§8.2 Successioni e serie, numeriche e di funzioni–potenze

Il simbolo **Es:** significa la presenza di una o più domande a cui ancora non si è data una risposta o per motivi di tempo o perché non si è riusciti nell'intento

Sovente è riportata la fonte dell'esercizio il cui svolgimento può essere diverso da quello presente in queste pagine

L'ordine degli esercizi non è dato né per difficoltà né per argomento. Il presente capitolo non è a livello elementare. In generale gli esercizi richiedono una buona conoscenza della teoria delle serie esposta nei normali libri di testo.

1.8.2 Trovare la somma della serie: $\sum_{n=1}^{+\infty}((n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}))^{-1}$ [R.: 1, [S] pag.88]
2) Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ [R.: 1, [K] pag.107]
3) Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{n^2+k^2}$ [Suggerimento: utilizzare $\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=n\int_0^n\frac{dx}{x^2+n^2}$. R.: $\frac{\pi}{4}$, da [B] pag.49 e [K] pag.107]
4) Sapendo che $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n=\gamma$ (γ è la costante di Eulero), trovare la costante c tale che $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-c\ln n$ è finito e trovare tale limite [R.: $c=\frac{1}{2}$, $\ln 2+\frac{\gamma}{2}$, da [B] pag.51]
5) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n(4n^2-1)}$ [R.: $2\ln 2+1$, da [B] pag.51]
6) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-)^{k-1}}{k}$ [R.: $\ln 2$, da [B] pag.56]
7) Dimostrare che $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-)^k}{x+k}$ converge per ogni valore di x che non rende nullo nessuno dei denominatori [da [B] pag.66]
8) Dimostrare che $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+8}+\ldots$ diverge per ogni valore di x [da [B] pag.66]
Dimostrare che $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+8}+\ldots$ diverge per ogni valore di x [da [B] pag.66]
9) Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2})$ [R.: $\frac{1}{2}$, da [K] pag.107]
10) Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^n$ [R.: $\frac{e}{e-1}$, da [K] pag.107 e [B] pag.528]
11) Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}((n+1)(n+2)\ldots(n+n))^{1/n}$ [R.: $\frac{4}{e}$, da [K] pag.107]
12) Calcolare $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[n\ln(\frac{2n+1}{2n-1})-1\right]$ [R.: $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$, da [B] pag.526. Sarà opportuno usare la formula di Stirling $n!\sim n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+O(n^{-1}))$]
13) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty}(-)^{k-1}\frac{2k+1}{k^2+k}$ [R.: 1, da [K] pag.149. Si scomponga in fratti semplici]
14) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}\right)$ [R.: $\frac{3}{2}\ln 2$, da [K] pag.135. Si usi l'esercizio num. 4]
15) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(4k^2-1)}$ [R.: $2\ln 2-1$, da [B] pag.51. Si usi l'esercizio num. 4]
16) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(9k^2-1)}$ [R.: $\frac{3}{2}(\ln 3-1)$, da [B] pag.51. Si usi l'esercizio num. 4]
17) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(36k^2-1)}$ [R.: $-3+\frac{3}{2}\ln 3+2\ln 2$, da [B] pag.52. Si usi l'esercizio num. 4]
18) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{12k^2-1}{k(4k^2-1)^2}$ [R.: $2\ln 2$, da [B] pag.52. Si usi l'esercizio num. 4]
19) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{(4k^2-1)^2}$ [R.: $\frac{1}{8}$, da [B] pag.52. Si usi l'esercizio num. 4]
20) Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(4k^2-1)^2}$ [R.: $\frac{3}{2}-2\ln 2$, da [B] pag.51. Si usi l'esercizio num. 4]
21) Calcolare $\int_0^1\left\{\frac{1}{x}\right\}dx$ [R.: $1-\gamma$]
22) Calcolare $\int_0^1\left\{\frac{1}{x}\right\}\left\{\frac{1}{1-x}\right\}dx$ [R.: $2\gamma-1$. Problema U21 di *Mathematical Reflections* n.4 2006,]
23) Calcolare la serie $\sum_{k=2}^{\infty}(-)^k\frac{\ln k}{k}$ [da: *M.S.Klamkin A.M.M.* Vol.62, No.8 (Oct., 1955), 588 R.: $\gamma\ln 2-\frac{1}{2}\ln^2 2$. γ è la costante di Eulero]

2.8.2 Sia data la serie $\sum a_k$.
- $\overline{\lim}|\frac{a_{k+1}}{a_k}|=l<1$ la serie converge (test di D'Alembert)
- Se esiste k_0 tale che $k>k_0\ \Rightarrow\ |\frac{a_{k+1}}{a_k}|\geq 1$ la serie diverge
- Se $\lim\ |\frac{a_{k+1}}{a_k}|=l>1$ la serie diverge

• Se $\overline{\lim}\ |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = l > 1$ non si può trarre conclusione. Tale fatto fa sì che il criterio del rapporto è meno "preciso" del criterio della radice.
• Se $\underline{\lim}\ |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = l > 1$ la serie diverge
• Se $\underline{\lim}\ |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = l < 1$ non si può trarre conclusione.
• Se $\overline{\lim}\ |a_k|^{1/k} = l < 1$ $\sum a_k$ converge (test di Cauchy)
• Se $\overline{\lim}\ |a_k|^{1/k} = l > 1$ $\sum a_k$ diverge (test di Cauchy)

3.8.2 Data una qualsiasi successione di numeri positivi $\{a_k\}$ si ha: se $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k}$ esiste allora esiste $\lim a_k^{1/k}$ e $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim a_k^{1/k}$. Dare un esempio in cui non esiste $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k}$ ma esiste $\lim a_k^{1/k}$
• Dimostrare che $\underline{\lim}\ \frac{a_{k+1}}{a_k} \le \underline{\lim}\ a_k^{1/k}$,
• Dimostrare che $\overline{\lim}\ a_k^{1/k} \le \overline{\lim}\ \frac{a_{k+1}}{a_k}$
Ne segue che $\underline{\lim}\ \frac{a_{k+1}}{a_k} \le \underline{\lim}\ a_k^{1/k} \le \overline{\lim}\ a_k^{1/k} \le \overline{\lim}\ \frac{a_{k+1}}{a_k}$

4.8.2 **Teorema di Abel:** Dopo avere dimostrato che $\sum_{k=1}^n a_kb_k = a_nB_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k' B_k$ dove $B_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n b_i$ e $a_k' \stackrel{\text{def}}{=} a_{k+1} - a_k$, si dimostri il risultato
Sia $a_k \searrow 0$ e $\sum_{k=0}^n b_k$ limitata per ogni n. Allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_kb_k$ converge
• si dia un esempio di successioni $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ tale che $a_k \to 0$ in modo non monotono, $\sum_{k=0}^n b_k$ limitata per ogni n e $\sum a_kb_k$ non converge.
• Sia data una successione $\{a_k\}$ tale che $\sum ka_k$ converge. Dimostrare che $\sum a_k$ converge.

5.8.2 Sia $\sum a_k$ convergente e $m_{k+1} \ge m_k$, $\lim_{k\to+\infty} m_k = +\infty$. Allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{m_n}\sum_{k=1}^n a_km_k = 0$ [[B] pag.66]

6.8.2 Sia $a_k > 0$ e $\sum a_k$ convergente. Dimostrare che esiste $b_k \nearrow +\infty$ e $\sum a_kb_k$ converge [da *G.E.Šilov Analisi Matematica, funzioni di una variabile* edizioni Mir 1978, pag.215; Osservazione: se fosse $b_k \ge 0$ e $\sum b_k < +\infty$ non ci sarebbe nulla da dimostrare grazie al fatto che $\sum a_kb_k \le \sum a_k \cdot \sum b_k$]
• Sia $a_k > 0$ e $\sum a_k = +\infty$. Trovare una successione $b_k \searrow 0$ e $\sum a_kb_k = +\infty$. È evidente che la stessa soluzione si avrebbe se $a_k \to +\infty$ vedi `rich.2` (`rich.1`)

7.8.2 Dimostrare che: se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge al valore A, $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ converge al valore B, almeno una delle due serie converge assolutamente, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ con $c_n = \sum_{k=0}^n a_kb_{n-k}$ converge ad $A\cdot B$.
Dimostrare che il prodotto della serie $\sum \frac{(-)^k}{\sqrt{k}}$ per se stessa è una serie divergente (da cui segue che il prodotto di due serie semiconvergenti non è detto converga).

8.8.2 (**Cauchy**) Sia $a_k \searrow 0$. Allora la serie $\sum a_k$ converge se e solo se converge la serie $\sum 2^k a_{2^k}$ (`rich.3`)
• dare un esempio di successione positiva $\{a_k\}$ che tende a zero in modo non monotono tale che $\sum a_k$ converge e $\sum 2^k a_{2^k}$ non converge
• dare un esempio di successione positiva $\{a_k\}$ che tende a zero in modo non monotono tale che $\sum a_k$ non converge e $\sum 2^k a_{2^k}$ converge

9.8.2 Sia $\{a_k\}$ monotona. Dimostrare che anche $2^k a_{2^k}$ è monotona ovvero trovare un controesempio. [da: *R.W.Hamming A.M.M.* Vol.52, No.2 (Feb., 1945), 70–72]

10.8.2 Dimostrare ovvero trovare un controesempio alla seguente affermazione: sia $\sum a_k$ una serie convergente (quindi $a_k \to 0$). Allora converge pure la serie $\sum a_k^2$

11.8.2 Si dimostri : $a_k > 0$ $\sum a_k < \infty$ $\Rightarrow$ $\lim_{k\to+\infty} ka_k = 0$. Altrimenti si dia un controesempio. (`rich.5`)

12.8.2 Sia $a_k > 0$. Dimostrare che se la serie $\sum a_k$ converge allora converge pure la serie $\sum \frac{\sqrt{a_k}}{k}$. È vera la affermazione se si toglie l'ipotesi che $a_k > 0$ e si considera $\sum \frac{\sqrt{|a_k|}}{k}$?

13.8.2 Sia $a_k > 0$. Dimostrare che se $\sum a_k$ converge, converge pure $\sum \sqrt{a_k a_{k+1}}$. Il viceversa non è vero e si dia un controesempio nella cui ricerca è utile avere presente che se $a_k \searrow 0$ allora $\sqrt{a_k a_{k+1}} \geq a_{k+1}$ e quindi se converge $\sum \sqrt{a_k a_{k+1}}$ converge pure $\sum a_k$

14.8.2 Sia $a_k > 0$. Dimostrare che se $\sum a_k$ converge, converge pure $\sum (a_k^{-1} + a_{k+1}^{-1})^{-1}$. Il viceversa non è vero e si dia un controesempio. È utile tenere presente la stessa osservazione dell'esempio precedente.

15.8.2 Dimostrare il seguente risultato: sia $a_k, b_k > 0$ e inoltre, definitivamente in k $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$. Allora se $\sum b_k$ converge, converge pure $\sum a_k$.

16.8.2 Sia $a_k > 0$. Dimostrare che la serie $\sum a_k$ converge se e solo se converge la serie $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$

17.8.2 Sia $a_k > 0$. Studiare che relazione intercorre fra la convergenza o la divergenza della serie $\sum a_k$ e la divergenza o convergenza delle serie: 1) $\sum \frac{a_k}{1+k^2 a_k}$, 2) $\sum \frac{a_k}{1+a_k^2}$ 3) $\sum \frac{a_k}{1+k a_k}$. In quest'ultimo caso dimostrare che se $a_k \searrow 0$, e la serie $\sum a_k$ diverge, diverge pure la serie $\sum \frac{a_k}{1+k a_k}$.

18.8.2 (**Abel, Dini**) Sia $a_k > 0$. Dimostrare che la serie $\sum a_k$ converge se e solo se converge la serie $\sum \frac{a_k}{S_k}$ dove $S_k = a_1 + \ldots + a_k$. (`rich.8`)

• Dimostrare che $\sum \frac{a_k}{S_k^{1-\delta}}$, $\delta > 0$, converge se e solo se converge $\sum a_k$

19.8.2 (**Abel, Dini**) Sia $a_k > 0$. Dimostrare viceversa che la serie $\sum \frac{a_k}{S_k^{1+\delta}}$ converge sempre se $\delta > 0$

20.8.2 Sia data una funzione $f(x) \searrow 0$ e una serie $\sum a_k = +\infty$ tale che $a_k > 0$. Allora $\int^{+\infty} f(x)dx < +\infty \Rightarrow \sum a_k f(S_k) < +\infty$ e $\int^{+\infty} f(x)dx = +\infty \Rightarrow \sum a_k f(S_{k-1}) = +\infty$ [[B] pag.49, esercizio num.7].

• Si dia un esempio di $f \searrow 0$ e serie positiva divergente $\sum a_k$ tale che $\int^{+\infty} f(x)dx = +\infty$ e $\sum a_k f(S_k) < +\infty$.

• Si dia un esempio di $f \searrow 0$ e serie positiva divergente $\sum a_k$ tale che $\int^{+\infty} f(x)dx < +\infty$ e $\sum a_k f(S_{k-1}) = +\infty$.

21.8.2 Sia $f(x) > 0$. Allora $\sum \frac{a_k}{f(S_k)}$ diverge *per qualsiasi serie positiva divergente* $\sum a_k$ se e solo se $f(x) = O(x)$ per $x \to +\infty$ [da: *A.Torchinsky; Leon Gerber; M.J.Pelling A.M.M.* Vol.84, No.2 (Feb., 1977), 138–139]

22.8.2 Sia data una funzione $f(x) \searrow 0$ e una serie $\sum a_k = +\infty$ tale che $a_k > 0$. Sia inoltre verificata una delle seguenti tre proprietà : 1) a_k limitata, 2) $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ limitata, 3) $\frac{S_{k+1}}{S_k}$ limitata. Allora $\int^{+\infty} f(x)dx < +\infty \iff \sum a_k f(S_k) < +\infty$ [da: *C.T.Rajagopal A.M.M.* Vol.48, No.3 (Mar., 1941), 180–185;]

• Il risultato implica il seguente: se $D_{n+1} > D_n$, $D_0 = 0$, $\lim_{n\to+\infty} D_n = +\infty$, e $D_n - D_{n-1} = O(1)$ allora $\sum (D_n - D_{n-1}) f(D_n)$ converge se e solo se converge $\int^{+\infty} f(x)dx$ [da: *J.E.Littlewood Messenger of mathematics* Vol.39, (Mar., 1910), 191–192;]

23.8.2 Sia data una funzione $f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$ e sia $F(x) = \sup_{y\geq x} f(y)$. Allora $\sum a_k f(S_k) < +\infty$ *per qualsiasi serie positiva divergente* $\sum a_k$ se e solo se esiste $\alpha \geq 0$ tale che $\int_\alpha^{+\infty} F(x)dx < +\infty$ [da: *A.Torchinsky; Leon Gerber; M.J.Pelling A.M.M.* Vol.84, No.2 (Feb., 1977), 138–139; la parte "se" dell'esercizio risolve la prima parte dell'esercizio n.7, [B] pag.49]

24.8.2 (**Abel, Dini**) Sia $a_k > 0$ e $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$. Dimostrare che la serie $\sum \frac{a_k}{R_k}$ diverge.

• Dimostrare inoltre che la serie $\sum \frac{a_k}{R_k^{1+\delta}}$ diverge per ogni $\delta > 0$

• Dimostrare inoltre che la serie $\sum \frac{a_k}{R_k^{1-\delta}}$ diverge per ogni $\delta > 0$

25.8.2 Dimostrare ovvero trovare un contoesempio alla seguente affermazione: sia $\sum a_k$ una serie convergente e sia b_k una serie tale che $\lim_{k\to+\infty}\frac{a_k}{b_k}=1$. Allora converge pure la serie $\sum b_k$

26.8.2 *Senza fare ricorso agli integrali*, dimostrare che $\sum_{k=1}^{+\infty}k^{-p}$ converge se e solo $p>1$ (si supponga di conoscere la serie geometrica $\sum_{k=0}^{+\infty}x^k$ con $|x|<1$).

27.8.2 Senza far uso del Teorema di Leibnitz, dimostrare che la serie $\sum\frac{(-)^k}{k}$ converge.

28.8.2 Dimostrare il seguente risultato: sia $a_k>0$. Se $\lim_{k\to+\infty}\frac{a_k}{b_k}=l\neq 0$, allora $\sum a_k$ converge se e solo se $\sum b_k$ converge.

29.8.2 Dimostrare il seguente risultato: sia $a_k>0$. Se $\overline{\lim}_{k\to+\infty}\frac{a_k}{b_k}=l\neq 0$, allora $\sum a_k$ converge se e solo se $\sum b_k$ converge.
• Dare un esempio di successioni positive $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ tali che $\sum a_k<+\infty$, $\sum b_k<+\infty$, $\lim_{k\to+\infty}\frac{a_k}{b_k}$ non esiste. Si consideri anche il caso di successioni monotone.

30.8.2 (**Criterio di Raabe**) Dimostrare il seguente risultato: sia $a_k>0$ tale che $\frac{a_{k+1}}{a_k}=1-\frac{\alpha}{k}E(k)$ con $\lim_{k\to+\infty}E(k)=1$. Se $\alpha>1$ la serie $\sum a_k$, è convergente mentre se $\alpha<1$ la serie $\sum a_k$ è divergente. Se $\alpha=1$ il criterio non dice nulla e quindi esistono casi in cui $\sum a_k$ diverge ($a_k=\frac{1}{k}$) e casi in cui converge ($a_k=\frac{1}{k\ln^2 k}$) (`rich.6`)
• Dire sotto quali condizioni converge la serie $1+\frac{(1+\alpha)}{(1+\beta)}+\frac{(1+\alpha)(1+2\alpha)}{(1+\beta)(1+2\beta)}+\frac{(1+\alpha)(1+2\alpha)(1+3\alpha)}{(1+\beta)(1+2\beta)(1+3\beta)}\ldots=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Pi_{i=0}^{k}(1+i\alpha)}{\Pi_{i=0}^{k}(1+i\beta)}$ [da [B] pag.48]
• Ad eccezione di $\alpha=1$, trovare per quali α la serie converge oppure diverge $\sum_{k=1}^{+\infty}\Pi_{i=1}^{k}(2-e^{\frac{\alpha}{i}})$ [da *G.Pòlya–G.Szegö – Problems and Theorems in Analysis I* Springer–Verlag Ed. pag.36, per α=1 anche in [B] pag.49
• Dimostrare che per $b>a+1$ converge la serie $1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Pi_{k=0}^{n}(a+k)}{\Pi_{k=0}^{n}(b+k)}$ e la somma è pari a $\frac{b-1}{b-a-1}$ (Suggerimento: detto $a_n:=\frac{\Pi_{k=0}^{n}(a+k)}{\Pi_{k=0}^{n}(b+k)}$ scrivere $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ e poi maneggiare quanto ottenuto per ottenere $v_n-v_{n+1}\ldots$ con v_n opportuna). Dimostrare che per $b<a+1$ la serie diverge. Per $b=a+1$ il criterio non dice nulla e bisogna usare il **criterio di Gauss**.
• Dimostrare che per $b>a+2$ converge la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{\Pi_{k=0}^{n}(a+k)}{\Pi_{k=0}^{n}(b+k)}$ e la somma è pari a $\frac{ab-a}{(b-a-1)(b-a-2)}$ [Suggerimento: si scriva la serie come differenza di due serie del tipo della precedente; da [B] pag.48]

31.8.2 (**Criterio di Gauss**) Dimostrare il seguente risultato: sia $a_k>0$ tale che $\frac{a_{k+1}}{a_k}=1-\frac{\alpha}{k}+\frac{f(k)}{k^s}$, $s>1$, $|f(k)|<A$. Se $\alpha>1$ la serie $\sum a_k$ converge mentre se $\alpha\leq 1$ la serie $\sum a_k$ diverge.
• Dire per quali $x\geq 0$ converge e diverge la serie $\sum(1-\frac{x}{n}\ln n)^n$
• Dire se converge oppure diverge la serie $\sum_{k=1}^{+\infty}\Pi_{i=1}^{k}(2-e^{\frac{1}{i}})$ [R.: da [B] pag.49]
• Dire se convergono le serie (la prima con $0<a<1$ e la seconda al variare di k e N intero) $\sum_{j=k}^{+\infty}\binom{j}{k}e^{-j^{-a}}$, $\sum_{j=k}^{+\infty}\binom{j}{k}\frac{1}{j^N}$,
• Dimostrare che diverge la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Pi_{k=0}^{n}(a+k)}{\Pi_{k=0}^{n}(a+1+k)}$
• Dire se converge o diverge al variare di $a>0$, e $b>0$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Pi_{k=1}^{n}(a+k\ln k)}{\Pi_{k=1}^{n}(b+k\ln k)}$

32.8.2 Sia $a_n\searrow 0$ e $\sum a_n$ convergente. Ne segue $\lim\limits_{n\to+\infty}na_n=0$. Utilizzare tale risultato per dimostrare che $\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-1-\frac{1}{n}}$ diverge (`rich.7`)
• Sia p_n una successione tendente a $+\infty$ lentamente quanto si vuole. Dimostrare che esiste una successione positiva monotona convergente a_n tale che p_na_nn non tende a zero.

