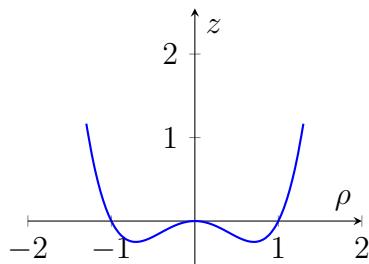
$$\text{per } \lambda = -1 \quad u(t) = a,$$

$$\text{per } \lambda \in (-1, 1) \quad u(t) = a e^{\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}} t} + b e^{-\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}} t} + c,$$

$$\text{per } \lambda = 1 \quad u(t) = a + b t + c t^2,$$

al variare di $a, b, c \in \mathbf{R}$.

4. Per farsi un'idea del grafico della funzione $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)$, essendo f radiale, basta disegnare la funzione $g(\rho) = \rho^4 - \rho^2$, il cui grafico è parzialmente riportato in figura, e ruotarlo idealmente attorno all'asse verticale.



La superficie S è una parte di tale grafico e *non* è una superficie chiusa, quindi non è il bordo di un aperto limitato. Un modo (ma mostriamo anche altre soluzioni) per calcolare tale flusso è usare in maniera opportuna il teorema della divergenza. Va scelto prima di tutto un aperto di \mathbf{R}^3 di cui S sia una parte di bordo. La cosa più semplice è unire S alla superficie

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2, z = 2\}$$

in modo tale che

$$S \cup T = \partial\Omega, \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z \geq (x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2), z \leq 2\}.$$

In tal modo il campo F risulta ortogonale a T , per cui il calcolo risulterà semplificato. Dal teorema della divergenza si ha

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle d\sigma$$

con ν normale esterna ad Ω . Poiché tale normale, perlomeno su S , ha la terza componente negativa, possiamo in tal modo valutare il flusso richiesto come segue.

$$\begin{aligned} \iint_S \langle F, \nu \rangle d\sigma &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz - \iint_T \langle F, \nu \rangle d\sigma = \\ &= \iiint_{\Omega} dx dy dz - \iint_T z d\sigma. \end{aligned}$$

Per far ciò dobbiamo valutare innanzitutto il volume di Ω , che può essere facilmente calcolato con le coordinate cilindriche. Si ha che

$$\rho^4 - \rho^2 \leq z \leq 2.$$

La variabile ρ varia tra 0 e il suo valore massimo che è in corrispondenza di $z = 2$, cioè $\rho = \sqrt{2}$. Per cui il volume di Ω è dato da

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_{\rho^4 - \rho^2}^2 dz \rho = \\ &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{2}} d\rho (2\rho + \rho^3 - \rho^5) = \\ &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \left(\rho^2 + \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi \left(3 - \frac{4}{3} \right). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il flusso attraverso T si ha (la normale esterna ad Ω in questo caso è $(0, 0, 1)$):

$$\iint_T z d\sigma = \iint_{\{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 2\}} 2 du dv = 4\pi$$

per cui

$$\iint_S \langle F, \nu \rangle d\sigma = 2\pi - \frac{8\pi}{3}.$$

Diversamente, operando il calcolo diretto, va prima trovata la normale. Una possibile parametrizzazione è la seguente:

$$\psi(\rho, \vartheta) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, \rho^4 - \rho^2), \quad \rho \in [0, \sqrt{2}], \vartheta \in [0, 2\pi).$$

Valutando le derivate si ha

$$\begin{aligned}\psi_\rho(\rho, \vartheta) &= (\cos \vartheta, \sin \vartheta, 4\rho^3 - 2\rho) \\ \psi_\vartheta(\rho, \vartheta) &= (-\rho \sin \vartheta, \rho \cos \vartheta, 0)\end{aligned}$$

da cui

$$\psi_\rho \wedge \psi_\vartheta(\rho, \vartheta) = ((2\rho - 4\rho^3)\rho \cos \vartheta, (2\rho - 4\rho^3)\rho \sin \vartheta, \rho).$$

