Corsi di laurea in ingegneria aerospaziale e ingegneria meccanica
Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica II

Padova, 11.7.2016

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Una volta definito $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}$, si calcoli il seguente integrale

$$\iiint_E z\, dxdydz\,.$$

2. Si dica se il campo

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{x^2 - 5x + 6}, \frac{1}{y^2 - 5y + 6}\right)$$

è conservativo, se ne trovi il dominio massimale D e si dica se D è connesso e quante sono le componenti connesse di D. Dopodiché, se possibile, se ne trovi un potenziale.

3. Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione

$$u''' - u = e^x\,.$$

4. Si calcoli il flusso del rotore del campo $G(x, y, z) = (zx, zy, -z^2)$ attraverso la superficie

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, z = \frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2,\ z \geqslant x\right\}$$

orientata con la normale che ha terza componente positiva.

5. Data la funzione $f(x, y, z) = xy + z^2$ definita nell'insieme

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4\,, z \geqslant -\sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

si dica se f ammette massimo e/o minimo ed eventualmente li si trovi.

Soluzione della traccia dell'11.7.2016

1. Usiamo le coordinate cilindriche (ρ, ϑ, z). Imponendo

$$\rho^2 = \sqrt{2-\rho^2}$$

si ottiene $\rho = 1$, che è il valore massimo che ρ può assumere. Si ha quindi

$$\begin{aligned}\iiint_E z\,dxdydz &= \int_0^1 \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} dz\, z = \\ &= \int_0^1 \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta\, \frac{1}{2}(2-\rho^2-\rho^4) = \\ &= \pi\left(\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{12}\pi\,.\end{aligned}$$

Il compito conteneva un errore, l'insieme, che chiameremo $\tilde{E}$, nel testo era $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{2-x^2+y^2}\}$. In questo caso la descrizione dell'insieme, sempre in coordinate cilindriche, diventava la seguente. Imponendo $x^2+y^2 = \sqrt{2-x^2+y^2}$ e ponendo $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ si trova

$$\rho^4 = 2 - \rho^2\cos^2\theta + 2\,\mathrm{sen}^2\theta$$

che descrive la proiezione sul piano xy di $\tilde{E}$ descrivendo l'andamento di ρ in relazione a θ. Risolvendo

$$\rho^4 + \rho^2\cos 2\theta - 2 = 0$$

si ottiene che $\rho^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\cos^2 2\theta + 8} - \cos 2\theta\right)$. Chiamiamo

$$\rho_\theta := \sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2 2\theta + 8} - \cos 2\theta}{2}}\,.$$

L'integrale sarebbe diventato

$$\iiint_{\tilde{E}} z\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\rho_\theta} \rho\,d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} dz\,z\,.$$

2. Il campo è ovviamente irrotazionale, ma

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$$

per cui il campo non è definito in tutto $\mathbf{R}^2$ e il dominio massimale è

$$\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x \neq 2, x \neq 3, y \neq 2, y \neq 3\right\}$$

che ha nove componenti connesse che sono anche semplicemente connesse. In ognuna delle quali, quindi, c'è un potenziale che, a priori, cambia da componente connessa a componente connessa. Integrando

$$\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx = \int \frac{1}{x-3}\,dx - \int \frac{1}{x-2}\,dx = \log\left(\frac{|x-3|}{|x-2|}\right) + c$$

da cui

$$\int F_1(x,y)\,dx = \log\left(\frac{|x-3|}{|x-2|}\right) + g(y)\,.$$

Procedendo in maniera analoga con F_2 si ricava che i potenziali sono tutti del tipo

$$\log\left(\frac{|x-3|}{|x-2|}\right) + \log\left(\frac{|y-3|}{|y-2|}\right) + c\,, \qquad c \in \mathbf{R}\,.$$

Chiaramente la costante c non è necessariamente la stessa in ogni componente connessa del dominio di F e, anzi, a priori avremo nove potenziali diversi ognuno dei quali differisce dagli altri per una costante.

3. Le soluzioni dell'equazione $D^3 - 1 = 0$ in $\mathbf{C}$ sono

$$1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\,.$$

per cui le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea sono

$$c_1 e^x + c_2\, e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3\, e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\,, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}\,.$$

Cercando le soluzioni dell'equazione non omogenea dobbiamo tener presente che il dato dell'equazione è anche una soluzione dell'omogenea, per cui cerchiamo una soluzione tra le funzioni del tipo

$$c\,x\,e^x\,.$$

Svolgendo i calcoli si ottiene $c = 1/3$ da cui infine l'insieme delle soluzioni è dato da

$$u(x) = c_1 e^x + c_2\, e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3\, e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}\,x\,e^x\,, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}\,.$$

4. Il modo più semplice è quello di usare il teorema di Stokes: si ha che

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} G, \nu \rangle d\sigma = \int_{\partial S^+} [G_1 dx + G_2 dy + G_3 dz]\,. \tag{1}$$