33.8.2 Sia $\{a_k\}$ monotona e positiva tale che $\sum a_k$ converge. Se anche $\{2^ka_{2^k}\}$ è monotona, allora $\lim\limits_{k\to+\infty}ka_k\ln(k)=0$ [da: *R.W.Hamming A.M.M.* Vol.52, No.2 (Feb., 1945), 70–72]

• Sia p_n una successione tendente a $+\infty$ lentamente quanto si vuole. Dimostrare che esiste una successione positiva monotona convergente a_n tale che $2^n a_{2^n}$ è anche essa monotona e $p_n a_n n \ln n$ non tende a zero [È interessante notare che la questione viene affrontata in una nota a pié pagina in [K] pag.303. Inoltre l'autore sembra non confutare il fatto che verso la fine del 1860, si ritenesse $na_n \ln n$ condizione necessaria per la convergenza]

34.8.2 Sia $a_n \searrow 0$. Dimostrare che $\sum a_k$ converge se e solo se converge $\sum k(a_k - a_{k+1})$ [si veda: 1) [B] pag.514 dove si dice testualmente ≪ *the convergence of* $\sum n(a_n - a_{n+1})$ *can be deduced from that of* $\sum a_n$≫ e 2) [Ba1] pag.6 doce c'è solo il teorema per cui la divergenza di $\sum a_k$ implica la divergenza di $\sum n(a_n - a_{n+1})$.;]

Dal precedente risultato si ricava pure il seguente: $a\geq 0$, e $\sum a_k = a$, allora, detta $\sum^k a_k = S_k$, si ha $\sum(a - S_k)$ converge se e solo se converge $\sum k a_k$. Basta considerare $a - S_k$ al posto della a_k precedente [Problema E 2902 Linn Sennott]

• Togliendo l'ipotesi che a_k sia monotona ma mantenendo il fatto che $a_k \to 0$ e $a_k > 0$, si diano i due controesempi: $\sum a_k < +\infty$ ma $\sum k(a_k - a_{k+1})$ non converge e $\sum a_k = +\infty$ ma $\sum k(a_k - a_{k+1})$ convergente

35.8.2 Si dia un esempio di due serie divergenti $\sum a_k$ e $\sum b_k$, $a_k > 0$, $a_k \to 0$, $b_k > 0$, $b_k \to 0$ tale che ma $\sum \min\{a_k, b_k\}$ converge.

• Si risolva l'esercizio precedente con $\alpha_k \searrow 0$ e $b_k \searrow 0$.

36.8.2 Data una qualsiasi successione $a_k \searrow 0$ tale che $\sum a_k = +\infty$, trovare due successioni $d_k > 0$ e $d'_k > 0$, $d_k \geq d_{k+1}$, $d'_k \geq d'_{k+1}$, tale che $\sum d_k = +\infty$ e $\sum d'_k = +\infty$ dove $a_k \geq b_k = \min\{d_k, d'_k\}$ e $\sum b_k$ converge. [da: *P.Ungar; A.Novikoff* – *A.M.M.* Vol.56, No.6 (Jun.–July., 1949), 423–424]

37.8.2 Dimostrare che data una qualsiasi serie convergente $\sum c_k$, $c_k \geq c_{k+1} > 0$, si possono trovare due serie divergenti $\sum a_k$, $a_k \geq a_{k+1} > 0$, e $\sum b_k$, $b_k \geq b_{k+1} > 0$, tali $c_k = \min\{a_k, b_k\}$. [Osservazione: La soluzione del presente esercizio immediatamente consente di risolvere il precedente. da: 1) *P.Ungar; A.Novikoff* – *A.M.M.* Vol.56, No.6 (Jun.–July., 1949), 423–424, 2) *D. McLean; R.Poppen* – *A.M.M.* Vol.81, No.9 (Nov., 1974), 1029, 3) *I.J.Schoenberg* – *A.M.M.* Vol.94, No.7 (Aug.–Sept., 1987), 693]

38.8.2 Sia $\sum d_k = \sum d'_k = +\infty$, con $0 < d_{k+1} \leq d_k$ tale che $\sum \min\{d_k, d'_k\} < +\infty$. Allora vale $\overline{\lim}(kd_k)^{-1} = +\infty$ e $\overline{\lim}(kd'_k)^{-1} = +\infty$

• Data una successione $d_k \geq d_{k+1} > 0$ tale che $\sum d_k = +\infty$ e tale che $\overline{\lim}(kd_k)^{-1} = +\infty$, trovare una successione $d'_k > 0$ tale che $\sum d'_k = +\infty$ e $\sum \min\{d_k, d'_k\} < +\infty$.

L'esercizio è diverso dal precedente perché il punto di partenza è l'esistenza di d_k che diverge e non $\sum c_k$ che converge. Inoltre delle due serie divergenti che si trovano, una è esattamente d_k.

• Dall'esercizio si deduce che, data una serie divergente $\sum d_k$ a termini positivi e decrescenti, condizione necessaria e sufficiente perché esista una serie divergente $\sum d'_k$ a termini positivi tale che $\sum \min\{d_k, d'_k\} < +\infty$ è che $\overline{\lim}(kd_k)^{-1} = +\infty$. [da: 1) *P.Ungar; A.Novikoff* – *A.M.M.* Vol.56, No.6 (Jun.–July., 1949), 423–424]

39.8.2 Sia m_k, $m_0 = 0$ una successione strettamente crescente di interi. Dire se converge o diverge la serie $\sum \frac{m_k - m_{k-1}}{m_k}$.

• Si studi lo stesso problema nell'ipotesi che gli m_k siano positivi, strettamente crescenti ma una quantità infinita di essi non sia intero (volendo si può pensare che siano tutti non interi) [da *H.E. Chrestenson; W.C. Waterhouse; R.H. Breusch; J.L. Brown,Jr.; Albert Wilansky* – *A.M.M.* Vol.67, No.10 (Dec.,1960), 1029–1030]

• Sia $m_k \nearrow +\infty$. Dimostrare che la serie $\sum \frac{m_{k+1} - m_k}{m_k^{p-1} m_{k+1}}$ converge se $p > 1$.

• Supponendo che $m_k > 0$ e $\lim_{k\to+\infty} m_k = 0$ si dimostri che $\sum \frac{m_k - m_{k-1}}{m_k}$ diverge oppure si trovi un esempio per cui converge.

• Supponendo che $m_k > 0$ e $\lim_{k\to+\infty} m_k$ non esista, si dimostri che $\sum \frac{m_k - m_{k-1}}{m_k}$ può divergere oppure convergere.

40.8.2 Sia $a_k \searrow 0$. Dire se convergono oppure divergono le serie $\sum \frac{a_k - a_{k+1}}{a_{k+1}}$ e $\sum \frac{a_k - a_{k+1}}{a_k}$

41.8.2 Sia $a_k \searrow 0$. Si dimostri che converge la serie $\sum \frac{a_k - a_{k+1}}{a_{k+1}^p}$ e $\sum \frac{a_k - a_{k+1}}{a_k^p}$ per ogni $p < 1$.

42.8.2 Sia $d_k \nearrow +\infty$. Trovare una serie convergente $\sum c_k$ tale che $\sum c_k d_k$ diverge. [La soluzione è quella di [B] pag.47 che però *non implica* la monotonia di c_k. Senza la monotonia di d_k la dimostrazione di [B] non funziona e bisogna ricorrere alla dimostrazione dell'esercizio `rich.1` in cui si usa l'ipotesi $\sum d_k = +\infty$ e che consente di trovare c_k monotona. $\sum d_k = +\infty$ del resto è gratis dal fatto che $d_k \nearrow +\infty$.] (`rich.2`)

43.8.2 Sia $a_k \searrow 0$. Trovare una serie divergente $\sum d_k$ tale che $\sum a_k d_k$ converge [La soluzione è quella di [B] pag.47 e [K] pag.302 (paragrafo 9) Se si avesse $\sum a_k$ convergente, indipendentemente dal fatto che a_k sia monotona, si potrebbe usare la soluzione dell'esercizio `rich.1` che dà una $\{d_k\}$ monotona].

• Sia $a_k \to 0$, $a_k \geq 0$ e $\sum a_k = +\infty$. Trovare una serie divergente $\sum d_k$ tale che $\sum a_k d_k$ converge oppure fornire un esempio di successione $\{a_k\}$ per la quale non è possibile trovare una $\{d_k\}$ con le richieste citate. Nel paragrafo 10 a pag. 302 di [K], si afferma che è possibile trovare $\{d_k\}$ a partire da $\{a_k\}$ (lì è p_n) ma si fa riferimento alla dimostrazione del paragrafo 9 in cui $\{p_n\}$ *è monotona.*

44.8.2 Sia $a_k \searrow 0$. Trovare due successioni positive e monotone, c_k e d_k tali che $\sum c_k < +\infty$, $\sum d_k = +\infty$ e $c_k = a_k d_k$ [da 1) *Aryeh Dvoretzky – A.J. of M.* Vol.70, No.1 (Jan., 1948), 167–173)]

45.8.2 Si dica per quali valori di a converge la serie $\sum_{k=2}^{+\infty} k^{-1-\frac{1}{(\ln k)^a}}$

46.8.2 Dimostrare che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}$ converge per qualsiasi valore di x ma che la convergenza è uniforme solo nell'intervallo $0 < x \leq x_o < 2\pi$. (`rich.9`)
Dimostrare che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos kx}{k}$ converge per qualsiasi valore di $x \neq 0$

47.8.2 Dimostrare che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\sin kx|}{k}$ converge solo per x multiplo di π
[da *R.S.Underwood; H.Tate – A.M.M.* Vol.45, No.6 (June. – Jul., 1938), 393–394]

48 8.2 Sia $a_0(x) = x$, $a_n(x) = \sin_n(x) \overset{\text{def}}{=} \sin(\sin(\sin \ldots \sin))(x)$ $0 < x < \pi$ (composizione n volte).
• Dire se convergono le due serie $S_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x)$ e $S_2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-)^k a_k(x)$ [da *Nickolas Konopoli; D.C.B.Marsh – A.M.M.* Vol.68, No.5 (May, 1961), 507–508]
• Dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{3}{n}}a_n(x) = 1$ (come conseguenza si ha la divergenza della serie $S_1(x)$) [da *G.Pòlya–G.Szegö – Problems and Theorems in Analysis I* Springer–Verlag Ed. pag.38]

49.8.2 Dare due serie $\sum \frac{1}{a_k}$ e $\sum \frac{1}{a_k - 1}$ con $a_k \neq 0, 1$ tale che una sia convergente mentre l'altra divergente [da *R.D. Carmichael; E.B.Wilson – A.M.M.* Vol.21, No.10 (Dec.,1914), 334–335]

50.8.2 Sia: $a_k > 0$, $S_n = \sum^n a_k$, $\overline{\lim} S_n = L$, $\underline{\lim} S_n = l$, $l \neq L$ (L può essere $+\infty$). Dimostrare che $\{S_n\}$ è denso nell'intervallo (l, L) ossia $\overline{\{S_n\}} = [l, L]$. [da *G.Pòlya–G.Szegö – Problems and Theorems in Analysis I* Springer–Verlag Ed. pag.23]

51.8.2 Data $a_k > 0$, e detta $A_n = \sum_k^n a_k$, sappiamo che se $\sum a_k$ diverge allora diverge pure $\sum \frac{a_k}{A_k}$. Sia ora $B_{k+1} > B_k > 0$ tale che $\sum \frac{a_k}{B_k} = +\infty$. Detta $M_k = \max\{A_k, B_k\}$ si dimostri che $\sum \frac{a_k}{M_k} = +\infty$ [da *Paul Erdos; N.J.Fine; J.B.Kelly – A.M.M.* Vol.58, No.6 (Jun. – Jul., 1951), 425–426]

52.8.2 **Es:** Siano: 1) $a_k > 0$, $A_n = \sum_k^n a_k$, $\lim_{n\to+\infty} A_n = +\infty$ 2) $\{g_k\}$ una successione tale che $g_k \to +\infty$ e $\sum \frac{a_k}{A_k g_k} = +\infty$. Mostrare che esiste una successione non decrescente $f_n \leq f_{n+1}$ tale che $\sum \frac{a_k}{f_k} = +\infty$, ma $\sum \min\{\frac{a_k}{A_k g_k}, \frac{a_k}{f_k}\} < +\infty$, [da *Paul Erdos; N.J.Fine; J.B.Kelly – A.M.M.* Vol.58, No.6 (Jun. – Jul., 1951), 425–426]

53.8.2 Sia $\{q_k\}$ l'insieme degli interi la cui espressione decimale non contiene la cifra 9. Dire se converge o diverge la serie $\sum q_k^{-1}$ [da *G.E.Šilov Analisi Matematica, funzioni di una variabile* edizioni Mir 1978, pag.216]

54 .8.2 Sia $d_k \to 0$ (eventualmente monotona), $d_k > 0$, $\sum d_k = +\infty$. Definire una serie

convergente $\sum c_k$, $c_k \geq 0$, tale che per infiniti k si abbia $c_k \geq d_k$. Si consideri anche il caso in cui $\overline{\lim}\frac{c_k}{d_k} = +\infty$. L'interesse dell'esercizio consiste nel fatto che d_k può andare a zero lentamente quanto si vuole.
Si tenga presente che per avere $\sum c_k$ convergente è necessario che $\underline{\lim}\frac{c_k}{d_k} = 0$. [da 1) *R.W. Hamming – A.J. of M.* Vol.68, No.1 (Jan., 1946), 133–136, 2) *Aryeh Dvoretzky – A.J. of M.* Vol.70, No.1 (Jan., 1948), 167–173)]

55.8.2 Sia $d_k \geq d_{k+1} > 0$, $\sum d_k = +\infty$. Sia I_k una sottosuccessione crescente di numeri naturali. Dimostrare che se $\frac{I_k}{k}$ è limitata allora $\sum d_{I_k} = +\infty$. Viceversa, data $\frac{I_k}{k}$ non limitata, costruire una serie $\sum \tilde{d}_{I_k}$ convergente mentre $\sum \tilde{d}_k = +\infty$ con $\tilde{d}_k \geq \tilde{d}_{k+1}$. [da 1) *R.W. Hamming – A.M.M.* Vol.54, No.8 (Oct., 1947), 462–463, 2) *R.W. Hamming – A.M.M.* Vol.54, No.6 (Jun.–Jul., 1948), 360]

56.8.2 Si trovi una successione $\{a_k\}$ tale che $\sum a_k$ converge ma $\sum sgn(a_k)|a_k|^a$ diverge per ogni $a > 0$, $a \neq 1$. L'interesse dell'esercizio nasce dal fatto che gli esempi di serie convergenti ma non assolutamente prodotti nei testi d'analisi sono tali che $\sum sgn(a_k)|a_k|^a$ converge sempre se $a > 0$ (si pensi alla serie di Leibnitz $\sum \frac{(-)^k}{k}$ oppure $\sum \frac{(-)^k}{\ln k}$) [da *G.R.MacLane; R.J.Driscoll; O.P.Lossers – A.M.M.* Vol.76, No.9 (Nov.,1969), 1073]

57.8.2 Sia $\ln_{(k)}(x) = \ln\ln\ln\ldots\ln(x)$ (composizione di k volte il logaritmo). Sia $P(x)$ il prodotto di x e di quei fattori $\ln_{(k)}(x)$ tali che $\ln_{(k)}(x) > 1$. Dimostrare che la serie $\sum(P(n))^{-1}$ diverge. La serie è interessante in quanto $\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{n\ln_{(k)}(n)} = +\infty$ qualsiasi sia il valore di k. Questo vuol dire che la serie diverge più lentamente di qualunque serie della forma $\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$, $\sum \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$, $\sum \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))\ln(\ln(\ln(n)))}$, etc. Ciascuna delle precedenti serie è divergente ma la successiva diverge più lentamente della precedente. Ebbene la serie $\sum \frac{1}{P(n)}$ diverge più lentamente di ciascuna delle precedenti. [da *R.P.Agnew A.M.M.* Vol.54, No.5 (May.,1947), 273–274]

58.8.2 Studiare la convergenza delle seguenti serie: $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$, $\sum \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}$, $\sum n^{-a-\frac{b}{n}}$, $\sum \frac{n^q}{(n+1)^{p+q}}$, $\sum(\ln n)^{-n}$, $\sum(\ln n)^{-\ln n}$, $\sum(\ln(\ln n))^{-\ln n}$; $\sum \frac{n^n}{e^n n!}$ $\sum \frac{n^n}{e^n(n+1)!}$, $\sum \frac{n^{n-1}}{e^n n!}$, $\sum(\ln n)^{-\ln(\ln n)}$,

• Dimostrare oppure confutare con un esempio: se $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$ allora la serie $\sum n^{-1-f(n)}$ diverge.

59.8.2 Studiare la convergenza della serie $\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{k^k}{k!e^k} - \frac{1}{\sqrt{2\pi k}})$ [problema num. 10832 *D.E.Knuth A.M.M.* Vol.107, (2000), p.863]

60.8.2 Dire per quale valore di α converge o diverge la serie $\sum|\sin k|^\alpha$.

• Dire se converge o diverge la serie $\sum(\sin k)^k$ [rispettivamente da *E.O.Thorp; Julius Vogel A.M.M.* Vol.71, No.1 (Jan.,1964), 97 e *J.R.Holdsworth; J.R.Smith; John B.Kelly A.M.M.* Vol.65, No.9 (Nov.,1958), 718–719]

• **Es:** Dire se converge o diverge la serie $\sum \frac{(\sin k)^k}{k}$

61.8.2 Dire in quali insiemi converge puntualmente, assolutamente, uniformemente e totalmente la serie $\sum \frac{(-)^k}{k}e^{-kx}$

• a) Dare una successione di funzioni continue su $[-1,1]$ che converge uniformemente ma non totalmente ad una funzione (continua ovviamente).

62.8.2 Dimostrare il seguente teorema (**Dini**): sia $K \subset \mathbf{R}$ compatto e $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue tale che $f_n \nearrow f$ con f continua. Allora $f_n \to f$ uniformemente. Naturalmente il teorema rimane valido se $f \searrow f$.

• Dare esempi di successioni di funzioni non uniformemente convergenti che verificano tutte le ipotesi del teorema precedente tranne una.

63.8.2 Sia data una successione di funzioni continue $\{f_n\}$, $f_n\colon E \to \mathbf{R}$ con E compatto, convergenti puntualmente a una funzione continua f e tale che $f_n\colon E \to \mathbf{R}$ è monotona per ogni n.

Allora la convergenza è uniforme

64.8.2 Una successione di funzioni continue $\{f_n\}$, $f_n\colon E\to\mathbf{R}$, è detta *equicontinua* se $\forall\,\varepsilon\;\exists\,\delta:\;|x-y|<\delta\;\Rightarrow\;|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon\;\forall\,n$ (praticamente δ non deve dipendere da n)
Dimostrare i tre teoremi che seguono:
• Se f_n converge per ogni $x\in D\subset E$ con $\overline{D}=E$ allora f_n converge per ogni valore di $x\in E$.
• Con un esempio si faccia vedere che se manca la equicontinuità , allora non è detto vi sia convergenza su tutto E
• Se E è compatto e f_n converge per ogni $x\in E$ allora la convergenza è uniforme.
• Con un esempio si faccia vedere che se manca la equicontinuità , allora non è detto vi sia convergenza uniforme

65.8.2 **Es:** Dire in quali insiemi convergono (che tipo di convergenza) le seguenti serie di potenze: 1) $\sum\frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)}z^{n-1}$, $a,b\neq 0,-1,-2,\ldots$
2) $\sum\frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)}{n!c(c+1)(c+2)\ldots(c+n-1)}z^n$, $a,b,c\neq 0,-1,-2,\ldots$

66.8.2 Sia $a_k\geq 0$. Se $f(t)=\sum a_kt^k\leq C$ per ogni $0\leq t<1$ allora esiste il limite $t\to 1$ e vale $\sum a_k$.
• **Es:** Si trovino dei controesempi nel caso venga a mancare l'ipotesi che $a_k\geq 0$ ma $|\sum a_kt^k|\leq C$ per ogni $0\leq t<1$ oppure che $a_k\geq 0$ ma $\sum a_kt^k$ è illimitata per $0\leq t<1$.

67.8.2 Si dimostri il seguente Teorema (**Abel**): *Se la serie* $\sum a_kt^k$ *converge per* $t=t_1$, *converge uniformemente in* $0\leq t\leq t_1$.

