Corsi di laurea in ingegneria aerospaziale e ingegneria meccanica
Prima prova parziale scritta di Fondamenti di Analisi Matematica II

COMPITO A

Padova, 7.11.2015

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **motivare** le risposte.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si denoti con $\tilde{\Gamma}$ la curva (illimitata) definita da

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,\middle|\, z=\frac{e^x+e^{-y}}{\sqrt{2}}\right\}\cap\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,\middle|\, x-y=0\right\}.$$

Una volta definita la curva (limitata)

$$\Gamma := \tilde{\Gamma}\cap\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2\leqslant 2\right\}$$

se ne calcoli la lunghezza. Si verifichi poi che il punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{e^{1/2}+e^{-1/2}}{\sqrt{2}}\right)\in\Gamma$ e si calcoli la retta tangente a Γ in tale punto.

2. Data la funzione

$$f:\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbf{R},\qquad f(x,y)=(x^2+y^2)\log(x^2+y^2)$$

se ne studino le curve di livello, dopodiché se ne trovino i punti critici discutendo poi l'esistenza del minimo e del massimo per f.

3. Si dica se esistono, e in tal caso si trovino, il massimo ed il minimo della funzione $f(x,y,z)=xy+z^2$ ristretta all'insieme

$$E := \left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2\leqslant 2,\ x^2+y^2\geqslant z^2+1,\ -1\leqslant z\leqslant 1\right\}.$$

Corsi di laurea in ingegneria aerospaziale e ingegneria meccanica
Prima prova parziale scritta di Fondamenti di Analisi Matematica II

COMPITO B

Padova, 7.11.2015

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **motivare** le risposte.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1 Si denoti con $\tilde{\Gamma}$ la curva (illimitata) definita da

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, 9z^2 - 16xy = 0\right\} \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2 - y = 0\right\} .$$

Una volta definita la curva (limitata)

$$\Gamma := \tilde{\Gamma} \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x \geqslant 0, x \leqslant 1, y \geqslant 0, y \leqslant 1\right\}$$

se ne calcoli la lunghezza. Si verifichi poi che il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3\sqrt{2}}\right) \in \Gamma$ e si calcoli la retta tangente a Γ in tale punto.

2. Data la funzione

$$f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}, \qquad f(x,y) = \frac{\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

se ne studino le curve di livello in A, dopodiché se ne trovino i punti critici discutendo poi l'esistenza del minimo e del massimo per f.

3. Si dica se esistono, e in tal caso si trovino, il massimo ed il minimo della funzione $f(x,y,z) = xyz^2$ ristretta all'insieme

$$E := \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 \leqslant 2,\ x^2+y^2 \leqslant z^2 - 1\right\} .$$

Soluzioni

1.A Una possibile (e la più semplice) parametrizzazione è data da

$$\gamma(t) = \left(t, t, \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{2}}\right) \qquad t \in [-1, 1]. \tag{1}$$

Calcoliamo il modulo di γ':

$$\gamma'(t) = \left(1, 1, \frac{e^t - e^{-t}}{\sqrt{2}}\right)$$

da cui

$$|\gamma'(t)|^2 = 2 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4 + \left(e^t - e^{-t}\right)^2}{2} = \frac{\left(e^t + e^{-t}\right)^2}{2}$$

Per valutare la retta tangente alla curva nel punto richiesto è sufficiente considerare $t = 1/2$ nella parametrizzazione (1) e valutare γ' in $1/2$. Una possibile forma parametrica della retta è

$$r(t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{e^{1/2} + e^{-1/2}}{\sqrt{2}}\right) + t\left(1, 1, \frac{e^{1/2} - e^{-1/2}}{\sqrt{2}}\right).$$

L'ascissa curvilinea è data da

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{t} \left(e^\tau + e^{-\tau}\right) d\tau = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{t} \left(e^\tau + e^{-\tau}\right) d\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^t - e^{-t} - e^{-1} + e\right]. \end{aligned}$$