Si osservi come la terza componente sia positiva, per cui il segno andrà cambiato, e inoltre tale vettore andrebbe normalizzato. Ma si ha che

$$\begin{aligned}\langle F(\psi(\rho, \vartheta)), \nu(\psi(\rho, \vartheta)) \rangle |\psi_\rho(\rho, \vartheta) \wedge \psi_\vartheta(\rho, \vartheta)| &= \\ &= \left\langle F(\psi(\rho, \vartheta)), -\frac{\psi_\rho(\rho, \vartheta) \wedge \psi_\vartheta(\rho, \vartheta)}{|\psi_\rho(\rho, \vartheta) \wedge \psi_\vartheta(\rho, \vartheta)|} \right\rangle |\psi_\rho(\rho, \vartheta) \wedge \psi_\vartheta(\rho, \vartheta)| = \\ &= \langle F(\psi(\rho, \vartheta)), -\psi_\rho(\rho, \vartheta) \wedge \psi_\vartheta(\rho, \vartheta) \rangle\end{aligned}$$

da cui il flusso

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{2}} d\rho (2\rho^2 \cos \vartheta - 4\rho^4 \cos \vartheta + 2\rho^2 \sin \vartheta - 4\rho^4 \sin \vartheta + \rho^3 - \rho^5) &= \\ &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{2}} d\rho (\rho^3 - \rho^5) = 2\pi \left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi \left(1 - \frac{4}{3} \right).\end{aligned}$$

Un'altra possibile parametrizzazione è quella data direttamente in coordinate cartesiane:

$$\phi(u, v) = (u, v, (u^2 + v^2)^2 - u^2 - v^2), \quad (u, v) \in C := \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 2\}$$

si ha che

$$\phi_u(u, v) = (1, 0, 4u(u^2 + v^2) - 2u), \quad \phi_v(u, v) = (0, 1, 4v(u^2 + v^2) - 2v)$$

il cui prodotto vettoriale fornisce

$$(2u - 4u(u^2 + v^2), 2v - 4v(u^2 + v^2), 1).$$

Si ha

$$|\phi_u \wedge \phi_v|(u, v) = \sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)}.$$

Normalizzando e considerando la terza componente negativa si ottiene

$$\nu(\phi(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)}} (4u(u^2 + v^2) - 2u, 4v(u^2 + v^2) - 2v, -1).$$

Siccome $F(\phi(u, v)) = (-1, -1, (u^2 + v^2)^2 - u^2 - v^2)$ si ha che

$$\begin{aligned} \langle F(\phi(u, v)), \nu(\phi(u, v)) \rangle |\phi_u(u, v) \wedge \phi_v(u, v)| &= \\ &= 2u - 4u(u^2 + v^2) + 2v - 4v(u^2 + v^2) + u^2 + v^2 - (u^2 + v^2)^2 \end{aligned}$$

per cui il flusso cercato è

$$\begin{aligned} \iint_S \langle F, \nu \rangle d\sigma &= \\ &= \iint_C (2u - 4u(u^2 + v^2) + 2v - 4v(u^2 + v^2) + u^2 + v^2 - (u^2 + v^2)^2) du dv. \end{aligned}$$

In coordinate polari diventa

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{2}} d\rho (2\rho \cos \vartheta - 4\rho^3 \cos \vartheta + 2\rho \sin \vartheta - 4\rho^3 \sin \vartheta + \rho^2 - \rho^4) \rho$$

che integrato darà lo stesso risultato trovato precedentemente.

5. Considerato

$$\vartheta \mapsto (\sqrt{2} \cos \vartheta, \sqrt{2} \sin \vartheta), \quad \vartheta \in \left[\frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi \right],$$

il lavoro compiuto lungo tale cammino è dato da

$$\int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi} \frac{1}{2} \langle (\sqrt{2} \cos \vartheta, 0), (-\sqrt{2} \sin \vartheta, \sqrt{2} \cos \vartheta) \rangle d\vartheta = - \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = 0.$$

Si osservi che, per questioni di simmetria, il lavoro compiuto da F lungo l'arco di cerchio che completa l'immagine di γ ad una circonferenza è ancora nullo e quindi unendo i cammini si ha che lungo la circonferenza ottenuta il lavoro è nullo. Ciononostante il campo non può essere conservativo: non essendo irrotazionale non ammette potenziale.

Se non siete ancora convinti... osservate che se esistesse un potenziale U si avrebbe

$$\frac{\partial}{\partial y} U(x, y) = 0$$

da cui $U = U(x)$, ma di conseguenza è impossibile che $\frac{\partial U}{\partial x}$ sia una funzione che dipende anche da y , come è F_1 .