68.8.2 Sia $f(t)$ una funzione continua per $0\leq t\leq t_1$ tale che $f(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kt^k$ per $0\leq t<t_1$. Allora se la serie $\sum_{k=0}^{+\infty}a_kt_1^k$ converge si ha $f(t_1)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kt_1^k$ [Suggerimento: si usi il teorema precedente]

69.8.2 **Es:** Sia data la serie di potenze $\sum a_kz^k$ con $a_k>0$ il cui raggio di convergenza è 1. Si dimostri che $z=1$ è un punto di singolarità della serie di potenze (Teorema di Pringsheim) [[K] pag.30, [M] pag.389]

70.8.2 Dire per quali valori reali di a e b converge o diverge la serie $\sum\frac{\sin n}{n^a+b\sin n}$ [[B] pag.514]

71.8.2 Dire per quali valori di $a\in\mathbf{R}$, $a\neq 2$ la serie $\sum_k\frac{1}{k^{a+\sin k}}$ converge oppure diverge. Si dica inoltre se converge o diverge la serie $\sum k^{-1-|\sin k|}$ [da *P.Perfetti A.M.M.* Vol.112, No.6 (Jun.,2005), problema num. 11162]

72.8.2 La serie $\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\sin\ln\ln k}{k\ln k}$ non converge

73.8.2 Sia $d_k\to+\infty$. Allora è possibile trovare una successione monotona convergente $\{c_k\}$ tale che $kd_kc_k\geq\alpha>1$ per infiniti k (anche $\overline{\lim}kd_kc_k=+\infty$)

74.8.2 Dare un esempio di serie monotona convergente a termini positivi a_k tale che $na_n\ln n$ non ammette limite. Se ammette limite esso è chiaramente zero [da: *R.W.Hamming A.M.M.* Vol.52, No.2 (Feb., 1945), 70–72]
• Sia p_n una successione tendente a $+\infty$ lentamente quanto si vuole. Allora esiste una successione positiva, monotona convergente a_n, con $2^na_{2^n}$ monotona, tale che $p_na_nn\ln n$ non tende a zero.

75.8.2 Dopo avere dimostrato che converge, trovare la somma della serie
$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+m)(h+m+1)\ldots(k+n)}\quad n-m\geq 1$

76.8.2 Sia $a_k\geq 0$. Dimostrare che converge la serie $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)}$ e trovarne la somma [[B] pag.25, [K] pag.267]

77.8.2 **Es:** Sia data la serie $\sum\frac{n^{a-1}}{a+n^\beta\sin(n\pi\lambda)}$. Si dimostri che con $a>0$ la serie diverge sempre se λ è razionale. Se λ è un irrazionale algebrico di ordine m allora converge per $\beta>a+2m$. Dimostrare che qualunque sia il valore di β, esistono numeri irrazionali λ tali che la serie diverge [[B] pag.515]

78 .8.2 **Es:** Dire se converge o meno la serie $\sum_k \frac{\sin(k\ln\ln k)}{k\ln k}$ [La non convergenza della serie implicherebbe che la seguente serie divergente in ogni punto (Steinhaus, 1929) $\sum \frac{\sin k(x-\ln\ln k)}{\ln k}$ *non è una serie di Fourier*. Dimostrare che la serie di Steinhaus non è di Fourier sembra essere un problema aperto a dispetto del fatto che A.Zygmund, nel suo libro, lo affermi chiaramente. Per un approfondimento della materia si può consultare l'appendice sulle serie trigonometriche]

79.8.2 Dimostrare che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)m+1} + \ldots + \frac{1}{km-1} - \frac{x}{km}$ converge per un sol valore di x. Trovare tale valore e calcolare la somma della serie [da: *T.K.Leong; T.A.Peng; K.C.Yeo; T.J.Cullen* Esercizio num. 2244 di *A.M.M.* Vol.78, No.5 (May., 1971), 547–548]

80.8.2 Dimostrare che le serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k^2x)\sin kx}{k}$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k^2x)\sin kx}{k}$ convergono uniformemente. Dimostrare inoltre che $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k^2x)\cos kx}{k}$ converge per alcuni punti e diverge per altri. [da: *O.E.Stanaitis; E.M.Wright* Problema num. 4536 di *A.M.M.* Vol.61, No.7 (Aug.–Sep., 1954), 480–481]

Si dimostri che $\sum \cos(k^2x)$ diverge $\frac{x}{\pi}$ è razionale.

81.8.2 Si consideri la serie armonica $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ e si definisca una nuova serie in cui ai primi p elementi fanno seguito i secondi p con il segno cambiato e così via. Si dimostri che la serie converge.

82.8.2 Si determini la convergenza della serie ottenuta dalla serie armonica prendendo il primo elemento con il segno più , il secondo e terzo con il segno meno, il quarto, quinto e sesto con il segno più eccetera [da: *E.P.Starke; R.P.Stephens; Fritz Herzog A.M.M.* Vol.56, No.4 (Apr., 1949), 263–265]

83.8.2 Si determini la convergenza della serie costruita sulla stessa falsariga della precedente ma ottenuta raggruppando 2^k termini ogni volta [da: *E.P.Starke; R.P.Stephens; Fritz Herzog A.M.M.* Vol.56, No.4 (Apr., 1949), 263–265]

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

1.8.2 razionalizzando la serie diventa $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big) = 1$

• 2) Basta osservare che $\displaystyle\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

• 3) $\displaystyle\int_0^n \frac{dx}{x^2+n^2} = \sum_{j=0}^{n-1}\int_j^{j+1}\frac{dx}{x^2+n^2}.\ \frac{1}{n^2+(j+1)^2} \le \int_j^{j+1}\frac{dx}{x^2+n^2} \le \frac{1}{n^2+j^2}$ e quindi

$$n\sum_{j=0}^{n-1}\int_j^{j+1}\frac{dx}{x^2+n^2} \le \sum_{j=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+j^2} \le \frac{1}{n} + n\sum_{j=1}^{n-1}\int_{j-1}^{j}\frac{dx}{x^2+n^2} = \frac{1}{n} + \sum_{j=0}^{n-1}\int_j^{j+1}\frac{dx}{x^2+n^2}$$
$$-n\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^2+n^2}.$$

Ne segue

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} \le \sum_{j=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+j^2} \le \frac{1}{n} + \int_0^1\frac{dx}{x^2+1} - n\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^2+n^2}$. Il risultato è quindi $\frac{\pi}{4}$

• 4) $\displaystyle\Big(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \ln(2n)\Big) + \ln(2n) - \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\Big) - \frac{1}{2}\ln n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$ ossia $\displaystyle\Big(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \ln(2n)\Big) + \ln 2 - \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\Big) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\ln n$ e quindi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2}\ln n\Big) = \ln 2 + \frac{1}{2}\gamma$

• 5) $\displaystyle\frac{1}{k(4k^2-1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{2k-1} + \frac{C}{2k-1}$ da cui $A=-1$, $B=C=1$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{A}{k} - \ln n = \gamma + \alpha_n$ con

$\alpha_n \to 0$. $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{B}{2k-1} - \frac{1}{2}\ln n = \ln 2 + \frac{1}{2}\gamma + \alpha_n'$ con $\alpha_n' \to 0$. $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{C}{2k+1} - \frac{1}{2}\ln n + 1 + \frac{1}{2n+3} =$ $\ln 2 + \dfrac{1}{2}\gamma + \alpha_n'$ con $\alpha_n' \to 0$. Alla fine si ottiene $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(4k^2-1)} = -\ln n - \gamma + \frac{1}{2}\ln n + \ln 2 +$ $\dfrac{1}{2}\gamma + \dfrac{1}{2}\ln n - 1 - \ln 2 + \dfrac{1}{2}\gamma + \tilde{\alpha}_n$ che tende a $2\ln 2 - 1$

• 6) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n} - (1 + \frac{2}{4} + \frac{2}{6} + \frac{2}{8} + \ldots + \frac{2}{2n})$ da cui $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-)^{k+1}}{k} = \ln(2n) + \gamma + \alpha_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(2n) + \gamma + \alpha_n - \ln n - \gamma - \alpha_n'$ da cui il limite è $\ln 2$.

• 7) Si tratta di una serie di Leibnitz.

• 8) Si fa vedere che $\dfrac{1}{x+k} + \dfrac{1}{x+k+1} - \dfrac{1}{x+k+2} \geq \dfrac{C_x}{k}$ definitivamente in k. Per la divergenza basta far vedere che $\exists\ \varepsilon > 0 \colon \forall\ n\ \exists\ n_2 > n_1 \geq n \colon \displaystyle\sum_{k=n_1}^{n_2} a_k \geq \varepsilon$ (a_k è l'elemento generico della serie). Prendiamo ora $n_1 = n$, $n_2 = 3Nn + n + 2$ ottenendo $\displaystyle\sum_{k=n}^{3Nn+n+2} a_k = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} +$ $\displaystyle\sum_{n+3}^{3Nn+n+2} a_k \geq \sum_{j=1}^N \frac{C_x}{k} - \frac{3}{n} \geq 1$ se n e N sono abbastanza grandi.

• $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} - \frac{1}{x+8} + \ldots$. Si procede allo stesso modo di prima. Stavolta $\left|\dfrac{1}{x+k} - \dfrac{1}{x+k+1} - \dfrac{1}{x+k+2}\right| = \dfrac{k^2 + 2xk + x^2 - 2}{(x+k)(x+k+1)(x+k+2)} \geq \dfrac{C_x}{k}$

• 9) $\ln(1 + \frac{k}{n^2}) = \frac{k}{n^2} + O(\frac{k^2}{n^4})$ per cui $\displaystyle\sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{k}{n^2}) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} + \sum_{k=1}^n O(\frac{k^2}{n^4}) \to \frac{1}{2}$ (la parte con O tende a zero chiaramente).

• 10) $\displaystyle\sum_{k=1}^n (\frac{k}{n})^n = \sum_{r=0}^{n-1} (1 - \frac{r}{n})^n$. Se potessimo passare al limite sotto il segno di serie otterremmo $\displaystyle\sum_{r=0}^{+\infty} e^{-r} = \frac{e}{e-1}$. Usiamo le ben note relazioni $(1 - \frac{r}{n})^{n+1} < e^{-r} < (1 - \frac{r}{n})^n$ per scrivere
$$0 \leq \sum_{r=0}^{n-1} \Big((1 - \frac{r}{n})^n - e^{-r}\Big) \leq \sum_{r=0}^{n-1} \Big((1 - \frac{r}{n})^n - (1 - \frac{r}{n})^{n+1}\Big) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{r}{n-r}(1 - \frac{r}{n})^{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r}{n-r} e^{-r} =$$
$$\sum_{r=0}^{[n^{1/4}]} \frac{r}{n-r} e^{-r} + \sum_{[n^{1/4}]}^{n-1} \frac{r}{n-r} e^{-r} \leq \frac{[n^{1/4}]([n^{1/4}]+1)}{n - [n^{1/4}]} + \frac{n}{n - [n^{1/4}]} e^{-[n^{1/4}]}$$
e per $n \to +\infty$ tende a zero da cui il risultato.

• 11) Con ovvi calcoli si arriva a $\dfrac{1}{n}\big((n+1)(n+2)\cdots(2n)\big)^{\frac{1}{n}} = \exp\{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{k}{n})\}$. L'esponente è pari a $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \int_0^{\frac{k}{n}} \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{n}\Big(n\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{dx}{1+x} + (n-1)\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{dx}{1+x} + \ldots + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \frac{dx}{1+x}\Big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (n-k+$ $\displaystyle 1)\ln\frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{k-1}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (n-k+1)\ln(1 + \frac{1}{n+k-1}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (n-k+1)\Big(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(n+k-1)^2} +$

$O(\frac{1}{(n+k-1)^3})\Big)$. Dopo facciamo vedere che
$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n\Big(-\frac12\frac{(n-k+1)}{(n+k-1)^2}+O(\frac{(n-k+1)}{(n+k-1)^3})\Big)=0.$
$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n\frac{n-k+1}{n+k-1}=\frac1n\sum\limits_{k=n}^{2n-1}\frac{2n-k}{k}=2\sum\limits_{k=n}^{2n-1}\frac1k-1=2\ln(2n)+\alpha_{2n}-\ln(n-1)+\alpha_{n-1}-1$ (α_{2n-1} e α_{n-1} sono quantità che tendono a zero) e quindi otteniamo $2\ln\frac{2n-1}{n-1}-1=2\ln 2+2\ln\frac{1-\frac{1}{2n}}{1-\frac1n}-1=\ln 4-1+\varepsilon_n$ dove $\varepsilon_n\to 0$ per $n\to+\infty$ e quindi il risultato $\frac4e$
Ora mostriamo che $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n\Big(-\frac12\frac{(n-k+1)}{(n+k-1)^2}+O(\frac{(n-k+1)}{(n+k-1)^3})\Big)=0$. Consideriamo solo il primo limite e poniamo $n-k=t$ da cui $\sum\limits_{k=1}^n\frac{(n-k+1)}{(n+k-1)^2}=\sum\limits_{m=0}^{n-1}\frac{m+1}{(2n-m-1)^2}$ ed inoltre $2n-m-1\ge 2n-n+1-1=n$. Di conseguenza si ha $\sum\limits_{m=0}^{n-1}\frac{m+1}{(2n-m-1)^2}\le\sum\limits_{m=0}^{n-1}\frac{1}{n^2}(m+1)=\frac{1}{n^2}(n-1)\frac{n+2}{2}\le\frac{1}{n^2}n^2=1$. Per il contributo con $O(\frac{(n-k+1)}{(n+k-1)^3})\Big)$ la stessa stima comporta un fattore $1/n$. È evidente che il limite fa zero.

• 12) $\sum\limits_{k=1}^n\big[k\ln(\frac{2k+1}{2k-1})-1\big]=\sum\limits_{k=1}^n\big(k\ln(2k+1)-(k-1)\ln(2k-1)\big)-\sum\limits_{k=2}^n\ln(2k-1)-n=n\ln(2n+1)-n-\ln(3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1))=n\ln(2n+1)-n-\ln\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)}=n\ln(2n+1)-n+(n-1)\ln 2-\ln(2n-1)!+\ln(n-1)!$. Usiamo ora la formula di Stirling e lo sviluppo in serie del logaritmo naturale tralasciando, quando necessario, i temini che vanno a zero.
$(n\ln 2+n\ln n+\frac12)-n+(n\ln 2-\ln 2)+\big(-(2n-1)(\ln 2+\ln n)-(2n-1)(-\frac{1}{2n})+2n-1-\frac12\ln 2-\frac12\ln n\big)+\big((n-1)\ln n-(n-1)\frac1n-n+1\big)+\frac12\ln n$
si ottiene
$2n\ln 2+n\ln n-n+\frac12-\ln 2-(2n-1)(\ln 2+\ln n)+\frac{(2n-1)}{2n}+2n-1-\frac12\ln 2-\frac12\ln n+(n-1)\ln n-\frac{n-1}{n}-n+1+\frac12\ln n=\frac12(1-\ln 2)+O(n^{-1})$
Un altro modo consiste nello scrivere il termine generico della somma tramite l'integrale $\int_0^1\frac{x^2dx}{4n^2-x^2}$

• 14) $\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{4k-3}=1+\frac15+\frac19+\ldots=1+\frac15+\frac19+\ldots+(\frac13+\frac17\ldots)-(\frac13+\frac17\ldots)=\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{4k-3}+\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{4k-1}-\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{4k-1}=\big(1+\frac13+\frac15+\frac17+\ldots+\frac{1}{4n-1}\big)-\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{4k-1}$ per cui $\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}=\big(1+\frac13+\frac15+\frac17+\ldots+\frac{1}{4n-1}\big)-\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{2k}$ ed asintoticamente tale formula è pari a $\frac12(\ln(2n-1)+\gamma)+\ln 2-\frac12\ln n-\frac{\gamma}{2}$ che tende al valore $\frac32\ln 2$

• 15) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(4k^2-1)}=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k-1}-\frac1k)$; $\quad\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k-1}-\frac1k)=\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{2}{2k-1}-$

$\frac{1}{k}) - 1 - \frac{1}{2n+1} = \ln n + \gamma + 2\ln 2 + o(1) - 1 - \frac{1}{2n+1} - \ln n - \gamma + o(1)$ ed il limite è chiaramente $2\ln 2 - 1$

• 16) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(9k^2-1)} = \sum_{k=1}^{n}(\frac{3}{2}\frac{1}{3k+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{3n-1}\frac{3}{2}\frac{1}{k} - \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \frac{3}{2}(\ln 3 + \ln n + \gamma_{3n+1}) - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma_n) - \ln n - \gamma_n$ che nel limite dà il risultato.

• 17) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(36k^2-1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{3}{6k-1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{3}{6k+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 3\sum_{k=1}^{6n+1}\frac{1}{k} - \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{k} - 3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\frac{1}{2k-1} - 3 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 3(\ln 2 + \ln 3 + \ln n + \gamma_{6n+1}) - \frac{3}{2}(\ln 3 + \ln n + \gamma_{3n} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\gamma_n + \ln 2) - 3 - \ln n - \gamma_n)$

e nel limite si ottiene $2\ln 2 + \frac{3}{2}\ln 3 - 3$

• 18) $\sum_{k=1}^{n} \frac{12k^2}{k(4k^2-1)} = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{k})$. La somma è riscrivibile come $1 - \frac{1}{(2n+1)^2} + \Big(-1 + \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big) + \Big(\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = -\frac{1}{(2n+1)^2} + \ln(2n+1) + \gamma_{2n+1} + \ln(2n-1) + \gamma_{2n-1} - \frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\gamma_n - \frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\gamma_n - \ln n - \gamma_n$ e nel limite si ottiene $2\ln 2$.

• 19) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(4k^2-1)^2} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2}$ da cui il valore del limite usando il fatto che è una serie telescopica

• 20) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(4k^2-1)^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2(2k-1)^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2(2k+1)^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} = \ln n + \gamma_n + \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma_n + \frac{1}{2} - \ln(2n+1) - \gamma_{2n+1} + 1 + \frac{1}{2}(\ln n + \gamma_n) - \ln(2n) - \gamma_{2n} + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\gamma_n$ che nel limite dà il risultato.

• 21) Per $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$ si ha $n \leq \frac{1}{x} < n+1$ e quindi $[\frac{1}{x}] = n$. Dunque $\int_0^1 \{\frac{1}{x}\}dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}(\frac{1}{x} - k)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\Bigg(\big(\ln(k+1) - \ln k\big) - k(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})\Bigg) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\ln(n+1) - n + \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\ln(n+1) - n + n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + 1\Big) = \ln(n+1) + 1 - (\ln(n+1) + \gamma_{n+1})\Big) = 1 - \gamma$

• 22) Conviene osservare che, detta $f(x) = \{\frac{1}{x}\}\{\frac{1}{1-x}\}$, si ha $f(\frac{1}{2} - x) = f(\frac{1}{2} + x)$ e quindi $\int_0^1 f(x) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 2\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}(\frac{1}{x} - k)(\frac{1}{1-x} - 1)dx = 2\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}(\frac{1-k}{1-x} + k)dx = 2\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\Big((1-k)\big(\ln(1 - \frac{1}{k+1}) - \ln(1 + \frac{1}{k})\big) + k(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})\Big)$. A parte il limite, le somme sono date da

$$2\sum_{k=2}^{n}(1-k)\big(\ln k - \ln(k+1) - \ln k + \ln k\big) + \frac{1}{k+1}\Big) =$$

$= 2\sum_{k=2}^{n}\Big(k\ln(k+1)-(k-1)\ln k-\ln(k+1)\Big)-2\sum_{k=2}^{n}\Big(k\ln k-(k-1)\ln(k-1)-\ln k+2\frac{1}{k+1}\Big)=$
$= 2\Big(n\ln(n+1)-\ln 2-\sum_{k=2}^{n}\ln(k+1)-n\ln n+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\ln k\Big)+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1}\Big)=$
$= 2\Big(n\ln(n+1)-n\ln n-\ln 2-\ln(n+1)+\ln 2+2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-2(1+\frac{1}{2})\Big)=$
$= 2n\ln(n+1)-2n\ln n-2\ln(n+1)+2\ln(n+1)+2\gamma_{n+1}-3=2n\ln(1+\frac{1}{n})+2\gamma_{n+1}-3$ e nel limite si ottiene $2\gamma-1$

• 23) $\sum_{k=2}^{2p}(-)^k\frac{\ln k}{k}=\sum_{k=1}^{p}\frac{\ln(2k)}{2k}-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\ln(2k+1)}{2k+1}=\sum_{k=1}^{p}\frac{\ln 2}{2k}+\sum_{k=1}^{p}\frac{\ln k}{2k}-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\ln(2k+1)}{2k+1}$;
$-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\ln(2k+1)}{2k+1}=-\sum_{k=2}^{2p-1}\frac{\ln k}{k}+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\ln(2k)}{2k}=-\sum_{k=2}^{2p-1}\frac{\ln k}{k}+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\ln 2}{2k}+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\ln k}{2k}$; sommando i vari pezzi si ottiene $\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\ln 2}{k}+\frac{\ln 2}{2p-2}+\frac{\ln p}{2p}-\sum_{k=p}^{2p-1}\frac{\ln k}{k}=\ln 2(\ln(p-1)+\gamma)-\int_p^{2p-1}\frac{\ln x}{x}dx+o(1)=$ $\ln 2(\ln p+\gamma)-\frac{1}{2}\ln(2p^2-p)\ln(2-\frac{1}{p})+o(1)$ e nel limite si ottiene il risultato.