Se ne deduce che la lunghezza di γ è data da

$$l(\gamma) = s(1) = \sqrt{2}\, e - \frac{\sqrt{2}}{e}.$$

Provando ad invertire l'espressione che definisce s (domanda facoltativa a richiesta) si ha:

$$e^t - e^{-t} = s(t) + e^{-1} - e$$

da cui

$$\operatorname{senh} t = \frac{1}{2}\left[s(t) + e^{-1} - e\right].$$

Poiché si hanno

$$\operatorname{senh} t + \cosh t = e^t \qquad \text{e} \qquad \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$$

si ricava che

$$\begin{aligned} t &= \log(\operatorname{senh} t + \cosh t) = \log\left(\operatorname{senh} t + \sqrt{1+\operatorname{senh}^2 t}\right) = \\ &= \log\left(\operatorname{senh} t + \sqrt{1+\operatorname{senh}^2 t}\right) \end{aligned}$$

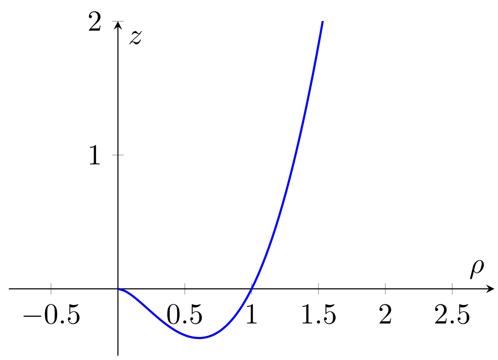
da cui

$$t(s) = \log\left(\frac{s+e^{-1}-e}{2} + \sqrt{1+\frac{(s+e^{-1}-e)^2}{4}}\right)$$

2.A La funzione è radiale: è sufficiente quindi studiare

$$g(\rho) = \rho^2 \log \rho^2 \qquad \text{con } \rho > 0\,,$$

il cui grafico è parzialmente riportato in figura.



Gli insiemi di livello sono quindi circonferenze (se il livello è positivo o nullo) o coppie di circonferenze (se il livello è negativo e non inferiore al valore $-e^{-1}$, valore minimo assunto da g). Negli altri casi, cioè per il livello inferiore a $-e^{-1}$, l'insieme è ovviamente vuoto. Un caso a parte merita il livello zero che potrebbe essere la circonferenza di raggio 1 oppure la stessa circonferenza unita a $\{(0,0)\}$ nel caso si volesse estendere f per continuità a tutto $\mathbf{R}^2$ (si veda più in basso). Derivando g si ha

$$g'(\rho) = 2\rho \log \rho^2 + 2\rho$$

che si annulla solo per $\rho^2 = e^{-1}$ ($!\rho > 0$). Questo corrisponde, per la funzione f, alla circonferenza definita da $x^2 + y^2 = \frac{1}{e}$. Infatti f ha derivate parziali date da

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x \log(x^2+y^2) + 2x \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2y \log(x^2+y^2) + 2y \end{aligned}$$

che si annullano, nel dominio dato, solo per $x^2 + y^2 = \frac{1}{e}$.
Continuando a studiare g è sufficiente fare la derivata seconda

$$g''(\rho) = 2\log\rho^2 + 4.$$

Valutandola in $\rho = 1/\sqrt{e}$ si ha che $g''(1/\sqrt{e}) > 0$, da cui $1/\sqrt{e}$ punto di minimo locale. Facendo i limiti all'infinito e nell'origine si ha facilmente che

$$\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y) = +\infty, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0\,.$$

Poiché $g(1/\sqrt{e}) < 0$ si ha che tale punto è di minimo assoluto. Di conseguenza tutti i punti che soddisfano $x^2 + y^2 = \frac{1}{e}$ sono di minimo assoluto, mentre la funzione non ha massimo.
È chiaro che, essendo radiale, la matrice hessiana in tutti i punti della circonferenza definita da $x^2 + y^2 = \frac{1}{e}$ avrà allora un autovalore positivo e uno nullo. Volendolo verificare si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2\log(x^2+y^2) + \frac{4x^2}{x^2+y^2} + 2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 2\log(x^2+y^2) + \frac{4y^2}{x^2+y^2} + 2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{4xy}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

per cui

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4ex^2 & 4exy \\ 4exy & 4ey^2 \end{pmatrix}$$

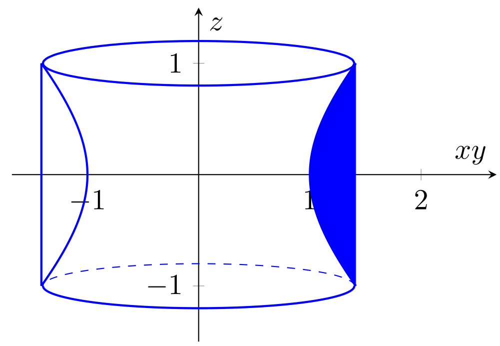
il cui determinante è zero. Poiché la traccia è positiva, un autovalore è positivo e l'altro è nullo.