La superficie S è infatti compatta e con bordo e, in quanto cartesiana, può essere facilmente parametrizzata da

$$\varphi(u,v) = \left(u, v, \frac{5}{4} - \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 - v^2\right)$$

con $(u,v) \in C = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \,|\, u^2+v^2 \leqslant 1\}$, dove C è l'insieme che si ottiene proiettando la superficie S sul piano xy. Infatti per trovare C è sufficiente risolvere

$$\frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 \geqslant x$$

che è equivalente a $x^2 + y^2 \leqslant 1$. A questo punto nell'integrale di destra in (1) va parametrizzato ∂S. La cosa più semplice è

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos t)\,, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

A questo punto si ottiene

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t \operatorname{sen} t \, dt = 0\,.$$

Diversamente si ha che

$$\operatorname{rot} G = (-y, x, 0)$$

e valutando (usando la φ di sopra)

$$\left\langle \operatorname{rot} G(\varphi(u,v)), \frac{\varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v)}{|\varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v)|} \right\rangle |\varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v)| = v$$

che integrata su C dà zero.

5. L'insieme in cui è definita la funzione è chiaramente limitato (ad esempio, è contenuto nella sfera di raggio 2) è chiuso e la funzione f è continua, per cui esistono sia il massimo che il minimo.
Derivando la funzione si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

per cui l'unico punto critico per f, che però non è interno ad E, è $(0,0,0)$. Può essere comunque considerato tra i candidati, anche perché andrebbe considerato in ogni caso successivamente.
Parametrizziamo ora la parte di bordo contenuta in $\big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\big|\, x^2+y^2+z^2 = 4\big\}$.
Usando le coordinate sferiche $\phi(\vartheta,\varphi) = (2\cos\vartheta \operatorname{sen}\varphi, 2\operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi, 2\cos\varphi)$ si ottiene

$$f\big(\phi(\vartheta,\varphi)\big) = 4\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}^2\varphi + 4\cos^2\varphi\,.$$

Derivando si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 4\operatorname{sen}^2\varphi \left(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta\right) = 0 \\ 8\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \left(\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta - 1\right) = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni

$$\begin{cases} (\varphi = 0 \quad \vee \quad \cos^2\vartheta = \operatorname{sen}^2\vartheta) \\ \varphi = 0 \qquad \vee \qquad \varphi = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$(\varphi = 0 \quad \vee \quad \cos^2\vartheta = \operatorname{sen}^2\vartheta) \quad \wedge \quad \Big(\varphi = 0 \quad \vee \quad \varphi = \frac{\pi}{2}\Big)$$

che fornisce i cinque punti

$$(0,0,2)\,,\ (\sqrt{2},\sqrt{2},0)\,,\ (\sqrt{2},\sqrt{2},0)\,,\ (\sqrt{2},-\sqrt{2},0)\,,\ (-\sqrt{2},\sqrt{2},0)\,,\ (-\sqrt{2},-\sqrt{2},0)\,.$$

Ora parametrizziamo ora la parte di bordo contenuta in $\big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\big|\, z = -\sqrt{x^2+y^2}\big\}$, che può essere vista come un grafico. Otteniamo

$$f\big(x,y,-\sqrt{x^2+y^2}\big) = xy + x^2 + y^2$$

che derivata fornisce

$$\begin{cases} y + 2x = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

che non fornisce punti sulla porzione di cono se non il vertice $(0,0,0)$. Rimane lo spigolo, la parte di bordo data dall'intersezione

$$\big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\big|\, x^2+y^2+z^2 = 4\big\} \cap \big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\big|\, z = -\sqrt{x^2+y^2}\big\}\,,$$

che può essere parametrizzata con

$$\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t, -\sqrt{2})\,.$$

Derivando $f\big(\gamma(t)\big)$ si ottengono i punti

$$(1,1,-\sqrt{2})\,,\ (-1,1,-\sqrt{2})\,,\ (1,-1,-\sqrt{2})\,,\ (-1,-1,-\sqrt{2})\,.$$

Riassumendo valutiamo f nei vari punti trovati e candidati ad essere il massimo o il minimo e troviamo

$$\begin{aligned} &f(0,0,0) = 0 \\ &f(0,0,2) = 4 \\ &f(\sqrt{2},\sqrt{2},0) = 2 \\ &f(-\sqrt{2},\sqrt{2},0) = -2 \\ &f(\sqrt{2},-\sqrt{2},0) = -2 \\ &f(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0) = 2 \\ &f(1,1,-\sqrt{2}) = 3 \\ &f(1,-1,-\sqrt{2}) = 1 \\ &f(-1,1,-\sqrt{2}) = 1 \\ &f(-1,-1,-\sqrt{2}) = 3 \end{aligned}$$

da cui si ricavano i punti di minimo e i punti di massimo.