2.8.2

• Dalla definizione di limite superiore si ha che $\inf_n\sup_{k>n}|\frac{a_{k+1}}{a_k}|=l<1$. Sia $A_n\overset{\rm def}{=}\sup_{k>n}\frac{a_{k+1}}{a_k}$ e quindi $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_\varepsilon:\ l\le A_{n_\varepsilon}<l+\varepsilon$. Poiché $l<1$, ε si può prendere così piccolo che $l+\varepsilon<1$ e quindi $|\frac{a_{k+1}}{a_k}|<l+\varepsilon<1$ per ogni $k>n_\varepsilon$. Come conseguenza si ha $|\frac{a_{k+n}}{a_k}|=|\frac{a_{k+n}}{a_{k+n-1}}\frac{a_{k+n-1}}{a_{k+n-2}}\dots\frac{a_{k+1}}{a_k}|\le(l+\varepsilon)^n$ e quindi $|a_{k+n}|\le(l+\varepsilon)^n|a_k|$. La serie converge per confronto con una serie geometrica convergente.

• Con lo stesso ragionamento si ottiene $|a_{k+n}|\ge|a_k|$ per ogni $n\ge n_0-k$ e quindi non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza.

• Sia $\lim|\frac{a_{k+1}}{a_k}|=l>1$ e quindi $\frac{a_{k+1}}{a_k}\ge l-\varepsilon>1$ *per ogni* $k>k_\varepsilon$ e di nuovo ne segue la violazione della condizione necessaria per la convergenza.

• Sia ora $\overline{\lim}\,|\frac{a_{k+1}}{a_k}|=l>1$. Rispetto a prima ora abbiamo che *frequentemente* si ha $|\frac{a_{k+1}}{a_k}|\ge 1$ ma da questo *non segue* che la serie non converge. Se infatti $\lim|\frac{a_{k+1}}{a_k}|=\overline{\lim}\,|\frac{a_{k+1}}{a_k}|=l>1$ allora la serie diverge. Si può però dare un esempio di serie convergente per cui $\lim|\frac{a_{k+1}}{a_k}|$ non esiste e $\overline{\lim}\,|\frac{a_{k+1}}{a_k}|=l>1$. L'esempio è preso [da *W.Rudin* *Principles of Mathematical Analysis* pag. 67 MacGrow Hill Book–Company 1964]

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\dots$ e si ha $\underline{\lim}\,\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to+\infty}(\frac{2}{3})^k=0,\quad \overline{\lim}\,\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to+\infty}(\frac{3}{2})^k=+\infty,\quad \overline{\lim}\,a_k^{1/k}=\lim_{k\to+\infty}(2^{-k})^{1/(2k)}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \underline{\lim}\,a_k^{1/k}=\lim_{n\to+\infty}(3^{-k})^{1/(2k)}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

• Se $\underline{\lim}\,\frac{a_{k+1}}{a_k}>1$ significa che definitivamente si ha $\frac{a_{k+1}}{a_k}\ge l>1$ e quindi $|\frac{a_{k+n}}{a_k}|=|\frac{a_{k+n}}{a_{k+n-1}}\frac{a_{k+n-1}}{a_{k+n-2}}\dots\frac{a_{k+1}}{a_k}|\ge l^n$ per $k\ge k_0$ e quindi si ha divergenza.

• Se $\underline{\lim}\,\frac{a_{k+1}}{a_k}<1$ non si può trarre conclusione. Infatti se si ha $\lim\frac{a_{k+1}}{a_k}<1$ allora $\underline{\lim}\,\frac{a_{k+1}}{a_k}<1$ e convergenza. Viceversa la serie $1+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\dots$ diverge e $\underline{\lim}\,\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{1}{2}$.

Chiaramente la precedente serie ha $\overline{\lim}\ \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ perché altrimenti convergerebbe.

• Sia $\overline{\lim}\ |a_k|^{1/k} = l < 1$ e quindi *per ogni k grande abbastanza* si ha $|a_k| \leq (l+\varepsilon)^k$ con $l+\varepsilon < 1$. La serie converge per confronto con la serie geometrica.

• Sia $\overline{\lim}\ |a_k|^{1/k} = l > 1$ e quindi, *frequentemente* si ha $|a_k| \geq 1$ da cui la violazione della condizione necessaria di convergenza.

3.8.2 1) Sia $L = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ e supponiamo che L è finito. Per definizione sappiamo che $k > k_\varepsilon \ \Rightarrow\ a_k(L-\varepsilon) < a_{k+1} < (L+\varepsilon)a_k$ da cui segue $a_{n-1}(L-\varepsilon)^2 < a_{n+1} < (L+\varepsilon)^2 a_{n-1}$ con $n-1 > k_\varepsilon$ e quindi $a_{k_\varepsilon}(L-\varepsilon)^{n-k_\varepsilon} < a_n < (L+\varepsilon)^{n-k_\varepsilon} a_{k_\varepsilon}$ che è come dire $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k^{1/k} = L$ in quanto possiamo scrivere $a_{k_\varepsilon}^{1/n}(L-\varepsilon)^{1-\frac{k_\varepsilon}{n}} < a_n^{1/n} < (L+\varepsilon)^{1-\frac{k_\varepsilon}{n}} a_{k_\varepsilon}^{1/n}$.

Se $L-\varepsilon < 0$ si scrive $0 < a_n < (L+\varepsilon)^{n-k_\varepsilon} a_{k_\varepsilon}$ e il discorso continua a valere.

Se $L = +\infty$ allora $k > k_\varepsilon \ \Rightarrow\ a_{k+1} > Ma_k$ e quindi $a_n > M^{n-k_\varepsilon} a_{k_\varepsilon}$ da cui $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k^{1/k} = +\infty$.

Naturalmente se esiste $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k^{1/k}$ non è detto che esista $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$. Si prenda la successione

$$a_k = \begin{cases} 1 & k \neq n^2 \\ 1/2 & k = n^2 \end{cases}$$

• Sia $L = \overline{\lim} a_k^{1/k}$ e quindi $L = \inf\limits_n \sup\limits_{k>n} a_k^{1/k}$. Sia $L_n = \sup\limits_{k>n} a_k^{1/k}$. Per definizione $a_k^{1/k} \leq L_n$ per ogni $k > n$ e inoltre $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ k_\varepsilon : L_n - \varepsilon < a_{k_\varepsilon}^{1/k_\varepsilon} \leq L_n$. Ne segue che $\dfrac{a_{k_\varepsilon+1}}{a_{k_\varepsilon}} \leq \dfrac{L_n^{k_\varepsilon+1}}{(L_n-\varepsilon)^{k_\varepsilon}} = L_n\Big(\dfrac{L_n}{L_n-\varepsilon}\Big)^{k_\varepsilon}$. Ne segue che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ k_\varepsilon : \dfrac{a_{k_\varepsilon+1}}{a_{k_\varepsilon}} \leq L_n\Big(\dfrac{L_n}{L_n-\varepsilon}\Big)^{k_\varepsilon}$ e quindi $\sup\limits_{k>n} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \geq L_n$ e quindi $\inf\limits_n \sup\limits_{k>n} \dfrac{a_{k_\varepsilon+1}}{a_{k_\varepsilon}} \geq L$.

• Sia $l = \underline{\lim} a_k^{1/k}$ e quindi $l = \sup\limits_n \inf\limits_{k>n} a_k^{1/k}$. Sia $l_n = \inf\limits_{k>n} a_k^{1/k}$. Per definizione $a_k^{1/k} \geq l_n$ per ogni $k > n$ e inoltre $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ k_\varepsilon : l_n \leq a_{k_\varepsilon}^{1/k_\varepsilon} \leq l_n + \varepsilon$. Ne segue che $\dfrac{a_{k_\varepsilon+1}}{a_{k_\varepsilon}} \geq l_n\Big(\dfrac{l_n}{l_n+\varepsilon}\Big)^{k_\varepsilon}$. Ne segue che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ k_\varepsilon : \dfrac{a_{k_\varepsilon+1}}{a_{k_\varepsilon}} \geq l_n\Big(\dfrac{l_n}{l_n+\varepsilon}\Big)^{k_\varepsilon}$ e quindi $\inf\limits_{k>n} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \leq l_n$ e quindi $\sup\limits_n \inf\limits_{k>n} \dfrac{a_{k_\varepsilon+1}}{a_{k_\varepsilon}} \leq l$.

4.8.2 Per dimostrare il criterio di Abel basta scrivere $\sum\limits_{k=1}^n a_k b_k = a_n B_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} a'_k B_k$ dove $B_k \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^n b_i$ e $a'_k \overset{\text{def}}{=} a_{k+1} - a_k$. La formula altri non è che "una integrazione per parti". Infatti $\sum\limits_{k=1}^n a_k b_k = \sum\limits_{k=1}^n a_k(B_k - B_{k-1})$ " = " $\sum\limits_{k=1}^n a_k(B'_k)$ e quindi scriviamo $a_n B_n - a_1 B_1 - \sum\limits_{k=1}^{n-1} B_k(a_{k+1} - a_k)$ che "è uguale a " $\sum\limits_{k=1}^{n-1} B_k(a'_k)$. $a_n B_n - a_1 B_1 - \sum\limits_{k=1}^{n-1} B_k(a_{k+1} - a_k) = a_n B_n - a_1 B_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k b_k - a_n B_{n-1} = a_n B_n - a_n B_{n-1} - a_1 B_1 - a_n b_n + \sum\limits_{k=1}^n a_k b_k = -a_1 B_1 + \sum\limits_{k=1}^n a_k b_k$ da cui la formula che cerchiamo.

Per dimostrare che $\sum a_k b_k$ converge scriviamo $\sum\limits_{k=m}^n a_k b_k = \sum\limits_{k=1}^n a_k b_k - \sum\limits_{k=1}^m a_k b_k = a_n B_n - a_m B_m +$

$\sum_{k=m}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k$ e chiaramente $\sum_{k=m}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k < B\sum_{k=m}^{n-1}(a_k-a_{k+1}) = B(a_{n-1}-a_{m+1}) < \varepsilon$ per ogni n, m sufficientemente grandi. Le quantità $a_nB_n - a_mB_m$ tendono chiaramente a zero per n, m che tendono a più infinito. Come si vede sono essenziali le proprietà per cui a_k è decrescente e B_k limitata per ogni k.

• Se a_k tende a zero ma per valori non definitivamente positivi un semplice esempio è $a_k = \frac{(-)^k}{k}$ e $b_k = (-)^k$. Se invece $a_k \geq 0$ e $a_k \to 0$ allora un sempio è $b_k = (-)^k$ e $a_k = \begin{cases} k^{-1} & k \text{ pari} \\ 0 & k \text{ dispari}\end{cases}$

• Si scriva $\sum a_k = \sum \frac{1}{k}(ka_k)$ e si applichi il criterio di Abel

5.8.2 Dal Teorema di Abel si ha $\frac{1}{m_n}\sum_{k=1}^{n} a_km_k = A_n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(m_{k+1}-m_k)}{m_n}A_k = A_n - A + A - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(m_{k+1}-m_k)}{m_n}A_k = \frac{1}{m_n}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}(m_{k+1}-m_k)A_k - A\sum_{k=1}^{n-1}(m_{k+1}-m_k) - m_1A\Big) + A_n - A = \frac{1}{m_n}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}(m_{k+1}-m_k)(A_k-A) - m_1A\Big) + A_n - A$. Sappiamo che $k > k_\varepsilon \ \Rightarrow\ |A_k - A| < \varepsilon$ per cui $\sum_{k=1}^{n-1}(m_{k+1}-m_k)(A_k-A) = \sum_{k=1}^{k_\varepsilon}(m_{k+1}-m_k)(A_k-A) + \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{n-1}(m_{k+1}-m_k)(A_k-A)$. $|\sum_{k=k_\varepsilon+1}^{n-1}(m_{k+1}-m_k)(A_k-A)| \leq \varepsilon\sum_{k=k_\varepsilon+1}^{n-1}(m_{k+1}-m_k) = \varepsilon(m_n - m_{k_\varepsilon+1}) \leq \varepsilon m_n$. Tutti gli altri contributi tendono a zero.

6.8.2 $\sum a_k$ convergente implica che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ j_\varepsilon:\ n, m > j_\varepsilon \ \Rightarrow\ \sum_{i=n}^{m} a_i < \varepsilon$. Consideriamo la successione $\varepsilon_k = k^{-2}$ e in corrispondenza ad essa i valori j_k. Supponiamo che siano tutti diversi per cui $j_k < j_{k+1}$. Se non sono tutti diversi scartiamo quelli doppi, tripli,...n-pli. Dunque abbiamo $\sum_{i=j_k+1}^{j_{k+1}} a_j < \varepsilon_k$. Per $j_k+1 \leq j \leq j_{k+1}$ definiamo $b_j = k$. È evidente che $\sum_{i=j_k+1}^{j_{k+1}} a_jb_j < k\cdot\sum_{i=j_k+1}^{j_{k+1}} a_j < \frac{1}{k}$ e quindi si ha lo stesso convergenza

• Poiché $\sum a_k$ diverge vuol dire che $\lim_{k\to+\infty} A_k = +\infty$ dove $\sum^{k} a_j = A_k$ e quindi esiste una successione di numeri interi n_k tale che $A_{n_k} \geq k$. Definiamo la successione $b_j = \frac{1}{k}$ per $n_k \leq j < n_{k+1} - 1$. Abbiamo $\sum_{n_k}^{n_{k+1}-1} a_jb_j = \frac{1}{k}\sum_{n_k}^{n_{k+1}-1} a_j \geq 1$ e quindi non è soddisfatto il criterio di Cauchy.

7.8.2 $\sum_{n=0}^{m} c_n = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1) + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2) + \ldots + (a_nb_0 + \ldots + a_0b_n) = a_0\sum_{k=0}^{n} b_k + a_1\sum_{k=0}^{n-1} b_k + a_2\sum_{k=0}^{n-2} b_k + \ldots + a_nb_0 = a_0(\sum_{k=0}^{n} b_k - B) + a_1(\sum_{k=0}^{n-1} b_k - B) + a_2(\sum_{k=0}^{n-2} b_k - B) + \ldots + a_n(b_0 - B) +$

$B(\sum_{k=0}^n a_k - A) + AB \stackrel{\rm def}{=} AB + B(\sum_{k=0}^n a_k - A) + \sum_{k=0}^n a_k(B_{n-k} - B)$. Poiché $\sum a_k$ e $\sum b_k$ convergono, abbiamo che $\sum_{k=i}^j a_k < \varepsilon$ per ogni $i, j > k_\varepsilon$ e $|B_k - B| < \varepsilon$ per ogni $k > k^1_\varepsilon$. Sia $K_\varepsilon \stackrel{\rm def}{=} \max\{k_\varepsilon, k^1_\varepsilon\}$. Quindi scriviamo $\sum_{k=0}^n a_k(B_{n-k} - B) = \sum_{k=0}^{K_\varepsilon} a_k(B_{n-k} - B) + \sum_{k=K_\varepsilon+1}^n a_k(B_{n-k} - B)$ con $n > 2K_\varepsilon$ dimodoché $n - k > K_\varepsilon$ per ogni $0 \le k \le K_\varepsilon$. $\sum_{k=0}^{K_\varepsilon} a_k(B_{n-k} - B) \le \sup_{0\le k\le K_\varepsilon} |B_{n-k} - B| \sum_{k=0}^{K_\varepsilon} |a_k| \le \varepsilon \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$. $\sum_{k=K_\varepsilon+1}^n a_k(B_{n-k} - B) \le C\varepsilon$ dove C è una costante che limita $B_{n-k} - B$. Mettendo tutto assieme otteniamo il risultato *a patto che* $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ converga.

Detto $|C_n| = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i}} \frac{1}{\sqrt{n-i}} \ge \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \ge 1$ e quindi $C_n \not\to 0$ da cui il risultato.

8.8.2 Si usi la monotonia in maniera essenziale

- $a_k = \begin{cases} k^{-2} & k \ne 2^p \\ \dfrac{1}{k} & k = 2^p \end{cases} \quad p = 1, 2, 3, \ldots$
- $a_k = \begin{cases} k^{-1/2} & k \ne 2^p \\ \dfrac{1}{k \ln k} & k = 2^p \end{cases} \quad p = 1, 2, 3, \ldots$

9.8.2 Prendiamo la successione $a_k = (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots)$ ossia

$a_k = \begin{cases} 1/p, & k = 2p \\ \dfrac{1}{1 + [\frac{2p-1}{2}]}, & k = 2p - 1 \end{cases}$ e quindi $2^k a_{2^k} = \begin{cases} 2, & k = 2p \\ \dfrac{2^{2p-1}}{1 + 2^{2p-2}}, & k = 2p - 1 \end{cases}$ e chiaramente non è monotona. Più in generale, data una successione monotona, se ne può ricavare una successione monotona b_k tale che la successione $c_k = 2^k b_{2^k}$ non è monotona. Basta "mantenere costante" a_k sufficientemente a lungo. Data $\{a_k\}$ definiamo $b_k = a_j$ per $2^k \le j < 2^{k+1}$. Dopo definiamo $c_j = b_j$ se $j \ne 2^k$ mentre $c_j = j b_j$ se $j = 2^k$.

10.8.2 L'affermazione è falsa. Basta prendere la serie $\sum \frac{(-)^k}{\sqrt{k}}$. Un possibile errore potrebbe essere quello di una erronea applicazione del teorema del confronto dimenticando che esso è valido solo per serie il cui segno è definito (almeno da un certo punto in poi).

11.8.2 L'affermazione è falsa. Ovviamente è vero che $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$. Un controesempio è

$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k^2} & k \ne 2^{2^p} \\ 2^{-p} & k = 2^{2^p} \end{cases}$; $a_{k=2^{2^p}} = \dfrac{\ln 2}{\ln k}$ da cui $\lim_{k\to+\infty} k a_k|_{k=2^{2^p}} = +\infty$ e quindi $\not\exists \lim_{k\to+\infty} k a_k$ ma $\overline{\lim} k a_k = +\infty$.

12.8.2 È conseguenza della relazione $(\sqrt{a_k} - \frac{1}{k})^2 = a_k - 2\frac{\sqrt{a_k}}{k} + \frac{1}{k^2} \ge 0$ da cui $\frac{\sqrt{a_k}}{k} \le \frac{1}{2}(a_k + \frac{1}{k^2})$. Le serie $\sum k^{-2}$ e $\sum a_k$ sono convergenti. La risposta alla seconda domanda è no. Si prenda la serie $\sum \frac{(-)^k}{\ln k}$. La serie $\sum \frac{1}{k \ln k}$ è divergente. La ragione sta nel fatto che se $\sum a_k$ converge non è detto che converga $\sum |a_k|$

13.8.2 La convergenza di $\sum \sqrt{a_k a_{k+1}}$ è dovuta a $(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}})^2 \geq 0$. Il controesempio cercato è $a_k = k^{-2-(-)^k}$

14.8.2 La convergenza di $\sum (a_k^{-1} + a_{k+1}^{-1})^{-1}$ segue da $\frac{a_k a_{k+1}}{a_k + a_{k+1}} \leq \min\{a_k, a_{k+1}\}$. Il controesempio è $a_k = k^{-2-(-)^k}$.

15.8.2 $\frac{a_n}{a_k} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \ldots\ldots \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \ldots\ldots \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_n}{b_k}$ e quindi $0 < a_n \leq b_n \frac{b_k}{a_k}$ da cui la convergenza. Se $\sum a_k$ diverge, diverge pure $\sum b_k$.

16.8.2 Supponiamo che $\sum a_k$ converga. Essendo $0 < \frac{a_k}{1+a_k} < a_k$ si applica il teorema del confronto da cui la convergenza della serie $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$.

Sia viceversa divergente la serie $\sum a_k$. Abbiamo $\sum \frac{a_k}{1+a_k} \geq \sum_{k: a_k \leq 1} 2^{-1} a_k + \sum_{k: a_k > 1} 2^{-1}$. Se la seconda serie contiene un numero finito di termini allora la prima contiene tutti i termini tranne un numero finito e quindi diverge. Se la seconda serie contiene un numero infinito di termini diverge.

