Corsi di laurea in ingegneria aerospaziale e ingegneria meccanica
Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica II

Padova, 19.9.2016

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** ogni risposta.
Delle affermazioni corrette, ma non giustificate, non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si consideri e si disegni la superficie S ottenuta ruotando idealmente il grafico, considerato sul piano xz, di f attorno all'asse z dove $f : [0,4] \to \mathbf{R}$ è definita da $f(x) = (x-2)^3 - (x-2) + 6$. Dati i campi $F(x,y,z) = (z-12, z-12, 1)$ e $G(x,y,z) = (z^2 - 24z, 12z + x, yz)$ si calcolino:
- il flusso di F attraverso S orientata in modo tale che la normale abbia terza componente negativa;
- il lavoro di G compiuto lungo ∂S, il bordo di S, orientato in modo tale che la sua proiezione sul piano xy risulti orientata in senso orario.

2. Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy'' + y' = \log x \\ y'(1) = 2 \\ y(1) = 1\,. \end{cases}$$

3. Data la funzione

$$f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$$

si calcoli il piano tangente al suo grafico nel punto $(1,0)$, dopodiché si calcoli il volume del solido delimitato da tale piano e dal grafico di f al variare di x, y nell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

4. Si dica se l'insieme B sotto definito è limitato o meno. Dopodiché si determinino, se esistono, i punti di minima e massima distanza dall'origine di tale insieme, dove

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 - xy - 4 = 0\right\}.$$

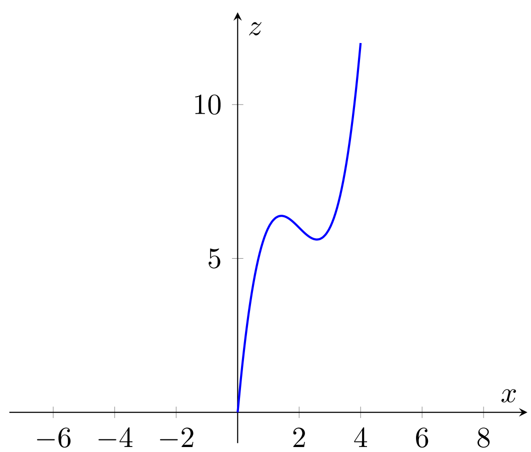
5. Sia data una funzione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ e si supponga che P_1, P_2, P_3 e P_4 siano quattro punti stazionari per f. Si supponga inoltre che le matrici hessiane di f in tali punti siano (A_j matrice hessiana di f in P_j, $j = 1,2,3,4$)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

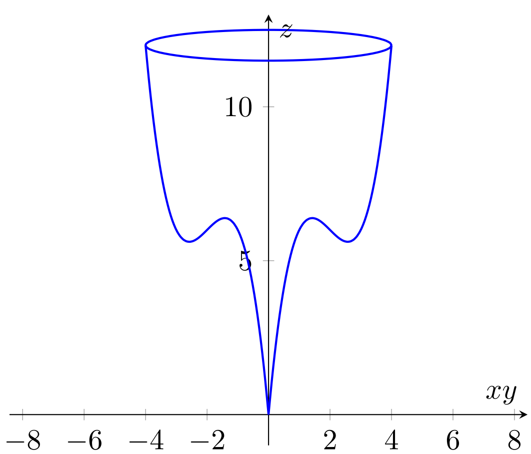
Si dica, per ognuno dei quattro casi, se è possibile dalle informazioni a disposizione dedurre la natura del punto critico e, in caso affermativo, la si deduca.

