Corsi di laurea in ingegneria aerospaziale e ingegneria meccanica
Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica II

Padova, 26.1.2016

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Dato l'insieme

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, e^{x^2+y^2} - x\cos z + z^2 = 1 + \pi^2\right\}$$

si verifichi che il punto $(0,0,\pi) \in E$ e si dica se E, localmente intorno a tale punto, è il grafico di una funzione di due delle tre variabili x, y, z.
Dopodiché, in caso affermativo, si scriva l'equazione per il piano tangente a tale grafico.

2. Data la superficie

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1, z \geqslant 0\right\}$$

si calcoli il flusso del campo $F(x,y,z) = (xz, yz, 0)$ attraverso S orientata in modo tale che la normale abbia la terza componente positiva.

3. Si calcoli il lavoro svolto dal campo

$$G(x,y,z) = (x^4, y^4 + x, z^4)$$

lungo il cammino $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$.

4. Fra tutti gli ellissoidi definiti da

$$(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \quad \text{tali che} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$$

soggetti alla condizione $a + 2b + 3c = 18$, $(a, c, b > 0)$ si trovino, se esistono, quelli di volume massimo e di volume minimo.

5. Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione

$$u''' - 2u'' + 2u' = 1 + t$$

Soluzione della traccia del 26.1.2016

1. Considerando la funzione

$$f(x,y,z) = e^{x^2+y^2} - x\cos z + z^2$$

si ha che $f(0,0,\pi) = 1+\pi^2$. Valutando le derivate di f si ha

$$\nabla f(x,y,z) = \big(2\,x\,e^{x^2+y^2} - \cos z, 2\,y\,e^{x^2+y^2}, x\,\mathrm{sen}\,z + 2z\big)$$

da cui

$$\nabla f(0,0,\pi) = \big(1,0,2\pi\big)$$

per cui le ipotesi del teorema del Dini sono verificate e l'insieme E può essere visto localmente come grafico sia di una funzione g delle variabile x e y, sia di una funzione h delle variabile y e z.
Il piano tangente si può ricavare trovando le derivate prime di, ad esempio, h, derivate che si possono trovare sfruttando le derivate di f come nella tesi del teorema delle funzioni implicite.
Si noti che il piano tangente è dato anche da

$$\langle \nabla f(0,0,\pi), (x,y,z-\pi)\rangle = 0$$

cioè

$$x + 2\pi(z-\pi) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x + 2\pi z = 2\pi^2\,.$$

2. Possiamo parametrizzare, ad esempio, S con

$$\varphi(u,v) = \left(u, v, \sqrt{1-u^2-\frac{v^2}{2}}\right), \qquad (u,v)\in E = \left\{(u,v)\in\mathbf{R}^2 \,\middle|\, u^2+\frac{v^2}{2}\leqslant 1\right\}$$

di conseguenza si ha

$$\varphi_u(u,v) = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-\frac{v^2}{2}}}\right),$$

$$\varphi_v(u,v) = \left(0, 1, \frac{-v}{2\sqrt{1-u^2-\frac{v^2}{2}}}\right),$$

$$\varphi_u(u,v)\wedge\varphi_v(u,v) = \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-\frac{v^2}{2}}}, \frac{v}{2\sqrt{1-u^2-\frac{v^2}{2}}}, 1\right).$$

Inoltre

$$F\big(\varphi(u,v)\big) = \left(u\sqrt{1-u^2-\frac{v^2}{2}}, v\sqrt{1-u^2-\frac{v^2}{2}}, 0\right)$$

per cui

$$\begin{aligned}
\iint_S \langle F, \nu\rangle d\sigma &= \iint_E \left\langle F\big(\varphi(u,v)\big), \frac{\varphi_u(u,v)\wedge\varphi_v(u,v)}{|\varphi_u(u,v)\wedge\varphi_v(u,v)|}\right\rangle |\varphi_u(u,v)\wedge\varphi_v(u,v)|\, dudv \\
&= \iint_E \big\langle F\big(\varphi(u,v)\big), \varphi_u(u,v)\wedge\varphi_v(u,v)\big\rangle\, dudv \\
&= \iint_E \left(u^2 + \frac{v^2}{2}\right) dudv.
\end{aligned}$$

Passando in coordinate ellittiche ($u = \rho\cos\vartheta$, $v = \sqrt{2}\,\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta$) si ha

$$\begin{aligned}
\iint_S \langle F, \nu\rangle d\sigma &= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \left(\rho^2\cos^2\vartheta + \frac{2\,\rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta}{2}\right)\sqrt{2}\,\rho = \\
&= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \sqrt{2}\,\rho^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\pi\,.
\end{aligned}$$