17.8.2 $\sum \frac{a_k}{1+k^2 a_k}$ converge sempre in quanto $\frac{a_k}{1+k^2 a_k} \leq k^{-2}$

Secondo caso. Se $\sum a_k$ converge, converge pure $\sum \frac{a_k}{1+a_k^2}$ in quanto $\frac{a_k}{1+a_k^2} \leq a_k$.

Se $\sum a_k$ diverge, la serie $\sum \frac{a_k}{1+a_k^2}$ può convergere oppure divergere. Infatti per $a_k = \frac{1}{k}$ si ha $\sum \frac{a_k}{1+a_k^2} = \sum \frac{1}{k} \frac{k^2}{1+k^2}$ e quindi divergenza. Per $a_k = k^2$ si ha $\sum \frac{a_k}{1+a_k^2} = \sum \frac{k^2}{1+k^4}$ e quindi convergenza. Per $a_k = \frac{1}{k^2}$ converge mentre per $a_k = k$ diverge. Per $a_k = 2^{(-)^k}$ diverge in quanto $\frac{a_k}{1+a_k^2} \not\to 0$

Terzo caso. Supponiamo che $\sum a_k$ converga. Essendo $0 < \frac{a_k}{1+k a_k} < a_k$ si applica il teorema del confronto e quindi la serie $\sum \frac{a_k}{1+k a_k}$ converge.

Sia viceversa divergente la serie $\sum a_k$. La serie $\sum \frac{a_k}{1+k a_k}$ può convergere oppure divergere.

Ad esempio se $a_k = \frac{1}{k}$ allora $\sum \frac{a_k}{1+k a_k} = \sum \frac{1}{2k}$ e quindi diverge.

Viceversa con $a_k = 0 \ \forall k \neq 2^p$ e $a_{2^p} = p$ si ha $\sum_k \frac{a_k}{1+k a_k} = \sum_p \frac{p}{1+2^p p}$ e quindi convergenza nonostante $\sum_k a_k = \sum_p p$ sia divergente. Nell'esercizio si dice che $a_k > 0$. Basta modificare $a_k = k^{-2}$ quando $k \neq 2^p$. Per $a_k = k$ la serie diverge in quanto $\frac{a_k}{1+k a_k} = \frac{k}{1+k^2} \geq \frac{1}{2k}$.

Supponiamo ora che a_k sia monotona decrescente e $\sum a_k$ divergente. Anche $\frac{a_k}{1+k a_k}$ è monotona decrescente e quindi (vedi (`rich.3`)) converge se e solo se converge $\sum \frac{2^k a_{2^k}}{1+2^k a_{2^k}}$. In base alla prima parte dell'esercizio l'ultima serie converge se e solo se converge la serie $\sum 2^k a_{2^k}$ la quale a sua volta converge se e solo se converge $\sum a_k$ da cui il risultato.

18.8.2 Dalla stima $\frac{a_k}{S_k} \leq \frac{a_k}{a_1}$ segue che se $\sum a_k$ converge, converge pure $\sum \frac{a_k}{S_k}$. Supponiamo ora che $\sum a_k$ diverge. Per far vedere che $\sum \frac{a_k}{S_k}$ non converge è sufficiente (anche necessario per la verità) far vedere che non è di Cauchy la successione $\frac{a_k}{S_k}$. Dobbiamo dunque mostrare che $\exists\ \varepsilon > 0 : \forall\ k\ \exists\ N > 0 : \sum_{k+1}^{N+k} \frac{a_j}{S_j} \geq \varepsilon$. $\sum_{j=k+1}^{N+k} \frac{a_j}{S_j} \geq \frac{1}{S_{N+k}} \sum_{k+1}^{N+k} a_j = \frac{S_{N+k} - S_k}{S_{N+k}} = 1 - \frac{S_k}{S_{N+k}}$.
Essendo la serie di partenza divergente e a termini positivi, si può prendere N abbastanza grande da avere $\frac{S_k}{S_{N+k}} \leq \frac{1}{2}$ e quindi $\sum_{j=k+1}^{N+k} \frac{a_j}{S_j} \geq \frac{1}{2}$. Ne segue la tesi.

Dalla conclusione segue: data $a_k > 0$ e $\sum a_k = +\infty$, esiste sempre una serie positiva divergente $\sum b_k$ tale che $b_k > 0$ e $\lim \frac{a_k}{b_k} = +\infty$. La successione $\{b_k\}$ sarebbe $\frac{a_k}{A_k}$ chiaramente ma non è certo l'unica successione possibile. Guardando (`rich.1`), se ne trova un'altra senza far ricorso al presente risultato.

- Se a_k converge allora $S_k \to l$ e quindi $\frac{a_k}{S_k^{1-\delta}} \leq C_{l,\delta} a_k$ per una opportuna costante $C_{l,\delta}$ (facilmente identificabile) da cui la convergenza.
- Se $\sum a_k$ diverge allora $S_k \to +\infty$ e quindi $\frac{a_k}{S_k^{1-\delta}} \geq \frac{a_k}{S_k}$ da cui la divergenza grazie al punto precedente

19.8.2 La serie $\sum a_k$ può convergere ad un valore S oppure divergere a $+\infty$. Supponiamo che converga a S. In tal caso abbiamo $\sum \frac{a_k}{S_k^{1+\delta}} \leq \sum \frac{a_k}{a_1^{1+\delta}} < +\infty$

Supponiamo che $\sum a_k$ diverga. Da [HLP] pag.121, $\sum \frac{a_k}{S_k^{1+\delta}} \leq \sum \frac{a_k}{S_k S_{k-1}^\delta} =$
$= \sum \frac{\delta(S_k - S_{k-1}) S_k^{\delta-1}}{\delta S_k^\delta S_{k-1}^\delta} \leq \sum \frac{S_k^\delta - S_{k-1}^\delta}{\delta S_k^\delta S_{k-1}^\delta} \leq \sum \frac{1}{\delta}(\frac{1}{S_{k-1}^\delta} - \frac{1}{S_k^\delta})$ che chiaramente tende a un limite essendo una somma telescopica in cui il termine generale tende a zero per ipotesi. Supponendo che $0 < \delta < 1$, si è usata la disuguaglianza $rx^{r-1}(x-y) \leq x^r - y^r$ con $x > y > 0$ e $0 < r < 1$ dimostrata insieme con altre molto simili ed ugualmente interessanti a pag. 39–40 di [HLP]. La disuguaglianza è conseguenza di $1 - x^p \geq p(1-x)$ con $0 < p < 1$ e $0 < x < 1$.
Se fosse $\delta \geq 1$ allora basta osservare che $\frac{a_k}{S^{1+\delta}} \leq \frac{a_k}{S^{1+\delta'}}$ con $0 < \delta' < 1$.

20.8.2 Sia $\int^{+\infty} f(x)dx < +\infty$. $\sum a_k f(S_k) = \sum (S_k - S_{k-1}) f(S_k) \leq \sum \int_{S_{k-1}}^{S_k} f(x)dx < \infty$ e quindi la convergenza di $\sum a_k f(S_k)$.
Sia ora $\int^{+\infty} f(x)dx = +\infty$. $\sum a_k f(S_{k-1}) = \sum (S_k - S_{k-1}) f(S_{k-1}) \geq \sum \int_{S_{k-1}}^{S_k} f(x)dx = \infty$ e quindi la divergenza di $\sum a_k f(S_{k-1})$.

- $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $a_k = 2^{k^2}$, $S_k > 2^{k^2}$
- $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$, $a_k = 2^{k^2}$, $S_{k-1} > 2^{(k-1)^2}$

21.8.2 Supponiamo che $f(x) = O(x)$ e quindi $f(x) \leq Ax$. Supponiamo inoltre che $\sum a_k = +\infty$, $a_k > 0$. Si ha $\sum \frac{a_k}{f(S_k)} \geq \sum \frac{a_k}{AS_k}$ e quest'ultima serie diverge per il criterio di Abel–Dini.

Viceversa supponiamo che $\sum \frac{a_k}{f(S_k)} = +\infty$ *per qualsiasi serie positiva divergente* $\sum a_k$ e per assurdo supponiamo che $f(x) \neq O(x)$ e quindi esiste una successione $x_k \to +\infty$ tale che $f(x_k) \geq 2^k x_k$ (la scelta di 2^k è arbitraria). Definiamo la successione $\{a_k\} \stackrel{\text{def}}{=} x_k - x_{k-1}$. Si ha $\sum \frac{a_k}{f(x_k)} = \sum \frac{x_k - x_{k-1}}{x_k} \frac{x_k}{f(x_k)} \leq \sum 2^{-k}$ il che è assurdo per ipotesi.

22.8.2 Abbiamo la relazione $\sum f(S_k)a_k \leq \int f(x)dx \leq \sum f(S_{k-1})a_k$ per cui se dimostriamo che dalla convergenza di $\sum f(S_k)a_k$ segue quella si $\sum f(S_{k-1})a_k$ segue il risultato.

1) Sia a_k limitata ossia $a_k \leq A$ e supponiamo che $\sum a_k f(S_k)$ converga. $\sum_{k=k_0}^{+\infty} f(S_{k-1})a_k = \sum_{k=k_0}^{+\infty} (f(S_{k-1}) - f(S_k))a_k + \sum_{k=k_0}^{+\infty} f(S_k)a_k$. $\sum_{k=k_0}^{+\infty} (f(S_{k-1}) - f(S_k))a_k \leq \sum_{k=k_0}^{+\infty} (f(S_{k-1}) - f(S_k))A$ e tale somma, essendo telescopica, è pari a $Af(S_{k_0-1})a_{k_0-1}$ usando il fatto che la funzione $f \searrow 0$

2) Sia $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq A$. $\sum a_k f(S_{k-1}) = \sum f(S_{k-1}) \frac{a_k}{a_{k-1}} a_{k-1} \leq A \sum f(S_{k-1})a_{k-1}$ e tale somma converge se converge $\sum f(S_k)a_k$.

3) Sia ora $\frac{S_k}{S_{k-1}} \leq A$. Poiché sappiamo che $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ è illimitata, segue che esiste una sottosuccessione $\{n_k\}$ tale che $\frac{a_{n_{k+1}}}{a_{n_k}} \geq \frac{S_{j+1}}{S_j}$ per ogni j e quindi $\sum_{k=k_0}^{+\infty} (f(S_{n_{k-1}}) - f(S_{n_k}))a_{n_k} \leq \sum_{k=k_0}^{+\infty} \left[f(S_{n_{k-1}})a_{n_k} - f(S_{n_k}) \frac{S_{n_{k+1}}}{S_{n_k}} S_{n_k}\right] = \sum_{k=k_0}^{+\infty} (f(S_{n_{k-1}})a_{n_k} - f(S_{n_k})S_{n_{k+1}}) \leq \sum_{k=k_0}^{+\infty} (f(S_{n_{k-1}})S_{n_k} - f(S_{n_k})S_{n_{k+1}})$ e quest'ultima è una somma telescopica pari a $f(S_{n_{k_0-1}})S_{nk_0} - \lim_{k\to+\infty} f(S_{n_k})S_{n_{k+1}}$.

$\lim_{k\to+\infty} f(S_{n_k})S_{n_{k+1}} \leq A \lim_{k\to+\infty} f(S_{n_k})S_{n_k}$. Prendiamo ora $a_k \stackrel{\text{def}}{=} 2^k$ da cui $C'2^k \geq S_k$;
$\sum_{k=k_0}^{+\infty} f(S_k)a_k \geq \sum_{k=k_0}^{+\infty} f(S_k)\frac{S_k}{C'}$ e quindi la convergenza di $\sum_{k=k_0}^{+\infty} f(S_k)a_k$ per ipotesi implica $\lim_{k\to+\infty} f(S_k)S_k = 0$. La relazione $a_k = 2^k$ non è restrittiva. $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq A$ dà luogo alle stesse conclusioni. ((`rich.4`)).

23 .8.2 È immediato mostrare che la convergenza $\int^{+\infty} f(x)dx$ implica la convergenza di $\sum a_k f(S_k)$. $\sum a_k f(S_k) = \sum (S_k - S_{k-1})f(S_k) \leq \sum \int_{S_{k-1}}^{S_k} f(x)dx < \infty$ e quindi la convergenza di $\sum a_k f(S_k)$ (vedi `rich.4`).

• Viceversa supponiamo che $\sum a_k f(S_k) < +\infty$ con $f(x) \searrow 0$ per qualsiasi serie $\sum a_k = +\infty$ positiva. Si può usare l'esercizio precedente e dire che la convergenza di $\sum a_k f(S_k) < +\infty$, unitamente ad una successione positiva $\{a_k\}$ tale che $a_k \leq A$ implica la convergenza di $\int^{+\infty} f(x)dx$.

24.8.2 Dal fatto che una serie $\sum u_n$ converge se e solo se la successione $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ è di

Cauchy, segue che per dimostrare la divergenza della serie $\sum \frac{a_k}{R_k}$ basta far vedere che $\exists\ \varepsilon > 0$ *t.c.* $\forall\ k\ \exists\ \ N_\varepsilon > k$ *t.c.* $\tilde S_{N_\varepsilon} - \tilde S_k > \varepsilon$ dove $\tilde S_{N_\varepsilon} = \sum_k^{N_\varepsilon} \frac{a_k}{R_k}$. $\tilde S_{N_\varepsilon} - \tilde S_k = \frac{a_{k+1}}{R_{k+1}} + \ldots + \frac{a_{k+N_\varepsilon}}{R_{k+N_\varepsilon}} \geq$ $\geq \frac{a_{k+1} + \ldots + a_{N_\varepsilon+k}}{R_{k+1}} = \frac{S_{N_\varepsilon+k} - (S - R_k)}{R_k} = \frac{R_k - R_{N_\varepsilon+k}}{R_k} = 1 - \frac{R_{N_\varepsilon+k}}{R_k} > 1^-$ dove 1^- è un qualsiasi numero più piccolo di 1 ($\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$ essendo la serie convergente).

25.8.2 L'affermazione è falsa. Basta prendere $a_k = \frac{(-)^k}{\sqrt{k}}$ e $b_k = \ln(1 + \frac{(-)^k}{\sqrt{k}})$. Se $a_k > 0$ (anche solo definitivamente) allora sarebbe vera.

26.8.2 $\boxed{p > 1}$ Si considerino le seguenti maggiorazioni: $\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < \frac{2}{2^p}$, $\quad \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} < \frac{4}{4^p}$, $\quad \sum_{k=8}^{15} \frac{1}{k^p} < \frac{8}{8^p}$ e via dicendo per cui $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} < \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{k(1-p)}$ e si ha convergenza per $p > 1$.

$\boxed{p = 1}$ osserviamo che $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ e così via per cui (volendo essere pignoli nei calcoli) si ha $\sum_{k=1}^{2^{M+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{N=1}^{M} \sum_{2^N+1}^{2^{N+1}} \frac{1}{k} > 1 + \frac{1}{2} + \sum_{N=1}^{M} \frac{1}{2} = \frac{M+3}{2}$ e quindi divergenza.

$\boxed{p < 1}$ $\frac{1}{k^p} \geq \frac{1}{k}$ e quindi si ha divergenza.

27.8.2 Basta osservare che $|a_k - a_{k+1}| = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2}$ e $\sum k^{-2}$ converge.

28.8.2 Sia $l > 0$. Dalla relazione $l - \varepsilon < \frac{a_k}{b_k} < l + \varepsilon$ valida per $k > k_\varepsilon$ segue $b_k < (l - \varepsilon)a_k$ e $a_k < (l + \varepsilon)b_k$ da cui segue il risultato non appena $\varepsilon < l$. Se $l < 0$ il risultato è lo stesso prendendo la successione $-b_k$.

29.8.2 Detto $\overline{\lim}_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = l$, che supponiamo essere positivo, dalla sua definizione segue che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ k_\varepsilon :\ k > k_\varepsilon\ \Rightarrow\ l \leq \frac{a_k}{b_k} < l + \varepsilon$ e quindi se $\sum b_k$ converge allora converge pure $\sum a_k$ mentre se $\sum a_k$ diverge, diverge pure $\sum b_k$.

- si prendano le successioni $a_k = \begin{cases} k^{-4} & k = 2p \\ k^{-3} & k = 2p+1 \end{cases}$ $\quad b_k = \begin{cases} k^{-4} & k = 2p \\ k^{-2} & k = 2p+1 \end{cases}$ dalle quali si evince che $\overline{\lim}_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = 1$, ma non esiste $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k}$
- successioni monotone possono essere $a_j = \begin{cases} k^{-4} & k^2 \leq j < (k+1)^2 \\ 2 \cdot k^{-4} & (k+1)^2 \leq j < (k+2)^2 \end{cases}$ $\quad b_j = k^{-4}$ $k^2 \leq j < (k+1)^2$

30.8.2 Sia $\alpha > 1$ e sia $b_k = k^{-p}$. $\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^p} = 1 - \frac{p}{k}E(k)$ dove $E(k) \to 1$ per $k \to +\infty$. Se dunque $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{\alpha}{k}E(k)$ allora $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$ con $\alpha > p > 1$ e quindi, grazie al criterio precedente, si ha convergenza.

Se viceversa $\alpha < 1$ allora $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{\alpha}{k}E(k) > 1 - \frac{p}{k}E(k)$ con $\alpha < p < 1$ e quindi divergenza.

- Per $a_k = \frac{1}{k}$ si ha $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} = \frac{k+1-1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k}\frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k}E(k)$ e quindi in questo caso, con $\alpha = 1$, si ha divergenza.

• Se invece $a_{k+1} = \dfrac{1}{k\ln^2 k}$ allora $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = (1-\dfrac{1}{k})(1+2\dfrac{\ln(1-\frac{1}{k})}{\ln k} + \dfrac{\ln^2(1-\frac{1}{k})}{\ln^2 k}) = 1-\dfrac{1}{k}E(k)$ e quindi stavolta, con $\alpha = 1$, si ha convergenza.

• $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\Pi_{i=1}^k(1+i\alpha)}{\Pi_{i=1}^k(1+i\beta)}$; $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\alpha(n+1)+1}{\beta(n+1)+1}$ e quindi, per il criterio del rapporto), se $\beta > \alpha > 0$ si ha convergenza mentre se $0 < \beta \le \alpha$ si ha divergenza.

• $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \Pi_{i=1}^k(2-e^{\frac{\alpha}{i}})$. Se $\alpha = \ln 2$ si ha $a_k \equiv 0$. e quindi la serie converge. $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = 2-e^{\frac{\alpha}{i}} = 1-\dfrac{\alpha}{n}+O(\dfrac{1}{n^2})$ e quindi se $\alpha > 1$ la serie converge mentre se $\alpha < 1$ la serie diverge.

• $\displaystyle 1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Pi_{k=0}^n(a+k)}{\Pi_{k=0}^n(b+k)} \stackrel{\text{def}}{=} 1+\sum a_n$. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1+\dfrac{a-b}{n}+O(n^{-2})$ e quindi se $b > a+1$ converge.

Sia $u_{n+1} = \dfrac{\Pi_{k=0}^n(a+k)}{\Pi_{k=0}^n(b+k)}$, $u_0 = 1$. Per definizione $u_n(a+n) = u_{n+1}(b+n)$ e quindi $(b-a-1)u_{n+1} = u_n(a+n)-u_{n+1}(a+1+n)$. Sommando da $n=0$ a $n=m$ si ha $(b-a-1)(S_n-u_0) = au_0-(a+1+m)u_{m+1}$. Poiché $u_{n+1} \le u_n$ e la serie converge segue che $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$ (vedi `rich.5`) e quindi si ha $(b-a-1)S = au_0+(b-a-1)u_0$ e quindi la somma della serie è $\dfrac{b-1}{b-a-1}$

• $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{\Pi_{k=0}^n(a+k)}{\Pi_{k=0}^n(b+k)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum a_n$. Detto a_n il termine della serie si ha $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{n}\dfrac{a+n}{b+n} = 1+\dfrac{1}{n}(-b+a+1)+O(\dfrac{1}{n^2})$ e se $b > a+2$ la serie converge; altrimenti diverge. Per trovare la somma della serie scriviamo $(n+1)\dfrac{\Pi_{k=0}^n(a+k)}{\Pi_{k=0}^n(b+k)} = \dfrac{\Pi_{k=0}^n(a+k)}{\Pi_{k=0}^n(b+k)}(a+n+1) - \dfrac{\Pi_{k=0}^n(a+k)}{\Pi_{k=0}^n(b+k)}a = \dfrac{\Pi_{k=0}^{n+1}(a+k)}{\Pi_{k=0}^n(b+k)} - \dfrac{\Pi_{k=0}^n(a+k)}{\Pi_{k=0}^n(b+k)}a$. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Pi_{k=0}^n(a+k)}{\Pi_{k=0}^n(b+k)}a = \frac{a^2}{b-a-1}$ in base al risultato di prima.