Soluzione della traccia del 19.9.2016

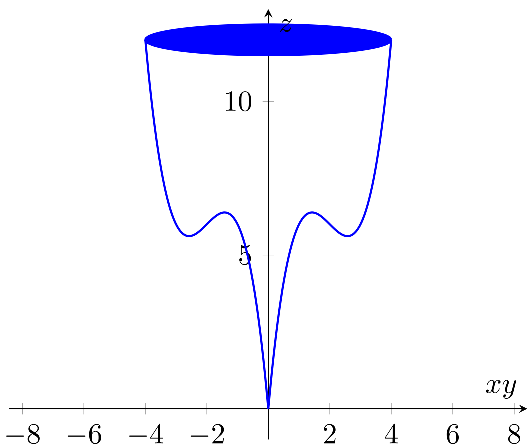
1. Il grafico di f è il seguente



per cui la superficie risulta essere



Si consideri ora il solido E (limitato) che ha come bordo $S \cup \Sigma$, dove con Σ si è denotata la superficie data dal cerchio evidenziato nella figura sottostante, cerchio di raggio 4.
Poiché la divergenza di F è nulla si ha che l'integrale su E di $\operatorname{div} F$ è nullo, ma per il teorema della divergenza coincide con il flusso di F uscente da E. Di conseguenza



$$\iint_S \langle F, \nu \rangle \, d\sigma = -\iint_\Sigma \langle F, \nu \rangle \, d\sigma = -\iint_\Sigma \langle (0,0,1), (0,0,1) \rangle \, d\sigma = -16\,\pi \,.$$

Per quanto riguarda il lavoro del campo G, si noti come

$$\operatorname{rot} G := \left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) = (z - 12, 2z - 24, 1) \,.$$

Usando allora il teorema di Stokes possiamo calcolare il lavoro semplicemente valutando

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} G, \nu \rangle \, d\sigma = \iint_\Sigma \langle \operatorname{rot} G, \nu \rangle \, d\sigma = \iint_\Sigma \langle (0,0,1), (0,0,1) \rangle \, d\sigma = 16\,\pi \,.$$

2. L'equazione è in realtà un'equazione del prim'ordine in y'. Se si preferisce si può cambiare variabile introducendo $v := y'$ e risolvendo dapprima il problema di Cauchy

$$\begin{cases} xv' + v = \log x \\ v'(1) = 2 \end{cases}$$

che ha come soluzione

$$v(x) = \log x - 1 + \frac{a}{x} \,, \qquad a \in \mathbf{R} \,.$$

Poiché v è in realtà y' per trovare l'incognita y è sufficiente integrare ottenendo

$$y(x) = x \log x - x + b - x + a \log x \,, \qquad a.b \in \mathbf{R} \,.$$

Imponendo ora le condizioni iniziali si trova infine la soluzione al problema

$$y(x) = (x+3) \log x - 2x + 3 \,.$$

3. Il piano tangente a tale funzione, scritto come luogo di zeri, è

$$z = 2(x-1) + 2\,.$$

Detto E l'oggetto definito nel testo del problema, il suo volume è quindi dato da

$$\begin{aligned}\iiint_E dxdydz &= \iint_D dxdy \int_{2x}^{1+x^2+y^2} dz = \\ &= \iint_D dxdy\,[(x-1)^2+y^2] = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho\,\rho^3 = \frac{\pi}{2}\,,\end{aligned}$$

dove si è usato il cambio di coordinate $x - 1 = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$.

4. L'insieme B è limitato: poiché

$$2xy \leqslant x^2 + y^2$$

si deduce che i punti dell'insieme B soddisfano

$$4 = x^2 + y^2 - xy \geqslant x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

da cui

$$x^2 + y^2 \leqslant 8\,.$$

Di conseguenza, poiché B è anche chiuso e quindi compatto, il problema di massimo e minimo ammette soluzione.
Consideriamo il quadrato della funzione distanza, cioè $f(x,y) = x^2+y^2$, sull'insieme B e usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
Deriviamo la funzione $H(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(x^2+y^2-xy-4)$ e otteniamo

$$\begin{cases} H_x = 2x + 2\lambda x - y = 0 \\ H_y = 2y + 2\lambda y - x = 0 \\ H_\lambda = x^2+y^2-xy-4 = 0\,. \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni possiamo ricavare

$$1 + \lambda = \frac{y}{2x} = \frac{x}{2y}$$

da cui

$$x^2 = y^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x = y \quad \vee \quad x = -y\,.$$