Si noti come la funzione può essere estesa per continuità anche all'origine. In tale punto allora il gradiente di f (e la derivata di g) si annulla. Tale punto sarà solamente un punto di massimo locale.

3.A L'insieme E è chiuso e limitato, f è continua, per cui il minimo e il massimo esisteranno.
L'insieme E è una porzione del cilindro

$$\big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\big|\, x^2 + y^2 \leqslant 2\big\},$$

quella ottenuta ruotando idealmente attorno all'asse z la parte colorata in figura.



Derivando la funzione si vede facilmente che il gradiente non si annulla mai (in E!). La frontiera di E è data da diverse parti. Scriviamo ∂E:

$$\begin{aligned}\partial E = &\Big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\Big|\, x^2+y^2 \geqslant z^2+1,\ x^2+y^2=2\Big\} \cup \\ &\cup \Big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\Big|\, x^2+y^2 = z^2+1, x^2+y^2 \leqslant 2\Big\} \cup \\ &\cup \Big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\Big|\, x^2+y^2 = 2, z=-1\Big\} \cup \\ &\cup \Big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\Big|\, x^2+y^2 = 2, z=1\Big\}\,.\end{aligned}$$

Andiamo con ordine: parametrizziamo la prima parte della frontiera. Poiché il primo dei cinque insiemi è una parte di un cilindro di raggio $\sqrt{2}$ con la limitazione su z tra -1 e 1 lo parametrizziamo con

$$\varphi : C \to \mathbf{R}^3\,, \qquad C := (0,2\pi)\times(-1,1)\,, \qquad \varphi(\vartheta,z) = (\sqrt{2}\cos\vartheta,\ \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\vartheta, z).$$

Valutando $f\circ\varphi$ si ha

$$f\circ\varphi(\vartheta,z) = 2\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta + z^2\,.$$

Annullando le derivate di $f\circ\varphi$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \cos^2\vartheta - \mathrm{sen}^2\vartheta = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

che fornisce i quattro punti

$$P_1 = (1,1,0)\ , \qquad P_2 = (-1,1,0)\ , \qquad P_4 = (-1,-1,0)\ , \qquad P_4 = (1,-1,0)\ .$$

Consideriamo ora la seconda parte della frontiera parametrizzata da (C è lo stesso insieme di sopra, sul quale è definita φ)

$$\psi : C \to \mathbf{R}^3\,, \qquad \psi(\vartheta,z) = (\sqrt{z^2+1}\cos\vartheta,\ \sqrt{z^2+1}\,\mathrm{sen}\,\vartheta, z)\,.$$

Si ha che

$$f\circ\psi(\vartheta,z) = (z^2+1)\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta + z^2\,.$$

Annullando le sue derivate si ottiene il sistema

$$\begin{cases} (z^2+1)\big(\cos^2\vartheta - \mathrm{sen}^2\vartheta\big) = 0 \\ 2z\big(\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta + 1\big) = 0 \end{cases}$$

che fornisce i quattro punti

$$P_5 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \,, \qquad P_6 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \,,$$
$$P_7 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \,, \qquad P_8 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \,.$$

Passiamo ora ai due spigoli: il primo è parametrizzato da

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3 \,, \qquad \gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t, -1),$$

il secondo da

$$\eta : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3 \,, \qquad \gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t, -1).$$

Si osservi che

$$f \circ \gamma(t) = f \circ \eta(t) = 2 \cos t \,\mathrm{sen}\, t + 1 \,.$$

Derivando si ottiene

$$\cos^2 t - \mathrm{sen}^2 t = 0$$

che fornisce nel primo caso i quattro punti

$$P_9 = (1, 1, -1) \,, \qquad P_{10} = (-1, 1, -1) \,,$$
$$P_{11} = (-1, -1, -1) \,, \qquad P_{12} = (1, -1, -1) \,.$$

e nel secondo i quattro punti

$$P_{13} = (1, 1, 1) \,, \qquad P_{14} = (-1, 1, 1) \,,$$
$$P_{15} = (-1, -1, 1) \,, \qquad P_{16} = (1, -1, 1) \,.$$

Valutando f nei vari punti si ottiene che

$$P_9, P_{11}, P_{13}, P_{15}$$

sono di massimo (e il valore massimo è 2), mentre

$$P_2, P_4$$

sono di mimino (e il valore minimo è -1).