Sia $c_n = \dfrac{\Pi_{k=0}^{n+1}(a+k)}{\Pi_{k=0}^n(b+k)}$. $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{a+n+2}{b+n+1}$ e quindi $c_{n+1}(b-a-2) = (n+2+a)c_n - a_{n+1}(n+1+2+a)$. $\displaystyle(b-a-2)\sum_{n=0}^{m} c_n = c_0(2+a)-c_{m+1}(m+3+a)$. Tenendo conto del fatto che $\sum c_n$ converge e $c_n \searrow 0$, segue $\displaystyle(b-a-2)\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = c_0(2+a)$ dove $c_0 = \dfrac{a(a+1)}{b}$. Dunque $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = c_0+\frac{c_0(2+a)}{b-a-2} = \frac{a(a+1)}{b-a-2}$. Il risultato è dato da $\dfrac{a(a+1)}{b-a-2}-\dfrac{a^2}{b-a-1} = \dfrac{ab-a}{(b-a-1)(b-a-2)}$.

31.8.2 Sia $\alpha \le 1$ e si prenda $a_k = \dfrac{1}{k\ln k}$. $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \big(1-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k(k+1)}\big)\cdot$ $\cdot\big(1-\dfrac{\ln(1+\frac{1}{k})}{\ln k}+\dfrac{\ln^2(1+\frac{1}{k})}{\ln^2 k+\ln k\ln(1+\frac{1}{k})}\big) = 1-\dfrac{1}{k}(1+\dfrac{1}{\ln k})+O(\dfrac{1}{k^2})$. Ciò vuol dire che per qualsiasi successione positiva $b_k > 0$ per cui $\dfrac{b_{k+1}}{b_k} = 1-\dfrac{\alpha}{k}+\dfrac{f(k)}{k^s}$, $s > 1$, con $\alpha \le 1$ e $|f(k)| \le A$ si ha $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \le \dfrac{b_{k+1}}{b_k}$ e quindi $\sum b_k$ diverge.

Se $\alpha > 1$ si ricade nell'esercizio relativo a `rich.6`

• $\sum(1-\dfrac{x}{n}\ln n)^n$ bisogna effettuare lo sviluppo asintotico di $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$.

$a_{k+1} = \exp\{-x\ln k - x\ln(1+\frac{1}{k}) - \frac{x^2}{2(k+1)}\ln^2(k+1) + O(\frac{x^3}{k^2}\ln^3 k)\}$;
$a_k = \exp\{-x\ln k - \frac{x^2}{2k}\ln^2 k + O(\frac{x^3}{k^2}\ln^3 k)\}$; e quindi
$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \exp\{-x\ln(1+\frac{1}{k}) - \frac{x^2}{2k+2}\ln^2(1+k) + \frac{x^2}{2k}\ln^2 k + O(\frac{x^3}{k^2}\ln^3 k)\}$;
$\frac{1}{k+1} = \frac{1}{k}\frac{1}{1+\frac{1}{k}} = \frac{1}{k}(1-\frac{1}{k}+O(\frac{1}{k^2})) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} + O(k^{-3})$.
$\frac{x^2}{2k}\ln^2 k - \frac{x^2}{2k+2}\ln^2(1+k) = \frac{x^2}{2k}(\ln^2 k - \ln^2(k+1)) + \frac{x^2}{2k^2}\ln^2(1+k) + x^2 O(\frac{\ln^2 k}{k^3}) =$
$= \frac{x^2}{2k}(\ln k - \ln(1+k))(\ln k + \ln(1+k)) + \frac{x^2}{2k^2}\ln^2(1+k) + x^2 O(\frac{\ln^2 k}{k^3}) =$
$= \frac{x^2}{2k}\ln(2k+1)\ln(1-\frac{1}{k+1}) + \frac{x^2}{2k^2}\ln^2(1+k) + x^2 O(\frac{\ln^2 k}{k^3}) = x^2 O(\frac{\ln^2 k}{k^2})$
e quindi si ottiene $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \exp\{-\frac{x}{k} + xO(\frac{1}{k^2}) + (x^2+x^3)O(\frac{\ln^3 k}{k^2})\} = \exp\{-\frac{x}{k} + (x+x^2+x^3)O(\frac{\ln^3 k}{k^2})\} = 1 - \frac{x}{k} + O(\frac{\ln^3 k}{k^2})$. Il risultato è che se $x>1$ la serie converge e diverge se $0\le x\le 1$

- $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 2 - e^{\frac{\alpha}{k}} = 1 - \frac{\alpha}{k} + O(\frac{1}{k^2})$ e quindi diverge anche per $\alpha = 1$
- $\sum_{j=k}^{+\infty}\binom{j}{k}e^{-j^a}$ converge sempre. Infatti $\frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{j+1}{j+1-k}e^{-(j+1)^a+j^a} =$

$= (1+\frac{k}{j}+O(\frac{k^2}{j^2}))e^{j^a(1-(1+\frac{1}{j})^a)} = (1+\frac{k}{j}+O(\frac{k^2}{j^2}))(1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r!}(j^a(1-(1+\frac{1}{j})^a))^r$. La serie in r converge e prendiamo: 1) N intero tale che $\frac{a}{1-a} < N \le \frac{1}{1-a}$, 2) $\beta > 1$. Riscriviamo quindi $\frac{a_{j+1}}{a_j} = (1+\frac{k}{j}+O(\frac{k^2}{j^2}))(1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{c_r}{r!j^{(1-a)r}}) = (1+\frac{k}{j}+O(\frac{k^2}{j^2}))\big(1+\sum_{r=1}^{N}\frac{c_r}{r!j^{(1-a)r}} + O(j^{-(N+1)(1-a)})\big) = 1+\frac{k}{j}+O(\frac{k^2}{j^2}) + \sum_{r=1}^{N}\frac{c_r}{r!j^{(1-a)r}} + k\sum_{r=1}^{N}\frac{c_r}{r!j^{(1-a)r+1}} + O(\frac{k^2}{j^2})\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{c_r}{r!j^{(1-a)r}} + O(j^{-(N+1)(1-a)} = 1+\frac{k}{j}+\frac{c_1}{j^{1-a}}(1+o(\frac{1}{j^{1-a}})) + O(\frac{1}{j^\beta}) = 1-\frac{1}{j}\big(-k+aj^a+o(j^a)\big)+O(\frac{1}{j^\beta})$. Ne segue che, per qualsiasi $\alpha>1$, esiste j_0 tale che $j\ge j_0$ tale che $1-\frac{\alpha}{j}+O(\frac{1}{j^\beta}) \ge 1-\frac{1}{j}\big(-k+aj^a+o(j^a)\big)+O(\frac{1}{j^\beta})$ e quindi la serie converge per qualsiasi valore di k.

- Se $N\le 0$ la serie ovviamente non converge in quanto il termine generale non tende a zero. $\sum_{j=k}^{+\infty}\binom{j}{k}j^{-N}$. $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{j+1}{j+1-k}\frac{j^N}{(j+1)^{N+1}} = 1-\frac{1}{j}(N-k)+O(j^{-2})$ per $j\to+\infty$. Ne segue che la serie converge per $k<N-1$ e diverge se $k\ge N$.
- La serie $1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Pi_{k=0}^n(a+k)}{\Pi_{k=0}^n(a+1+k)}$ diverge in quanto $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1-\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^2})$ e quindi diverge
- La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Pi_{k=1}^n(a+k\ln k)}{\Pi_{k=1}^n(b+k\ln k)}$ diverge per ogni valore di $a,b>0$. Se $a\ge b$ allora $a_n\ge 1$ e quindi diverge. Per $b>a$ abbiamo $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1-\frac{b-a}{n\ln n}+O(\frac{1}{n^2}) \ge 1-\frac{1}{2n}+O(\frac{1}{n^2})$ e quindi

diverge

32.8.2 Si ha $\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n+n_\varepsilon} a_k < \varepsilon$ per $n > 0$ e per un certo n_ε (proprietà di Cauchy). Ne segue che $0 < na_{n+n_\varepsilon} < \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n+n_\varepsilon} a_k < \varepsilon$ da cui il risultato. Per applicare il risultato alla serie $\sum_k k^{-1-\frac{1}{k}}$ bisogna dimostrare che è monotona decrescente ossia $k^{1+\frac{1}{k}} < (k+1)^{1+\frac{1}{k+1}}$. Elevando alla potenza $k+1$ si ottiene $k^{k+2+\frac{1}{k}} < (k+1)^{k+2}$ ossia $k^{\frac{1}{k}} < (1+\frac{1}{k})^{k+2}$ che è certamente vera in quanto $k^{\frac{1}{k}} < 2$ mentre $(1+\frac{1}{k})^{k+1} > e$.

• Sia $k^2 \le p_n < (k+1)^2$ per $n_k \le n \le n_{k+1}$ e sia $\overline{p}_k \overset{\text{def}}{=} \min\{p_n\colon\ n_k \le n \le n_{k+1}\}$. Per $n_k \le n \le n_{k+1}$ definiamo $a_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n_{k+1}}\frac{1}{\overline{p}_k}$. Chiaramente $a_k \searrow 0$, e $\sum a_k < +\infty$. Infatti $\sum a_k = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n_k\le n\le n_{k+1}} \frac{1}{n_{k+1}}\frac{1}{\overline{p}_k} \le \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\overline{p}_k} < +\infty$. Inoltre si ha $na_np_n = \frac{n}{n_{k+1}}\frac{p_n}{\overline{p}_k} \ge 1$ per $n = n_{k+1}$

33.8.2 Dal fatto che $\sum a_k$ converge e dal fatto che $\{a_k\}$ è monotona, segue che $\sum 2^k a_{2^k} \overset{\text{def}}{=} \sum b_k$ converge. Dal fatto che $\{b_k\}$ è monotona segue che $\lim_{k\to+\infty} kb_k = 0$ e quindi $\lim_{k\to+\infty} k2^k a_{2^k} = \lim_{k\to+\infty} \ln(2^k)2^k a_{2^k} = 0$. Supponiamo che $\lim_{k\to+\infty} k\ln(k)a_k \neq 0$ oppure che il limite non esista. Vuol dire che esiste ε_0 tale che definitivamente in n esiste k_n tale che $k_n\ln(k_n)a_{k_n} \ge \varepsilon_0$. Sia j_n tale che $2^{j_n} \le k_n \le 2^{j_n+1}$ e inoltre $2^{j_n}a_{j_n}(\ln 4) \le \frac{\varepsilon_0}{2}$. Abbiamo $\varepsilon_0 \le k_n\ln(k_n)a_{k_n} \le a_{2^{j_k}}2^{j^k+1}\ln(2^{j_k+1}) = a_{2^{j_k}}2^{j^k}2(\ln(2^{j_k})+\ln 2)$ e quindi $\varepsilon_0 - a_{2^{j_k}}2^{j^k}\ln 4 \le 2a_{2^{j_k}}2^{j^k}\ln(2^{j_k})$ da cui $\frac{\varepsilon_0}{4} \le a_{2^{j_k}}2^{j^k}\ln(2^{j_k})$. Chiaramente vi è una contraddizione.
• Si applica il secondo risultato dell'esercizio precedente alla successione p_{2^k}. Dunque abbiamo la successione b_k, monotona decrescente con serie $\sum b_k$, convergente, tale che $p_{2^n}nb_n \not\to 0$ e costruita in base al risultato precedente. Definiamo $b_n \overset{\text{def}}{=} 2^n a_{2^n}$ per cui $p_{2^n}2^n a_{2^n}\ln 2^n \not\to 0$. Fino ad ora abbiamo definito a_{2^k}. Definiamo $a_k = a_{2^n}$ per $2^{n-1} < k \le 2^n$. a_k è sempre decrescente così come $2^k a_{2^k}$. Inoltre $\sum a_k = \sum_k a_{2^k}(2^k - 2^{k-1}) = \frac{1}{2}\sum_k 2^k a_{2^k} = \frac{1}{2}\sum b_k < +\infty$

34.8.2 Facciamo vedere che $\sum a_k < +\infty \ \Rightarrow\ \sum k(a_k - a_{k+1}) < +\infty$. Dimostriamo che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon : p, q > N_\varepsilon \ \Rightarrow\ \sum_{k=p}^{q} k(a_k - a_{k+1}) < \varepsilon$. Basta scrivere $\sum_{k=p}^{q} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_p^q a_k - qa_{q+1} + pa_p = \sum_{k=p}^{q} a_k - (q+1)a_{q+1} + pa_p + a_{q+1} < \varepsilon$ grazie al risultato per cui se una serie non negativa monotona $\sum a_k$ converge, allora ka_k tende a zero (vedi `rich.7`) e al fatto che la serie converge.
Facciamo vedere che $\sum a_k = +\infty \Rightarrow \sum k(a_k - a_{k+1}) = +\infty$. Mostriamo che $\sum k(a_k - a_{k+1}) < +\infty \ \Rightarrow\ \sum a_k < +\infty$. Usiamo sempre $\sum_{k=p}^{q} k(a_k - a_{k+1}) + qa_{q+1} - pa_p = \sum_{k=p}^{q} a_k$. $qa_{q+1} = (q+1)a_{q+1} - a_{q+1} = (q+1)(a_{q+1} - a_{q+2}) + \ldots + (q+1)(a_{q+N-1} - a_{q+N}) + (q+1)a_{q+N} - a_{q+1} \le \sum_{j=q+1}^{q+N-1} j(a_j - a_{j+1}) + (q+1)a_{q+N} - a_{q+1}$. Analogamente abbiamo $pa_p = p(a_p - a_{p+1}) + \ldots +$

$p(a_{p+N-1}-a_{p+N})+pa_{p+N} \le \sum\limits_{j=p}^{p+N-1} j(a_j-a_{j+1})+pa_{p+N}$. Dunque $\sum\limits_{k=p}^{q} a_k \le \sum\limits_{k=p}^{q} k(a_k-a_{k+1})+$ $\sum\limits_{j=q+1}^{q+N-1} j(a_j-a_{j+1})+(q+1)a_{q+N}+\sum\limits_{j=p}^{p+N-1} j(a_j-a_{j+1})+pa_{p+N}+a_{q+1}$ e se p,q,N sono grandi abbastanza la somma dei cinque termini è minore di ε.

• Diamo ora una serie $\sum a_k$ convergente con $a_k\ge 0$ ma tale che $\sum k(a_k-a_{k+1})$ non converge e chiaramente a_k non è monotona. La successione a_k è fatta nel seguente modo $\dfrac{1}{k\ln^2 k}, 0, \dfrac{1}{(k+2)\ln^2(k+2+\sqrt{k+2})}, 0, \dfrac{1}{(k+4)\ln^2(k+4)}, 0, \dfrac{1}{(k+6)\ln^2(k+6+\sqrt{k+6})},$ $, \dfrac{1}{(k+8)\ln^2(k+8)}, 0, \ldots$. Chiaramente $\sum a_k$ converge ma $\sum k(a_k-a_{k+1})$ diverge in quanto quattro termini vicini danno il contributo $\dfrac{1}{\ln^2(k+N)}-$
$-\dfrac{k+N+1}{(k+N+2)\ln^2(k+N+2+\sqrt{k+N+2})} \sim -\dfrac{2}{\sqrt{N}\ln^3 N}+O(\dfrac{1}{N\ln^3 N})+O(\dfrac{1}{\ln^2 N}\dfrac{k}{N^{3/2}})$ da cui la divergenza in N

• Diamo ora una serie divergente $\sum a_k=+\infty$ ma tale che $\sum k(a_k-a_{k+1})$ converge con $a_k\ge 0$ ma a_k non monotona. Prendiamo $a_k=(\dfrac{1}{k\ln k}, 0, \dfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)}, 0, \dfrac{1}{(k+2)\ln(k+2)}, 0,$ $, \dfrac{1}{(k+3)\ln(k+3)}, 0, \ldots,)$. Chiaramente $\sum a_k$ diverge ma $\sum j(a_j-a_{j+1})=\dfrac{2}{N\ln^2 N}+$ $+O(\dfrac{1+k}{N^2\ln^2 N})$ e quindi converge una volta sommata su N.

35.8.2 A partire dalle successioni $\{k^{-1}\}$ e $\{k^{-2}\}$, costruiamo le due nuove successioni $a_k=1,1,\frac12,\frac14,\frac13,\frac19,\frac14,\frac1{16},\ldots$ e $b_k=1,1,\frac14,\frac12,\frac19,\frac13,\frac1{16},\frac14,\ldots$. Entrambe contengono la stessa sottosuccessione divergente ma $c_k=\min\{a_k,b_k\}=k^{-2}$.

• $c_k=k^{-2}$, $k_1>1$, $k_{l+1}=2k_l$. $a_j=\begin{cases} c_{k_l} & k_l<j\le k_{l+1} \\ c_j & k_{l+1}<j\le k_{l+2}\end{cases}$ $\quad b_j=\begin{cases} c_j & k_l<j\le k_{l+1} \\ c_{k_l} & k_{l+1}<j\le k_{l+2}\end{cases}$

Chiaramente $\sum c_k$ converge, $\sum a_k \ge \sum\limits_l \sum\limits_{j=k_l}^{k_{l+1}} k_j c_j \ge \sum\limits_l k_l \dfrac{1}{k_l}=+\infty$ e $\sum b_k$ la stessa cosa.

• Se vogliamo a_k, b_k strettamente decrescenti, basta modificare le precedenti nell'intervallo di indici in cui sono costanti. Ad esempio nell'intervallo $k_l<j\le k_{l+1}$ prendiamo $a_j=c_{k_l}-\varepsilon_j^{(l)}$ con $\varepsilon_j^{(l)}=\dfrac{j}{k_l}\varepsilon(c_{k_l+1}-c_{k_l})$ e $0<\varepsilon<1$.

36.8.2 La serie a_k diverge e quindi $\exists\ \varepsilon>0$: $\forall\ k\ \exists\ k_\varepsilon:\ \sum\limits_{k+1}^{k_\varepsilon} a_k \ge \varepsilon$. Consideriamo ora una qualsiasi serie convergente $\sum c_k$ dove $a_k\ge c_k$ e $c_k \searrow 0$. Supponiamo che $\sum\limits_{n=k_0}^{k_1} a_n \ge \varepsilon$. Definiamo due successioni per ricorrenza, $\{d_j\}$ e $\{d'_j\}$, dove $\{d_1\}_{k\le k_1} \stackrel{\rm def}{=} (c_1,c_2,\ldots,c_{k_1})$. Siano dati: 1) φ una applicazione strettamente crescente sui naturali tale che $a_{\varphi(k_j+1)}<c_{k_j+1}$; 2) k_{j+1}, un intero tale che $\sum\limits_{n=\varphi(k_j+1)}^{k_{j+1}} a_n \ge \varepsilon$. Definiamo

$\{d_k\}=(c_1,\ldots,c_{k_0},\ldots,c_{k_1},a_{\varphi(k_1+1)},a_{\varphi(k_1+1)+1},\ldots,a_{k_2},c_{k_2+1},\ldots,c_{k_3},a_{\varphi(k_3+1)},\ldots,a_{k_4},\ldots)$
$\{d'_k\}=(a_1,\ldots,a_{k_0},\ldots,a_{k_1},c_{k_1+1},\ldots,c_{k_2},a_{\varphi(k_2+1)},a_{\varphi(k_2+1)+1},\ldots,a_{k_3},c_{k_3+1},\ldots,c_{k_4},a_{\varphi(k_4+1)},$

...)
Per costruzione le due serie d_k e d'_k, sono monotone divergenti entrambe ma $\sum \min\{d_k, d'_k\} = \sum c_k$ converge.

37.8.2 Consideriamo ora una successione $c_k \searrow 0$, tale che $\sum c_k < +\infty$. Induttivamente definiamo una successione q_k tale che $c_{q_k} q_{k+1} \geq \varepsilon$ per ogni intero k e $\varepsilon > 0$ fissato. Definiamo poi le seguenti successioni: $a_j = \begin{cases} c_j & q_k \leq j < q_{k+1} \\ c_{q_{k+1}} & q_{k+1} \leq j < q_{k+2} \end{cases}$ e $b_j = \begin{cases} c_{q_k} & q_k \leq j < q_{k+1} \\ c_j & q_{k+1} \leq j < q_{k+2} \end{cases}$

Si verifichi che $\sum a_k = \sum b_k = +\infty$ e che $\min\{a_k, b_k\} = c_k$

In relazione agli esercizi di questo guppo, è interessante notare che se invece di $c_k = \min\{a_k, b_k\}$ si prendesse $d_k = \max\{a_k, b_k\}$ allora $\sum d_k$ divergerebbe (una volta date a_k e b_k con le precedenti caratteristiche). Se invece sapessimo che $\sum a_k$ converge e $\sum b_k$ converge allora $\sum c_k$ e $\sum d_k$ convergerebbero entrambe. La ragione risiede nel seguente fatto: se $\sum a_k$ e $\sum b_k$ converge/diverge allora $\sum (a_k + b_k)$ converge/diverge e inoltre $a_k + b_k = c_k + d_k$. Supponiamo che $\sum a_k$ e $\sum b_k$ convergano; converge pure $\sum c_k$ e quindi $\sum d_k = \sum (a_k + b_k) - \sum c_k$ converge essendo la differenza di serie convergenti. Se viceversa divergono $\sum a_k$ e $\sum b_k$ allora diverge pure $\sum d_k$. Nulla però si può dire della serie $\sum c_k = \sum (a_k + b_k) - \sum d_k$ in quanto la differenza di due serie divergenti può divergere essa stessa oppure può convergere.