Altro modo è usare il teorema della divergenza nel modo seguente:

$$\iint_S \langle F, \nu\rangle d\sigma = \iiint_\Omega \mathrm{div}\, F\, dxdydz - \iint_\Sigma \langle F, \nu\rangle d\sigma$$

dove $S \cup \Sigma = \partial\Omega$. La scelta più semplice è quella di considerare

$$\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + \frac{y^2}{2} \leqslant 1, z = 0\right\}$$

poiché il flusso attraverso Σ è nullo, e di conseguenza

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 \leqslant 1, z \geqslant 0\right\}.$$

Si troverà che

$$\iint_\Sigma \langle F, \nu\rangle d\sigma = 0 \qquad \text{e} \qquad \iiint_\Omega \mathrm{div}\, F\, dxdydz = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\pi\,.$$

3. Un modo di calcolare tale lavoro è fare il calcolo diretto, calcolo che risulta immediato. Altro modo è usare il teorema di Stokes. Il campo è definito in tutto $\mathbf{R}^3$ e si ha che

$$\mathrm{rot}\, G = \mathrm{rot}\,(0,x,0) = (0,0,1).$$

Applicando il teorema di Stokes, si può scegliere la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqslant 1, z = 0\right\}$$

che ha il sostegno della curva γ come bordo e inoltre ha la normale uguale a $\mathrm{rot}\, G$. Scegliendo la parametrizzazione più naturale e semplice per Σ

$$\varphi(u,v) = (u,v,0), \qquad (u,v)\in C = \big\{(u,v)\in\mathbf{R}^2 \,\big|\, u^2+v^2\leqslant 1\big\}$$

si tratta di valutare il flusso del rotore di G attraverso superficie Σ orientata con la normale $\varphi_x \wedge \varphi_y / |\varphi_x \wedge \varphi_y|$.
Si ottiene anche che γ orienta positivamente $\partial\Sigma$, per cui si ottiene immediatamente che il lavoro richiesto è dato da

$$\iint_\Sigma \langle \mathrm{rot}\, G, \nu \rangle d\sigma = \iint_C \langle (0,0,1), (0,0,1) \rangle du dv = \pi \, .$$

4. Innanzitutto troviamo il volume dell'ellissoide, ellissoide che denoteremo con E. Un modo per trovare il volume è adattare le coordinate sferiche: consideriamo

$$\begin{aligned}
x &= a\,\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\vartheta & \qquad \vartheta &\in [0, 2\pi], \\
y &= b\,\rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta & \varphi &\in [0, \pi], \\
z &= c\,\rho \cos\varphi & \rho &\in [0, 1].
\end{aligned}$$

La matrice jacobiana di tale cambiamento di variabile è data da

$$\begin{pmatrix} -a\,\rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta & a\,\rho \cos\varphi \cos\vartheta & a \operatorname{sen}\varphi \cos\vartheta \\ b\,\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\vartheta & b\,\rho \cos\varphi \operatorname{sen}\vartheta & b \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta \\ 0 & -c\,\rho \operatorname{sen}\varphi & c\, \cos\varphi \end{pmatrix}$$

il cui jacobiano è dato da $a\,b\,c\,\rho^2 \operatorname{sen}\varphi$. Integrando si ottiene

$$\iiint_E dxdydz = a\,b\,c \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 d\rho\, \rho^2 \operatorname{sen}\varphi = a\,b\,c\,\frac{4\pi}{3} \, .$$

A questo punto usiamo, per esempio, il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e cerchiamo i punti stazionari liberi (cioè in tutto $\mathbf{R}^4$, ricordando però che dovremo poi limitarci a considerare $a, b, c > 0$) della funzione

$$H(a, b, c, \lambda) = \frac{4\pi abc}{3} + \lambda\big(a + 2b + 3c - 18\big) \, .$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial a} = \dfrac{4\pi bc}{3} + \lambda = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial H}{\partial b} = \dfrac{4\pi ac}{3} + 2\lambda = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial H}{\partial c} = \dfrac{4\pi ab}{3} + 3\lambda = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = a + 2b + 3c - 18 = 0. \end{cases}$$

Si ottiene che

$$-\lambda = \frac{4\pi}{3} bc = \frac{4\pi}{3}\frac{ac}{2} = \frac{4\pi}{3}\frac{ab}{3}$$

da cui

$$b = \frac{a}{2} \, , \quad \frac{c}{2} = \frac{b}{3} \, , \quad a + 2b + 3c = 18 \, .$$

