Corsi di laurea in ingegneria aerospaziale e ingegneria meccanica
Prima prova parziale scritta di Fondamenti di Analisi Matematica II

Padova, 19.12.2015

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a spiegare e a **motivare** le risposte. Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Dati l'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, 2\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1 + x^2 + y^2 \right\}$$

e il campo vettoriale definito da

$$F(x, y, z) = \big(x + y^2 + z^3, 2(x^3 + y + z^2), 3(x^2 + y^3 + z)\big)$$

si determini il flusso di F attraverso la superficie ∂E orientata in modo tale che la normale sia quella esterna all'insieme E.

2. Si calcoli l'integrale

$$\iint_D \log(x + y)\, dxdy$$

dove $D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, 1 \leqslant x + y \leqslant 2, y \leqslant 2x \leqslant 2y \right\}$.

3. Si trovi il piano tangente T nel punto $(1, 1, 1)$ all'insieme

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^3 + 2y^2 - 7z^3 + 3y + 1 = 0 \right\}.$$

Dopodiché si trovi il lavoro del campo

$$F(x, y, z) = \left(\frac{z}{x - y^2 - 3}, -\frac{2yz}{x - y^2 - 3}, \log|x - y^2 - 3| \right)$$

lungo il cammino

$$\Gamma := T \cap \Sigma$$

orientato in modo tale che la sua proiezione sul piano xy risulti un cammino orientato positivamente, dove Σ è la superficie $\left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1 \right\}$.

Soluzioni

1. Innanzitutto troviamo la superficie ∂E: cercando dove si intersecano le due superfici $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ e $z = 1 + x^2 + y^2$ tramite l'uguaglianza

$$2\sqrt{x^2+y^2} = 1 + x^2 + y^2$$

si ottiene la condizione $x^2 + y^2 = 1$, per cui le due superfici possono essere viste come grafici di funzioni definite nell'insieme

$$C := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

La cosa più semplice è usare il teorema della divergenza (che vale sull'insieme E) per cui, denotata con ν la normale esterna ad E, si ha

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial E} \langle F, \nu\rangle d\sigma &= \iiint_E \operatorname{div} F(x, y, z)\, dxdydz = \\
&= \iiint_E 6\, dxdydz = \\
&= \iint_C dxdy \int_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{1+x^2+y^2} 6\, dz = \\
&= \iint_C 6\big(1 + x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2+y^2}\big)\, dxdy = \\
&= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 d\rho\, 6\big(1 + \rho^2 - 2\rho\big)\rho = \\
&= 12\,\pi \int_0^1 \big(\rho + \rho^3 - 2\rho^2\big)\, d\rho = 12\,\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right) = \pi\,.
\end{aligned}$$

2. Utilizziamo il cambio di variabili

$$u := x + y, \qquad\qquad v := \frac{y}{x}$$

(analogamente si possono scegliere $u := x + y,\ v := \dfrac{x}{y}$ e tale scelta porta allo stesso risultato, e non sono gli unici cambi possibili). Ricaviamo x e y in funzione delle nuove variabili. Sostituendo

$$y = vx$$

nella prima equazione si ottiene

$$u = x(1 + v)$$

da cui

$$x = \frac{u}{1+v}, \qquad y = \frac{vu}{1+v} \qquad \text{con } u \in [1, 2],\ v \in [1, 2].$$

La matrice jacobiana di questo cambio di variabili è

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+v} & -\dfrac{u}{(1+v)^2} \\ \dfrac{v}{1+v} & \dfrac{u}{(1+v)^2} \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $\dfrac{u+uv}{(1+v)^3} = \dfrac{u}{(1+v)^2}$. Di conseguenza l'integrale richiesto è

$$\begin{aligned} \iint_D \log(x+y)\,dxdy &= \int_1^2 du \int_1^2 dv \frac{u\log u}{(1+v)^2} = \\ &= \int_1^2 du\, u\log u \left[-\frac{1}{(1+v)}\right]\Big|_1^2 = \\ &= \frac{1}{6}\int_1^2 du\, u\log u = \\ &= \frac{1}{6}\left[\frac{u^2}{2}\log u\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{u}{2}\,du\right] = \\ &= \frac{1}{6}\left[2\log 2 - 1 + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{3}\log 2 - \frac{1}{8}\,. \end{aligned}$$

3. Usiamo il teorema delle funzioni implicite e consideriamo il luogo degli zeri della funzione

$$F(x,y,z) = x^3 + 2y^2 - 7z^3 + 3y + 1$$

al quale il punto $(1,1,1)$ appartiene. Valutando il gradiente di F si ha

$$\nabla F(x,y,z) = (3x^2, 4y+3, -21z^2)$$

da cui $\nabla F(1,1,1) = (3,7,-21)$, perciò il luogo degli zeri di F intorno al punto $(1,1,1)$ è grafico di una funzione delle prime due variabili, di una funzione delle ultime due variabili e anche di una funzione della prima e dell'ultima variabile. Scegliendo, ad esempio, di vedere tale luogo di zeri come il grafico di una funzione f delle prime due variabili si avrà che

$$F\big(x,y,f(x,y)\big) = 0 \qquad \text{per } (x,y) \text{ in un intorno di } (1,1).$$

Il piano tangente cercato è allora

$$z = 1 + \frac{3}{21}(x-1) + \frac{7}{21}(y-1) \tag{1}$$

che può essere anche scritto più semplicemente

$$3(x-1) + 7(y-1) - 21(z-1) = 0.$$

Si osservi come questa scrittura non è altro che

$$\Big\langle \nabla F(1,1,1), (x-1, y-1, z-1) \Big\rangle = 0.$$

Passiamo ora al calcolo del lavoro. Prima di tutto si osservi che il cammino è chiuso: è l'intersezione di una superficie cilindrica con un piano, per cui risulterà una ellisse nello spazio. Inoltre il campo è irrotazionale ed è definito nelle due regioni

$$D_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x < y^2 + 3\right\},$$
$$D_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x > y^2 + 3\right\},$$

che sono connesse e semplicemente connesse e in ognuna delle due regioni esisterà un potenziale. Poiché il campo è conservativo in D_1 e in D_2 e, in particolare, il cammino Γ è contenuto in D_1 il lavoro lungo il cammino è nullo.

Volendo trovare il potenziale, non necessario ai fini del calcolo del lavoro per quanto osservato precedentemente, questo sarà

$$f(x,y,z) = z\log(x - y^2 - 3) + c_1 \quad \text{in } D_1\,,$$
$$f(x,y,z) = z\log(y^2 + 3 - x) + c_2 \quad \text{in } D_2\,.$$