38.8.2 Frequentemente deve essere $\min\{d_k, d'_k\} = d_k$ e anche $\min\{d_k, d'_k\} = d'_k$ (non deve essere definitivamente $\min\{d_k, d'_k\} = d_k$ oppure $\min\{d_k, d'_k\} = d'_k$). Dunque deve esistere una successione $n_k \geq k$ tale che $\sum d_{n_k} < +\infty$ e per Cauchy si ha $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k_\varepsilon$: $k > k_\varepsilon \Rightarrow \displaystyle\sum_{j=k_\varepsilon}^{k} d_{n_j} < \varepsilon$. Dal fatto che d_k è monotona e dal fatto che $n_k \geq k$ (per definizione di sottosuccessione) segue che $d_{n_k}(n_k - k_\varepsilon - 1) \leq \displaystyle\sum_{j=k_\varepsilon}^{n_k} d_{n_j} < \varepsilon$ da cui $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} d_{n_k} n_k = 0$ da cui $\overline{\lim}(kd_k)^{-1} = +\infty$.

- Supponiamo ora che $\overline{\lim}(kd_k)^{-1} = +\infty$ e quindi esiste una sottosuccessione n_k tale che $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} d_{n_k} n_k = 0$. *Dalla decrescenza* di d_k segue che $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} d_k = 0$ e quindi $\forall\ j \geq 1\ \exists\ k_j :\ d_{k_j} < \dfrac{1}{j^2}$. Costruiamo allora la successione $\{d'_j\}$ dove $d'_j = d_{k_j}$ se $j \neq n^2$ mentre $d'_{n^2} = d_{k_{n^2}} = 1$ per ogni n intero. Ne segue $c_j \stackrel{\text{def}}{=} \min\{d_j, d'_j\} = \begin{cases} d'_{k_j} & j \neq n^2 \\ d_{k_{n^2}} & j = n^2 \end{cases}$ e chiaramente converge.

Es: Data una successione $d_k \geq d_{k+1} > 0$ tale che $\sum d_k = +\infty$, e tale che $\overline{\lim}(kd_k)^{-1} = +\infty$, Esiste una successione $\underline{d'_k \geq d'_{k+1} > 0}$ tale che $\sum d'_k = +\infty$ e $\sum \min\{d_k, d'_k\} < +\infty$?

- Come caso particolare in cui d'_k è monotona si può prendere $d_k = \dfrac{1}{k \ln k}$. Al variare di k si definisce poi la successione $q_{3k} = k^{k^2}$ e $q_{3k+1} = (q_{2k})^{1+\frac{1}{k^2}}$, $q_{3k+2} = (q_{3k+1})^{k+1}$. Definiamo la successione monotona

$$d'_j = \begin{cases} \dfrac{1}{q_{3k} \ln q_{3k}} & q_{3k} \leq j < q_{3k+1} \\[2ex] \dfrac{1}{q_{3k+2} \ln q_{3k+2}} & q_{3k+1} \leq j < q_{3k+2} \end{cases}$$

- Dimostriamo che $\sum \min\{d_k, d'_k\} \stackrel{\text{def}}{=} \sum c_k$ converge.

Negli intervalli $q_{3k} \leq j < q_{3k+1}$, si ha $\displaystyle\sum_{q_{3k} \leq j < q_{3k+1}} c_k = \sum_{q_{3k} \leq j < q_{3k+1}} d_k \leq K \int_{q_{3k}}^{q_{3k+1}} \frac{1}{x \log_2 x} =$

$= K' \log_2\left(\dfrac{\log_2(q_{3k+1})}{\log_2(q_{3k})}\right) \sim \dfrac{1}{k^2}$ e sommando su k si ha convergenza.

Negli intervalli $q_{3k+1}\le j<q_{3k+2}$ si ha $\displaystyle\sum_{q_{3k+1}\le j<q_{3k+2}} c_k = \sum_{q_{3k+1}\le j<q_{3k+2}} d'_k = \frac{q_{3k+2}-q_{3k+1}}{q_{3k+2}\log_2 q_{3k+2}} \le$
$\displaystyle\frac{2q_{3k+2}}{q_{3k+2}\log_2 q_{3k+2}} = \frac{2}{(k+1)\log_2 q_{3k+1}} \sim \frac{1}{k^3\log_2 k}$

• Dimostriamo che $\sum d'_k$ diverge. Negli intervalli $q_{3k}\le j<q_{3k+1}$, si ha

$$\sum_{q_{3k}\le j<q_{3k+1}} d'_k = \frac{q_{3k+1}-q_{3k}}{q_{3k}\log_2 q_{3k}} = \frac{q_{3k}\big((q_{3k})^{\frac{1}{k^2}}-1\big)}{q_{3k}\log_2 q_{3k}} \sim K'\frac{k}{k^2\log_2 k} \text{ e quindi diverge}$$

39.8.2 Se la serie convergesse allora sarebbe di Cauchy e quindi

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ k_\varepsilon:\ n,m>k_\varepsilon\ \Rightarrow\ \displaystyle\sum_{k=p}^{q}\frac{m_k-m_{k-1}}{m_k}<\varepsilon$. Dimostreremo che $\exists\ \varepsilon>0:\ \forall\ p\ \exists\ q>p:\ \displaystyle\sum_{k=p}^{q}\frac{m_k-m_{k-1}}{m_k}\ge\varepsilon$. $\displaystyle\sum_{k=p}^{q}\frac{m_k-m_{k-1}}{m_k}\ge\sum_{k=p}^{q}\frac{m_k-m_{k-1}}{m_q}=1-\frac{m_{p-1}}{m_q}$ e per ogni p si può prendere q abbastanza grande in modo tale che $\dfrac{m_{p-1}}{m_q}<\dfrac{1}{2}$ da cui il risultato. Nel passaggio $\ge$ si è usata la monotonia di m_k.

<u>Una seconda dimostrazione</u>. Bisogna osservare che si può scrivere $m_k=m_{k-1}+a_k$ con a_k intero. Al passo successivo si ha $m_k=m_{k-2}+a_{k-1}+a_k$ e quindi $m_k=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}a_k$. La relazione $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{m_k-m_{k-1}}{m_k}$ diventa $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k}{\sum_{j=1}^k a_k}$. Tramite il risultato dell'esercizio (`rich.8`) la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k}{\sum_{j=1}^k a_k}$ converge se e solo se converge la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$, il che è impossibile essendo gli a_k interi.

• Se gli m_k non sono tutti interi ancorché strettamente crescenti, bisogna distinguere i due casi: 1) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}m_k=+\infty$, 2) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}m_k=l\neq 0$.

1) è lo stesso caso degli interi e quindi la serie diverge.

2) In tal caso la serie converge. Infatti la proprietà di Cauchy diventa

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ k_\varepsilon:\ p,q>k_\varepsilon\ \Rightarrow\ \displaystyle\sum_{k=p}^{q}\frac{m_k-m_{k-1}}{m_k}<\varepsilon$ in quanto $\displaystyle\sum_{k=p}^{q}\frac{m_k-m_{k-1}}{m_k}<\frac{m_q-m_{p-1}}{m_p}<\varepsilon$ se p e q sono sufficientemente grandi.

Se supponiamo che $\displaystyle\sum\frac{m_k-m_{k-1}}{m_k}$ converge, allora $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}m_k=l$ per un qualche l perché se fosse $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}m_k=+\infty$ allora la serie divergerebbe.

• Se $p=2$ allora la serie diventa $\displaystyle\sum\Big(\frac{1}{m_k}-\frac{1}{m_{k+1}}\Big)=\frac{1}{m_1}$ e quindi converge. Se $p>2$, per confronto, la serie converge.

Sia $1<p<2$. Essendo $0<p-1<1$, usiamo la disuguaglianza $1-x^{p-1}\ge(p-1)(1-x)$, $x>0$, per ottenere $\displaystyle\frac{1}{m_k^{p-1}}\Big(1-\frac{m_k}{m_{k+1}}\Big)<\frac{1}{p-1}\Big(1-\frac{m_k^{p-1}}{m_{k+1}^{p-1}}\Big)$ e quindi la serie si maggiora con $\displaystyle\frac{1}{p-1}\sum\Big(\frac{1}{m_k^{p-1}}-\frac{1}{m_{k+1}^{p-1}}\Big)$ da cui la convergenza.

• Sia $m_k>0$ e $\lim_{k\to+\infty}m_k=0$. Consideriamo la sottosuccessione $\{n_k\}$ tale che $\{m_{n_k}\}$ sia monotona decrescente. Facciamo vedere che la serie $\displaystyle\sum\frac{m_{n_k}-m_{n_k-1}}{m_{n_k}}$ non converge. Essendo

$m_k > 0$ non può convergere la serie originaria. Facciamo vedere che $\sum \frac{m_{n_k}-m_{n_k-1}}{m_{n_k}}$ non è di Cauchy. $\sum_{k=p}^{q} \frac{m_{n_k}-m_{n_k-1}}{m_{n_k}} \ge \frac{1}{m_{n_q}} \sum_{k=p}^{q} (m_{n_k}-m_{n_k-1}) = \frac{m_{n_q}-m_{n_p-1}}{m_{n_q}}$. Prendiamo ora q così grande che $2m_{n_p-1} < m_{n_q}$ e quindi la proprietà di Cauchy non è verificata.

• Non esiste $\lim_{k\to+\infty} m_k$. In tal caso la serie può convergere oppure divergere. Si prenda infatti la successione $m_k = \begin{cases} -1 & k=2p \\ 1 & k=2p+1 \end{cases}$ e la serie non converge. Viceversa prendendo la seguente successione

$$m_k = \begin{cases} 2+\sin k + \frac{1}{k^2} & k=2p \\ 2+\sin k & k=2p+1 \end{cases}$$ la serie converge.

40.8.2 Le serie divergono entrambe. Nel primo caso abbiamo

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{a_j-a_{j+1}}{a_{j+1}} \ge \sum_{j=k}^{n} \frac{a_j-a_{j+1}}{a_{k+1}} = \frac{a_k-a_n}{a_{k+1}} = \frac{a_k}{a_{k+1}} - \frac{a_{n+1}}{a_{k+1}} \ge \frac{1}{2}\frac{a_k}{a_{k+1}}$$ se n è grande abbastanza per cui diverge.

Per la serie $\sum_{j=k}^{n} \frac{a_j-a_{j+1}}{a_j}$ il ragionamento è lo stesso.

41.8.2 Se $p<0$ allora $\sum \frac{a_k-a_{k+1}}{a^p_{k+1}} \le \sum (a_k-a_{k+1})$ e converge essendo una serie telescopica e $a_k \to 0$ e lo stesso vale per la serie $\sum \frac{a_k-a_{k+1}}{a^p_k}$

Sia $0<p<1$ per cui $0<1-p<1$. Usiamo la disuguaglianza $1-x^{p-1} \ge (p-1)(1-x)$ per ogni $x>0$ per ottenere $a_k^{1-p}(1-\frac{a_{k+1}}{a_k}) \le a_k^{1-p}\frac{1}{1-p}(1-(\frac{a_{k+1}}{a_k})^{1-p}) = \frac{1}{1-p}(a_k^{1-p}-a_{k+1}^{1-p})$ e quindi la serie converge. Essendo $a_{k+1}<a_k$ la serie $\sum \frac{a_k-a_{k+1}}{a^p_{k+1}}$ converge ugualmente.

42.8.2 Sia $c_k = \frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_{k+1}}$. La serie chiaramente converge. D'altra parte $c_k d_k = \frac{d_{k+1}-d_k}{d_k}$ e diverge essendo $\sum_{k=p}^{q} \frac{d_{k+1}-d_k}{d_k} \ge 1 - \frac{d_p}{d_{q+1}} \ge \frac{1}{2}$ (usando la monotonia di d_k).

43.8.2 Sia $A_k = \frac{1}{a_k}$ per cui $A_k \nearrow +\infty$. Sia $d_k = \frac{A_{k+1}-A_k}{A_{k+1}}$. $\sum d_k$ diverge (per la monotonia) ma $\sum d_k a_k = \sum \frac{A_{k+1}-A_k}{A_k A_{k+1}} = \sum(\frac{1}{A_k} - \frac{1}{A_{k+1}})$ converge.

• Sia $\nu_k = \min\{j\colon a_j \le 2^{-k}\}$. Definiamo $d_j = \frac{1}{\nu_{k+1}}$ per $\nu_k \le j \le \nu_{k+1}$. Dalla monotonia di a_j segue che $d_j \ge d_{j+1}$ e $\sum_p^q d_j \ge \sum_k \sum_{j\colon p\le\nu_k\le j<\nu_{k+1}\le q} \frac{1}{\nu_{k+1}} \ge \sum_k \frac{\nu_{k+1}-\nu_k}{\nu_{k+1}} \ge \sum_k \frac{\nu_{k+1}-\nu_k}{\nu} = \frac{\nu-\nu_1}{\nu} \ge \frac{1}{2}$ se q è grande abbastanza. ν è il più grande fra fra gli ν_{k+1} con $p \le \nu_{k+1} \le q$ e dove ν_1 è il più piccolo fra gli ν_k con $p \le \nu_k \le q$. $\sum_j d_j a_j$converge in quanto $\sum a_j d_j \le$

$$\sum_k \sum_{j\colon p\le\nu_k\le j<\nu_{k+1}\le q} \frac{2^{-k}}{\nu_{k+1}} \le \sum_k 2^{-k}\frac{\nu_{k+1}-\nu_k}{\nu_{k+1}} \le \sum_k 2^{-k}$$

44.8.2 Sia $\nu_k = \min\{j\colon a_j \le 2^{-k}\}$. Definiamo $d_j = \dfrac{1}{\nu_{k+1}}$ per $\nu_k \le j \le \nu_{k+1}$. Dalla monotonia di a_j segue che $d_j \ge d_{j+1}$ e $\displaystyle\sum_p^q d_j \ge \sum_k \sum_{j:\, p\le\nu_k\le j<\nu_{k+1}\le q} \frac{1}{\nu_{k+1}} \ge \sum_k \frac{\nu_{k+1}-\nu_k}{\nu_{k+1}} \ge \sum_k \frac{\nu_{k+1}-\nu_k}{\nu} = \frac{\nu-\nu_1}{\nu} \ge \frac12$ se q è grande abbastanza. ν è il più grande fra fra gli ν_{k+1} con $p \le \nu_{k+1} \le q$ e dove ν_1 è il più piccolo fra gli ν_k con $p \le \nu_k \le q$. La successione a_jd_j è monotona decrescente e $\displaystyle\sum_j d_ja_j$converge in quanto $\displaystyle\sum a_jd_j \le \sum_k \sum_{j:\, p\le\nu_k\le j<\nu_{k+1}\le q} \frac{2^{-k}}{\nu_{k+1}} \le \sum_k 2^{-k}\frac{\nu_{k+1}-\nu_k}{\nu_{k+1}} \le \sum_k 2^{-k}$

45.8.2 Per $a<1$ la serie converge. Infatti da un certo n in poi si ha $\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{(\ln n)^a}}} \le \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ ossia $e^{2\ln(\ln n)} \le e^{(\ln n)^{1-a}}$.
Per $a=1$ si ha $a_n = \dfrac{e}{n}$ da cui la divergenza. Per $a>1$ si ha $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} na_n = 1$.

46.8.2 Applichiamo il criterio di Abel. Con un minimo di trigonometria si ottiene $\displaystyle\sum_{k=0}^n \sin(k\vartheta) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2i}(e^{ik\vartheta} - e^{-ik\vartheta}) = \frac{1}{2i}\frac{1-e^{i(n+1)\vartheta}}{1-e^{i\vartheta}} - \frac{1}{2i}\frac{1-e^{-i(n+1)\vartheta}}{1-e^{-i\vartheta}} = \frac{e^{i\frac{\vartheta}{2}(n-1)}}{2i}\frac{\sin\frac{n\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}} - \frac{e^{-i\frac{\vartheta}{2}(n+1)}}{2i}\frac{\sin\frac{n\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}} = \frac{\sin\frac{n\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\sin\frac{(n+1)\vartheta}{2}$ e quindi $\displaystyle|\sum_{k=0}^n \sin(k\vartheta)| \le |(\sin\frac{\vartheta}{2})^{-1}|$ e quindi la convergenza. Peraltro si ha lo stesso risultato se al posto di $\dfrac1k$ si avesse una successione che tende a zero più lentamente.

47.8.2 Basta osservare che $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} |\frac{\sin(k\vartheta)|}{k} \ge \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(k\vartheta)}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1-\cos 2(k\vartheta)}{k}$ e la seconda serie converge grazie al precedente esercizio (vedi (`rich.9`)).

Un indizio della non convergenza lo si ha osservando che $\displaystyle\int_3^A \frac{\sin\ln\ln x}{x\ln x} = -\cos\ln\ln A + \cos\ln\ln 3$, non converge per $A\to+\infty$.

Si dimostri viceversa che $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\sin\ln k}{\ln k}$ converge

48.8.2 Come prima cosa dimostriamo che $a_k(x) \searrow 0$ per ogni $0\le x<\pi$. Basta osservare che $0<\sin x<x$ non appena $0<x<\pi$. Dunque $a_k(x)$ è una successione strettamente decrescente limitata inferiormente da zero e quindi converge a zero.
$S_2(x)$ converge essendo una serie di Leibnitz.
$S_1(x)$. Dimostriamo per induzione che per $n\ge1$ si ha $a_n(x) \ge \dfrac{r}{n}$, $0<r<1$ e r dipendente da x. Sia infatti $\sin(x)=r$. Al secondo passo si ha $\sin(\sin(x)) = \sin r \ge r - \dfrac16 r^3 \ge \dfrac{r}{2}$ per ogni $0<r<1$. Al passo $n+1$–esimo abbiamo $a_{n+1}(x) = \sin a_n(x) \ge \sin\dfrac{r}{n} \ge \dfrac{r}{n} - \dfrac16\dfrac{r^3}{n^3} \ge \dfrac{r}{n+1}$ anche qui per ogni $0<r<1$.

Per ogni $C\ge 31$ (dipendente da x) si ha $\sqrt{\dfrac3n} - \dfrac{C}{n} \le a_n(x) \le \sqrt{\dfrac3n}$ per ogni $n\ge1$. Dal criterio del confronto segue che $S_1(x)$ diverge. La dimostrazione procede per induzione. Supponiamo che per $1 \leq k \leq n$ si ha $\sqrt{\frac{3}{k}} - \frac{C}{k} \leq a_k(x) \leq \sqrt{\frac{3}{k}}$ (se $\sqrt{\frac{3}{k}} - \frac{C}{k} < 0$ per qualche k si sostituisce 0.)

$a_{n+1}(x) = \sin a_n(x) \geq \sin(\sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{C}{n}) \geq \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{C}{n} - \frac{1}{6}(\sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{C}{n})^3$ e vogliamo che tale quantità sia maggiore o uguale a $\sqrt{\frac{3}{n+1}} - \frac{C}{n+1}$ ossia $\sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3}{n+1} - \frac{C}{n} - \frac{1}{6}(\sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{C}{n})^3 \geq \frac{C}{n+1}$. $\sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3}{n+1} \geq \frac{\sqrt{3}}{2n^{3/2}}$ per cui la disuguaglianza da dimostrare segue da $\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{n^{3/2}} - \frac{1}{6}\frac{3\sqrt{3}}{n^{3/2}} + \frac{9C}{6n^2} + \frac{C^3}{6n^3} - \frac{3\sqrt{3}C^2}{n^{5/2}} \geq \frac{C}{n^2} \geq \frac{C}{n} - \frac{C}{n+1}$ e quindi $\frac{C}{n^2}(\frac{1}{2} + \frac{C^2}{6n} - \frac{3\sqrt{3}C}{n^{1/2}}) > 0$. Per $n = 1$ e $C \geq 31$ la disuguaglianza è vera.