Scrivendo tutto in termini di a si ottiene

$$b = \frac{a}{2}\ , \quad c = \frac{a}{3}\ , \quad a + a + a = 18$$

da cui infine

$$a = 6\,, \quad b = 3\ , \quad c = 2\ .$$

Questi valori corrispondono all'unico punto di massimo, mentre il minimo non c'è.
Infatti:
- una volta resisi conto che c'è un unico punto stazionario, si può valutare il limite agli estremi del dominio

$$T = \big\{(a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \;\big|\; a > 0, b > 0, c > 0, a + 2b + 3c = 18\big\}$$

che rappresenta una porzione limitata di un piano in un ottante di $\mathbf{R}^3$ (che di fatto risulta essere un triangolo). Valutando i limiti sui bordi di tale triangolo i cui lati corrispondono a scegliere una delle tre variabili uguale a 0, si ha che la funzione volume tende a zero. Essendo positiva all'interno è chiaro che quello trovato è un massimo. Di conseguenza si conclude che tale problema non ammette minimo, mentre ammette massimo per $a = 6, b = 3, c = 2$ il cui valore è dato da

$$\frac{4\pi}{3} 36 = 48\,\pi;$$

- altro modo è considerare il compatto

$$\overline{T} = \{(a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \,|\, a + 2b + 3c = 18, a \geqslant 0, b \geqslant 0, c \geqslant 0\}$$

nel quale la funzione volume $f(a,b,c) = 4\pi abc/3$ ammette massimo e minimo. Si troveranno oltre al punto $(6,3,2)$ tutti punti del bordo nei quali la funzione f si annulla. Essendo positiva all'interno, il punto $(6,3,2)$ è di massimo, mentre il minimo sarà sul bordo di T. Tornando al problema dato, cioè sul trinagolo T, il minimo non ci sarà, dal momento che è assunto sul bordo di T.

Altro modo è parametrizzare il vincolo riducendosi a due variabili. Considerando, ad esempio,

$$\varphi(u,v) = (18{-}2u{-}3v, u, v), \qquad (u,v) \in R := \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 2u{+}3v < 18, u > 0, v > 0\}$$

e

$$\tilde{f}(u,v) = f \circ \varphi(u,v) = \frac{4\pi}{3}(18 - 2u - 3v)uv$$

si ottiene che

$$\nabla \tilde{f} = (0,0) \qquad \text{per} \qquad (u,v) = (3,2).$$

Valutando la matrice hessiana in tale punto si ha

$$H_{\tilde{f}}(3,2) = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ -6 & -18 \end{pmatrix}$$

che è definita negativa, per cui il punto in questione è di massimo locale. Essendo l'unico punto stazionario all'interno di R è di massimo e punti di minimo non ce ne sono.
Si può anche ragionare come prima considerando il trinagolo $\overline{R}$ che risulta compatto: in $\overline{R}$ ci saranno sia massimo che minimo e ci si rende conto che il punto $(3,2)$ è di massimo e tutti i punti di bordo sono di minimo. A questo punto, ritornando al problema originale su R, si conclude che $\tilde{f}$ non ammette minimo in R, ma solo massimo.

5. L'equazione omogenea è

$$(D^3 - 2D^2 + 2D)u = 0\,.$$

Risolvendo $P(D) = D^3 - 2D^2 + 2D = D(D^2 - 2D + 2) = 0$ si ottengono le radici

$$D = 0, \quad D = 1 + i, \quad D = 1 - i$$

da cui le soluzioni dell'omogenea

$$c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \operatorname{sen} t + c_3\,.$$

Cerchiamo una qualche soluzione della non omogenea. Si noti che un annichilatore per il dato è il polinomio differenziale

$$Q(D) = D^2,$$

infatti

$$\frac{d^2}{dt^2}(1+t) = 0.$$

Cerchiamo allora una soluzione tra le soluzioni di

$$Q(D)P(D)u = 0$$

mettendo da parte per il momento quelle dell'omogenea. Poiché

$$Q(D)P(D) = D^3(D^2 - 2D + 2)$$

dobbiamo cercare tra le funzioni del tipo

$$v(t) = at^2 + bt + c$$

prendendo $c = 0$ per il momento, visto che risolve l'omogena. Poiché

$$v'(t) = 2at + b, \qquad v''(t) = 2a, \qquad v'''(t) = 0$$

inserendo nell'equazione si ha

$$-4a + 4at + 2b = 1 + t$$

da cui

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = 1.$$

Per cui l'insieme delle soluzioni è dato da

$$c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \operatorname{sen} t + c_3 + \frac{1}{4}t^2 + t$$

al variare di $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$.