1.B Si osservi che $\left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x \geqslant 0, x \leqslant 1, y \geqslant 0, y \leqslant 1\right\}$ rappresenta un cilindro la cui sezione è un quadrato di vertici $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$. Si osservi inoltre che si hanno due rami uguali, uno con $z > 0$ e uno con $z < 0$, per cui è sufficiente limitarsi a valutare la lunghezza di uno dei due rami moltiplicando poi per due il risultato.
Una possibile (e la più semplice) parametrizzazione del ramo superiore è data da

$$\gamma(t) = \left(t, t^2, \frac{4}{3}t^{3/2}\right), \qquad t \in [0,1]. \tag{2}$$

Calcoliamo il modulo di γ': $\gamma'(t) = \left(1, 2\,t, 2\sqrt{t}\right)$ da cui

$$|\gamma'(t)|^2 = 1 + 4\,t^2 + 4\,t = (2t+1)^2$$

Per valutare la retta tangente alla curva nel punto richiesto è sufficiente considerare $t = 1/2$ nella parametrizzazione (2) e valutare γ' in $1/2$. Una possibile forma parametrica della retta è

$$r(t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3\sqrt{2}}\right) + t\left(1, 1, \frac{2}{\sqrt{2}}\right).$$

L'ascissa curvilinea è allora data da

$$s(t) = \int_0^t (2\,\tau + 1)\; d\tau = t^2 + t\,.$$

Se ne deduce che la lunghezza di γ è data da

$$l(\gamma) = s(1) = 2\,.$$

Provando ad invertire l'espressione che definisce s (domanda facoltativa a richiesta) si ha:

$$s(t) = t^2 + t = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

da cui

$$t(s) = \sqrt{s + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\,.$$

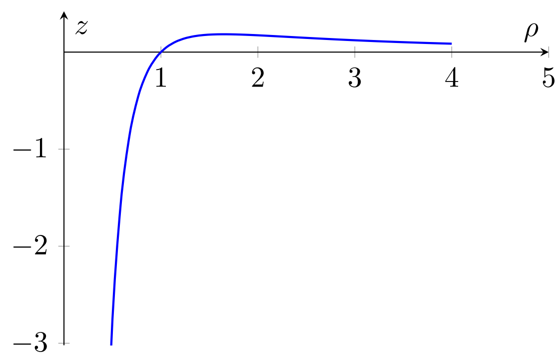
Per cui la curva parametrizzata con l'ascissa curvilinea diventa

$$s \mapsto \left(\sqrt{s + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}, s + \frac{1}{2} - \sqrt{s + \frac{1}{4}}, \frac{4}{3}\left(\sqrt{s + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right), \qquad s \in [0,2]\,.$$

2.A La funzione è radiale: è sufficiente quindi studiare

$$g(\rho) = \frac{1}{\rho^2}\log\rho^2 \qquad \text{con } \rho > 0\,,$$

il cui grafico è parzialmente riportato in figura.



Gli insiemi di livello sono quindi circonferenze (se il livello che si considera è negativo o nullo) o coppie di circonferenze (se il livello è positivo e non superiore a e^{-1}, valore massimo assunto da g). Derivando g si ha

$$g'(\rho) = \frac{2}{\rho^3}\left(1 - \log \rho^2\right)$$

che si annulla solo per $\rho^2 = e$. Questo corrisponde, per la funzione f, alla circonferenza definita da $x^2 + y^2 = e$. Infatti f ha derivate parziali date da

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x\, \frac{1 - \log(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y\, \frac{1 - \log(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

che si annullano, nel dominio dato, solo per $x^2 + y^2 = e$.
Continuando a studiare g è sufficiente fare la derivata seconda data da

$$g''(\rho) = -\frac{6}{\rho^4} + \frac{6}{\rho^4}\log \rho^2 - \frac{4}{\rho^4}.$$