Dalla terza equazione si ricavano infine i punti cercati: inserendo queste informazioni si ha dapprima

$$x = y \qquad \Longrightarrow \qquad 2x^2 - x^2 - 4 = x^2 - 4 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 2 \quad \vee \quad x = -2\,,$$

cioè i punti $(2,2)$ e $(-2,-2)$; poi

$$x=-y \qquad \Longrightarrow \qquad 3x^2-4=0 \qquad \Longrightarrow \qquad x=\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \vee \quad x=-\frac{2}{\sqrt{3}}\,,$$

cioè i punti $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ e $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. Valutando la distanza dall'origine di questi quattro punti di ha infine che

$$\begin{aligned} (2,2) \ \text{ e } \ (-2,-2) \quad & \text{sono di massima distanza,} \\ \left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \ \text{ e } \ \left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \quad & \text{sono di minima distanza.} \end{aligned}$$

Un altro modo è parametrizzare l'insieme B, che è l'ellisse

$$(x+y)^2+3(x-y)^2=4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{(x+y)^2}{4}+\frac{3(x-y)^2}{4}=1\,.$$

Si può parametrizzare tale ellisse ponendo:

$$\begin{aligned} \frac{(x+y)^2}{4}=\cos^2\vartheta\,, \qquad & \frac{3(x-y)^2}{4}=\operatorname{sen}^2\vartheta\,, \\ (x+y)^2=4\cos^2\vartheta\,, \qquad & (x-y)^2=\frac{4}{3}\operatorname{sen}^2\vartheta\,. \end{aligned}$$

Se consideriamo

$$x+y=2\cos\vartheta\,, \qquad x-y=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\,\vartheta\,,$$

da cui si ottengono

$$x(\vartheta)=\cos\vartheta+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\,\vartheta\,, \qquad y(\vartheta)=\cos\vartheta-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\,\vartheta\,.$$

A questo punto si può minimizzare e massimizzare la funzione

$$f(\vartheta)=\left(\cos\vartheta+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\,\vartheta\right)^2+\left(\cos\vartheta-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\,\vartheta\right)^2$$

che rappresenta la distanza al quadrato dall'origine.

Altro modo è passare direttamente in coordinate polari per descrivere la curva B:

$$\rho^2\cos^2\vartheta+\rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta-\rho^2\cos\vartheta\operatorname{sen}\,\vartheta=4$$

da cui

$$\rho^2(\vartheta)=\frac{4}{1-\cos\vartheta\operatorname{sen}\,\vartheta}$$

che rappresenta la distanza al quadrato dall'origine in funzione di ϑ.

5. Il punto P_1 è ovviamente di sella.

La matrice A_2 ha determinante nullo, per cui almeno un autovalore è nullo. La traccia è positiva, e quindi almeno un autovalore è positivo. Per il resto non si può dire nulla, perché anche il segno dei minori principali non aiuta. Osservando solamente la matrice hessiana non è possibile dedurre il segno degli autovalori, e quindi nemmeno dedurre con certezza la natura del punto critico.
Possiamo calcolare gli autovalori: il polinomio caratteristico è

$$-\lambda\big(\lambda^2 - 11\lambda + 28\big)$$

che ha due radici positive e, ovviamente, una nulla. È questo un caso in cui, dalla sola matrice hessiana, non si ricavano informazioni certe, se non che il punto in questione non potrà essere un punto di massimo.

La matrice A_3 ha minori principali con segno alterno, i minori principali di ordine dispari hanno segno nagativo, mentre quello di ordine 2 ha segno positivo. Ciò dice che il segno di tutti e tre gli autovalori è negativo e, per quanto riguarda la natura del punto P_3, che è di massimo.

Infine la quarta matrice ha determinante negativo e traccia positiva, per cui il punto P_4 risulta di sella.