Valutandola in $\rho = \sqrt{e}$ si ha che $g''(\sqrt{e}) < 0$, da cui $\sqrt{e}$ punto di massimo locale. Facendo i limiti all'infinito e nell'origine si ha facilmente che

$$\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x, y) = 0, \qquad \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = -\infty\,.$$

Poiché $g(\sqrt{e}) > 0$ si ha che tale punto è di massimo assoluto. Di conseguenza tutti i punti che soddisfano $x^2 + y^2 = e$ sono di massimo assoluto, mentre la funzione non ha minimo.
È chiaro che, essendo radiale, la matrice hessiana in tutti i punti della circonferenza definita da $x^2 + y^2 = e$ avrà allora un autovalore positivo e uno nullo. Volendolo verificare si calcolino le derivate seconde e si proceda come nella soluzione di **2.A**.

3.B L'insieme è dato da due parti sconnesse, ma chiuse e limitate, f è continua, per cui il minimo e il massimo esisteranno.
Derivando la funzione e imponendo le varie derivate uguali a zero si ottiene il sistema

$$\begin{cases} yz^2 = 0 \\ xz^2 = 0 \\ xyz = 0 \end{cases}$$

che è risolto (in E) solo dai punti $(0,0,z)$ con $1 < z^2 < 2$, cioè $z \in (-\sqrt{2}, -1)$ e $z \in (1, \sqrt{2})$.
La frontiera di E è data dall'unione dei seguenti insiemi:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 = 2,\ x^2+y^2 < z^2-1,\ z > 0\right\} \\
S_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 = 2,\ x^2+y^2 < z^2-1,\ z < 0\right\} \\
S_3 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 < 2,\ x^2+y^2 = z^2-1,\ z > 0\right\} \\
S_4 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 < 2,\ x^2+y^2 = z^2-1,\ z < 0\right\} \\
\Gamma_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 = 2,\ x^2+y^2 = z^2-1,\ z > 0\right\} \\
\Gamma_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 = 2,\ x^2+y^2 = z^2-1,\ z < 0\right\}.
\end{aligned}$$

Gli insiemi S_1 e S_3 sono grafici (come pure S_2 e S_4), S_1 una parte di superficie sferica, S_3 una parte di una falda di un iperboloide, che possono essere parametrizzati da funzioni definite nell'insieme proiezione sul piano xy sia di S_1 che di S_3, cioè nell'insieme

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 < \frac{1}{2}\right\}$$

ottenuto da $z^2 = 2 - x^2 - y^2$ e $z^2 = x^2 + y^2 + 1$. Consideriamo

$$\begin{aligned}
\varphi &: C \to S_1\,, \qquad \varphi(u,v) = (u, v, \sqrt{2-u^2-v^2})\,, \\
\psi &: C \to S_3\,, \qquad \psi(u,v) = (u, v, \sqrt{1+u^2+v^2})\,.
\end{aligned}$$

Derivando $f \circ \varphi$ si ottiene

$$\begin{cases} v(2-3u^2-v^2) = 0 \\ u(2-3v^2-u^2) = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione (in C) $u = v = 0$, che corrisponde al punto $(0,0,\sqrt{2})$.
Analogamente si trova il punto $(0,0,-\sqrt{2}) \in S_2$.
Derivando $f \circ \psi$ si ottiene

$$\begin{cases} v(1+3u^2+v^2) = 0 \\ u(1+3v^2+u^2) = 0 \end{cases}$$

che di nuovo ha come unica soluzione $u = v = 0$, che corrisponde al punto $(0, 0, 1)$ e, analogamente, in S_4 si trova il punto $(0, 0, -1)$.
Infine parametrizziamo Γ_1:

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3 \,, \qquad \gamma(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\, t, \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$$

e deriviamo $f \circ \gamma$. Otteniamo

$$\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 0$$

che fornisce i quattro punti

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right), \, P_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right), \, P_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right), \, P_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right).$$

Analogamente su Γ_2 si trovano

$$P_5 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}} \right), \, P_6 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}} \right), \, P_7 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}} \right), \, P_8 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}} \right).$$

Valutando f nei vari punti si trova che $-3/2$ è il valore minimo assunto da f nei punti P_2, P_4, P_5, P_7 e $3/2$ è il valore massimo assunto da f nei punti P_1, P_3, P_6, P_8.