$a_{n+1}(x) = \sin a_n(x) \leq \sin\sqrt{\frac{3}{n}} \leq \sqrt{\frac{3}{n}}$

49 .8.2 Si può prendere $a_k = \frac{\sqrt{k}}{(-)^k}$ $k \neq 0$. La serie $\sum \frac{(-)^k}{\sqrt{k}}$ è una serie di Leibnitz e quindi converge. La serie $\sum \frac{(-)^k}{\sqrt{k} - (-)^k}$ non è una serie di Leibnitz. La somma $\frac{1}{a_k - 1} + \frac{1}{a_{k+1} - 1}$ è pari a $\frac{(-)^k}{\sqrt{k} - (-)^k} + \frac{(-)^{k+1}}{\sqrt{k+1} - (-)^{k+1}} = (-)^k \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k} + (-)^k + (-)^{k+2}}{(\sqrt{k} + (-)^{k+1})(\sqrt{k+1} + (-)^k)} = \frac{2 + (-)^k(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{(\sqrt{k} + (-)^{k+1})(\sqrt{k+1} + (-)^k)} \geq \frac{2}{c(k+1)}$ per una opportuna costante c se k è sufficientemente grande. Da tale relazione segue la non convergenza (basta scrivere $\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{a_j - 1}$).

Può essere utile capire come nasce l'idea di prendere la successione $a_k = \frac{\sqrt{k}}{(-)^k}$. Se una delle due serie deve convergere, diciamo $\sum \frac{1}{a_k}$, allora $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{a_k} = 0$ ossia $\lim_{k\to+\infty} |a_k| = +\infty$. Supponiamo che $\lim_{k\to+\infty} a_k = +\infty$. Ne seguirebbe $\frac{1}{a_k - 1} = \frac{1}{a_k}\frac{a_k}{a_k - 1}$ e quindi $0 < \frac{1}{a_k - 1} \leq \frac{2}{a_k}$ da un certo k in poi e quindi la convergenza grazie al criterio del confronto. Se viceversa a_k non ha segno definito, la precedente maggiorazione non vale. Come serie non avente segno definito si sarebbe potuta prendere $a_k = \frac{k}{(-)^k}$ ma rifacendo i precedenti calcoli si otterrebbe $|\frac{1}{a_k - 1} + \frac{1}{a_{k+1} - 1}| = |(-)^k \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}| \leq \frac{1}{2k^{3/2}}$ e quindi convergenza.

50.8.2 Poiché $a_k \to 0$ segue che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ k_\varepsilon,\ n_\varepsilon : \forall\ q > k_\varepsilon,\ 0 \leq r \leq n_\varepsilon \ \Rightarrow\ |\sum_{k=q}^{r} a_k| < \varepsilon$.

Supponiamo ora che $\overline{\{S_n\}} \neq [l, L]$. Ciò implica che esiste un intervallo aperto $(a, b) \subset [l, L]$ tale che $(a, b) \cap \{S_n\} = \emptyset$. Ciò implica che per ogni n intero si ha $|S_{n+1} - S_n| \geq b - a$. Ma ciò è impossibile non appena $\varepsilon < b - a$.

51 .8.2 Dimostriamo che $\exists\ \varepsilon > 0 \colon\ \forall\ k\ \exists\ n_\varepsilon > k \colon \sum_{j=k}^{n_\varepsilon} \frac{a_j}{M_j} \geq \varepsilon$. $\sum_{j=k}^{n_\varepsilon} \frac{a_j}{M_j} \geq \frac{1}{M_{n_\varepsilon}} \sum_{j=k}^{n_\varepsilon} a_j = \frac{A_{n_\varepsilon} - A_{k-1}}{M_{n_\varepsilon}} = \frac{A_{n_\varepsilon}}{M_{n_\varepsilon}} - \frac{A_{k-1}}{M_{n_\varepsilon}}$.

Se dimostriamo ora che esiste una sottosuccessione j_l tale che $M_{j_l} = A_{j_l}$ il risultato è dimostrato in quanto come n_ε prendiamo gli elementi della sottosuccessione e quindi $\frac{A_{n_\varepsilon}}{M_{n_\varepsilon}} - \frac{A_{k-1}}{M_{n_\varepsilon}} = 1 - \frac{A_{k-1}}{M_{n_\varepsilon}} \geq 1 - \frac{A_{k-1}}{A_{n_\varepsilon}} \geq \frac{1}{2}$

Se non esiste nessuna sottosuccessione j_l tale che $M_{j_l} = A_{j_l}$ allora vuol dire che definitivamente $M_k = B_k$ e quindi $\frac{A_{n_\varepsilon} - A_{k-1}}{M_{n_\varepsilon}} = \frac{A_{n_\varepsilon}}{B_{n_\varepsilon}} - \frac{A_{k-1}}{M_{n_\varepsilon}} \geq \frac{A_{n_\varepsilon}}{B_{n_\varepsilon}} - \frac{A_{k-1}}{B_{n_\varepsilon}} \geq \varepsilon$ in quanto la serie $\sum \frac{a_k}{B_k}$ è divergente.

52.8.2

53.8.2 Scrivendo lo sviluppo decimale di ogni intero, fra $(10)^k$ e $(10)^{k+1}$, la serie in questione si maggiora con

$$\sum_{k_0=1}^{8} \frac{1}{k_0} + \sum_{k_0=0}^{8} \frac{1}{k_0} \sum_{k_1=1}^{8} \frac{1}{(10)\cdot k_1} + \sum_{k_0=0}^{8} \frac{1}{k_0} \sum_{k_1=0}^{8} \frac{1}{(10)\cdot k_1} \sum_{k_2=1}^{8} \frac{1}{(10^2)\cdot k_2} \ldots \leq 8 + \frac{9\cdot 8}{10} + \frac{9\cdot 9\cdot 8}{10^2} + \frac{9\cdot 9\cdot 9\cdot 8}{10^3} + \ldots = 8\sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{9}{10})^k,$$

54.8.2 Sia $N_k = \{k\colon\ 2^{-k-1} \leq d_k \leq 2^{-k}\}$ e sia q_k il più grande intero che sta in N_k. Sia $D_k = \sum^{k} d_i$, $\delta > 0$, e si definisca $c_j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 2^{-k} & j = q_k \\ \dfrac{d_j}{D_j^{1+\delta}} & j \neq q_k \end{cases}$ È chiaro che $\sum c_k < +\infty$ e inoltre $c_{q_k} \geq d_{q_k}$. Se si prendesse $c_{q_k} = k^{-2}$ si avrebbe $\overline{\lim}\, c_k/d_k = +\infty$

• Una seconda dimostrazione è presa da [K] pag.300. Sia c'_k una successione positiva convergente. Essendo $d_k \to 0$, definiamo ricorsivamente una successione di indici $\{n_k\}$ e $\{m_k\}$ nel seguente modo: $d_{n_1} < q_1 c'_1$, $q_j = j^{-1}$. $d_{n_2} < q_2 c'_{m_2}$ dove m_2 è il più piccolo intero tale che $q_2 c'_{m_2} < c'_1$, $d_{n_3} < q_3 c'_{m_3}$ dove m_3 è il più piccolo intero tale che $q_3 c'_{m_3} < c'_{m_2}$ e via dicendo. Ora definiamo una nuova successione $\{c_k\}$ ottenuta da $\{c'_k\}$ scambiando di posto c'_{n_k} con c'_{m_k} e per tutti gli altri indici si ha $c_k = c'_k$. Essendo le serie assolutamente convergenti, $\sum c'_k = \sum c_k$ e inoltre $\frac{c_{n_k}}{d_{n_k}} \geq \frac{1}{q_k}$ e se $q_k \to 0$ otteniamo $\overline{\lim} \frac{c_{n_k}}{d_{n_k}} = +\infty$

• È possibile trovare c_k monotona con d_k monotona? Anche con d_k non monotona ?. In generale non è possibile. Infatti se $c_k \searrow 0$ e $\sum c_k < +\infty$ allora $nc_n \to 0$ e quindi si avrebbe $nd_n \to 0$ per cui d_n deve andare a zero più velocemente di n^{-1}. A questo punto ci si pone la domanda:

Es: Se $nd_n \to 0$ e $\sum d_k = +\infty$, è possibile trovare una successione monotona convergente $c_k \searrow 0$ e $\sum c_k < +\infty$, tale che $c_n \geq d_n$ per infiniti n?

• Un esempio con c_k monotona è dato da $d_k = \frac{1}{k\log_2 k}$ e $c_k = \frac{1}{(n+1)^2 2^{(n+1)^2}\ln 2}$ per $2^{n^2} < k \leq 2^{(n+1)^2}$ al variare di n. Come è evidente $d_{2^{(n+1)^2}} = c_{2^{(n+1)^2}}$ e $c_k \leq d_k$ altrimenti. D'altro canto $\sum_k c_k = \sum_n \sum_{k\colon\ 2^{n^2}<k\leq 2^{(n+1)^2}} \frac{1}{(n+1)^2 2^{(n+1)^2}} < K\sum_n \frac{1}{(n+1)^2} < +\infty$

• In questo caso abbiamo $\overline{\lim} \frac{c_k}{d_k} = +\infty$. Come prima $d_n = \frac{1}{n\log_2 n}$. Sia $q_n = 2^{n^2}$, $q_{n+1} = 2^{(n+1)^2}(1+[\sqrt{n}])$, $q_{n+2} = 2^{(n+2)^2}$, $q_{n+3} = 2^{(n+3)^2}(1+[\sqrt{n+2}])$, e via dicendo. Inoltre sia $c_k = \frac{1}{(n+1)^2 2^{(n+1)^2}}$ per $q_n < k \leq q_{n+1}$. Come prima abbiamo $\sum_k c_k =$

$$= \sum_n \sum_{k:\ q_n<k\le q_{n+1}} \frac{1}{(n+1)^2 2^{(n+1)^2}} < K \sum_n \frac{q_{n+1}-q_n}{(n+1)^2 2^{(n+1)^2}} < K \sum_n \frac{[\sqrt{n}]}{(n+1)^2} < +\infty.$$

Inoltre per $k = q_{n+1}(1+[\sqrt{n}])$ si ha $\dfrac{c_k}{d_k} = \dfrac{\frac{1}{(n+1)^2 2^{(n+1)^2}}}{\frac{1}{(2^{(n+1)^2}+q_n)\log_2(2^{(n+1)^2}+q_n)}} =$

$= \dfrac{2^{(n+1)^2}(1+[\sqrt{n}])\log_2(2^{(n+1)^2}(1+[\sqrt{n}])}{2^{(n+1)^2}(n+1)^2}$ che tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$

55 .8.2 Dimostriamo che $\dfrac{I_k}{k}$ limitata implica $\sum d_{I_k} = +\infty$. Dire $\dfrac{I_k}{k}$ limitata vuol dire $k \le I_k \le Ak$ e quindi $k \le I_k \le [A]k$ da cui $d_k \ge d_{I_k} \ge d_{[A]k}$. Dimostriamo ora che $\sum d_{[A]k}$ diverge. Costruiamo la somma $\displaystyle\sum_{j=k}^{k'} d_{[A]j} = d_{[A]k} + d_{[A](k+1)} + d_{[A](k+2)} + \ldots + d_{[A]k'} \ge$

$$\frac{d_{[A]k} + d_{[A]k+1} + d_{[A]k+2} + \ldots + d_{[A](k+1)-1}}{[A]} +$$

$$+\frac{d_{[A](k+1)} + d_{[A](k+1)+1} + d_{[A](k+1)+2} + \ldots + d_{[A](k+2)-1}}{[A]} + \ldots +$$

$+\dfrac{d_{[A]k'-[A]} + d_{[A]k'-[A]+1} + d_{[A]k'-[A]+2} + \ldots + d_{[A]k'}}{[A]} = \dfrac{1}{[A]}\displaystyle\sum_{j=k[A]}^{k'[A]} d_j \ge \varepsilon$ prendendo k' sufficientemente grande, essendo $\sum d_k$ divergente.

• Viceversa supponiamo che $\dfrac{I_k}{k}$ è illimitata. Vuol dire che esiste una sottosuccessione $\{n_k\}$ tale che $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{I_{n_k}}{n_k} = +\infty$ e scegliamo gli n_k in modo che $\dfrac{I_{n_{k+1}}}{n_{k+1}} \ge q_{k+1}$, $n_{k+1}q_{k+1} \ge 2n_k q_k$; inoltre $q_k \ge 1$. Definiamo la successione $d_j = \dfrac{1}{k^2}$ per $I_{n_k} \le j < I_{n_{k+1}}$. La successione è certamente non crescente e inoltre $\displaystyle\sum_j d_j = \sum_k \sum_{I_{n_k}<j\le I_{n_{k+1}}} d_j \ge \sum_k \sum_{n_k<j\le n_{k+1}} d_j \ge \sum_k \frac{n_{k+1}-n_k}{k^2} = +\infty.$

D'altro canto $\displaystyle\sum_k d_{I_{n_k}} = \sum_k \frac{1}{k^2} < +\infty$

56.8.2 Si prenda $a_k = \dfrac{c_k}{\ln k}$ dove $c_k = 1$ se $k = 3p$, oppure $k = 3p+1$, mentre $c_k = -2$ se $k = 3p+2$. Facciamo vedere che la serie $\sum a_k$ converge. L'osservazione da fare è che $\dfrac{1}{\ln k} + \dfrac{1}{\ln(k+1)} - \dfrac{2}{\ln(k+2)} = \dfrac{3}{k\ln^2 k} + O(\dfrac{1}{k^2})$. Per dimostrare che la serie converge usiamo la proprietà di Cauchy ossia $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon:\ k,k' > n_\varepsilon \ \Rightarrow\ |\displaystyle\sum_{j=k}^{k'} a_k| < \varepsilon$. Supponiamo che k è della forma $k = 3p$ dimodoché $\displaystyle\sum_{j=k}^{k'} a_k$ può essere una delle tre possibilità a seconda che k' sia pari a $3p'-1$, $3p'$ oppure $3p'+1$; 1) $\displaystyle\sum_{j=k}^{k'} a_k = \sum_{j=p}^{p'-1}(\frac{1}{\ln 3j} + \frac{1}{\ln(3j+1)} - \frac{2}{\ln(3j+2)})$ 2) $\displaystyle\sum_{j=k}^{k'} a_k = \sum_{j=p}^{p'-1}(\frac{1}{\ln 3j} + \frac{1}{\ln(3j+1)} - \frac{2}{\ln(3j+2)}) + \frac{1}{\ln(3p')}$ 3) $\displaystyle\sum_{j=k}^{k'} a_k = \sum_{j=p}^{p'-1}(\frac{1}{\ln 3j} + \frac{1}{\ln(3j+1)} - \frac{2}{\ln(3j+2)}) + \frac{1}{\ln(3p')} + \frac{1}{\ln(3p'+1)}$. Nel primo caso abbiamo $|\displaystyle\sum_{j=k}^{k'} a_k| = \sum_{j=p}^{p'-1}(\frac{1}{\ln 3j} + \frac{1}{\ln(3j+1)} -$

$\frac{2}{\ln(3j+2)}) \leq \sum_{j=p}^{p'-1}(\frac{3}{j\ln^2 j}+O(\frac{1}{j^2}))$ e vogliamo che tale quantità sia minore di ε per ogni p grande abbastanza. Innanzitutto prendiamo $p > p_1$ in modo tale che $O(j^{-2}) < \frac{1}{j\ln^2 j}$. Poi stimiamo $\sum_{j=p}^{p'-1}\frac{3}{j\ln^2 j} < \int_p^{p'-1} dx\frac{3}{x\ln^2 x} = \frac{3}{\ln p} - \frac{3}{\ln(p'-1)} < \frac{4}{\ln p} < \varepsilon$ e quindi $p > e^{\frac{3}{\varepsilon}}$ da cui $p \geq \max\{p_1, e^{\frac{3}{\varepsilon}}\} \stackrel{\rm def}{=} p_\varepsilon$ e quindi $n_\varepsilon = 3p_\varepsilon$. Il secondo e terzo caso si trattano allo stesso modo tenendo conto delle piccole ovvie modifiche dovute alla presenza rispettivamente di uno e due addendi.

• Dimostriamo ora che $\sum sgn(a_k)|a_k|^a$ diverge per ogni $a \neq 1$ positivo. L'osservazione chiave è $\frac{1}{\ln^a k}+\frac{1}{\ln^a(k+1)}-\Big(\frac{2}{\ln(k+2)}\Big)^a = \frac{1}{\ln^a k}(2-2^a)+\frac{1}{k}\frac{a}{\ln^{1+a}k}(2^{1+a}-1)+O(k^{-3/2})$ da cui la divergenza non appena $a \neq 1$.

• Nella referenza citata si prende il seguente esmpio $\frac{1}{\ln^a 2}-\frac{1}{2\ln^a 2}-\frac{1}{2\ln^a 2}+\frac{1}{\ln^a 3}-\frac{1}{2\ln^a 3}-\frac{1}{2\ln^a 3}+\frac{1}{\ln^a 4}-\frac{1}{2\ln^a 4}-\frac{1}{2\ln^a 4}+\ldots+\frac{1}{\ln^a n}-\frac{1}{2\ln^a n}-\frac{1}{2\ln^a n}+\ldots$. Anche qui raggruppiamo in gruppi di tre e ciascun gruppo è pari a $\frac{1-2^{1-a}}{(\ln n)^a}$ per cui si ha divergenza ogni volta che $a \neq 1$.

57.8.2 Qualunque sia $x > 0$ esiste un valore intero $k(x)$ tale che $\ln_k(x) > 1$ per $k < k(x)$ e $\ln_k(x) \leq 1$ per $k \geq k(x)$. Ad esempio per $1 \leq x \leq e$ si ha $k(x) = 1$ e quindi $P(x) = \frac{1}{x}$. Se $e < x \leq e^e \Rightarrow P(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$, $e^e < x \leq e^{e^e} \Rightarrow P(x) = \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}$. Essendo $\{P(n)\}$ una successione monotona, essa converge o diverge con l'integrale $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{P(x)}$. Che l'integrale diverge lo si vede osservando che: $\int_1^e \frac{dx}{P(x)} = \int_1^e \frac{dx}{x} = 1$, $\int_e^{e^e}\frac{dx}{P(x)} = \int_e^{e^e}\frac{dx}{x\ln(x)} = 1$, $\int_{e^e}^{e^{e^e}}\frac{dx}{P(x)} = \int_{e^e}^{e^{e^e}}\frac{dx}{x\ln(x)\ln(\ln(x))} = 1$. La divergenza della serie è chiara.

58.8.2 $\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$. $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{x}{2(2k+1)}$ il cui limite è zero per ogni x e quindi la serie converge.

• $\sum_n \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}$. $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{m+n}{n+1} = 1+\frac{m-1}{n+1}+O(\frac{1}{n^2})$ e quindi la serie converge se e solo se $m < 0$. Notare che il criterio della radice non consente di decidere la convergenza o divergenza.

• $\sum n^{-a-\frac{b}{n}}$. Se $a > 1$ la serie converge perché definitivamente si ha $a+\frac{b}{n} \geq a' > 1$. Se $a < 1$ la serie diverge perché definitivamente si avrebbe $a+\frac{b}{n} \leq a' < 1$. Se $a = 1$ e $b \leq 0$ la serie diverge perché $n^{-1-\frac{b}{n}} \leq n^{-1}$. Se $a = 1$ e $b > 0$ bisogna studiare il rapporto $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1-\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^{3/2}})$ e quindi diverge grazie al criterio di Gauss.

• $\sum\frac{n^q}{(n+1)^{p+q}} = \frac{1}{(n+1)^p}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^q} \leq \frac{C_q}{(n+1)^p}$ dove $C_q = \begin{cases} 2 & q < 0 \\ 1 & q \geq 0\end{cases}$ .Quindi la serie converge se $p > 1$. $\frac{n^q}{(n+1)^{p+q}} = \frac{1}{n^p}(1-\frac{p+q}{n}+O(\frac{1}{n^2})) = \frac{1}{n^p}+O(\frac{1}{n^{p+1}}) \geq \frac{1}{2n^p}$ definitivamente e quindi la serie diverge se $p \leq 1$.

• $\sum(\ln n)^{-n} \le \sum 2^{-n}$ definitivamente e quindi converge.

• $\sum(\ln n)^{-\ln n} = \sum e^{-\ln n\cdot\ln(\ln n))} = \sum n^{-\ln(\ln n))} \le \sum n^{-2}$ definitivamente e quindi converge.

• $\sum(\ln(\ln n))^{-\ln n} = \sum n^{\ln(\ln(\ln n))} \le \sum n^{-2}$ definitivamente e quindi converge.

• $\sum \frac{n^n}{e^n n!}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}(1+\frac{1}{n})^n = 1-\frac{1}{2n}+O(\frac{1}{n^2})$ e quindi la serie diverge per il criterio di Raabe

• $\sum \frac{n^n}{e^n(n+1)!}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}(1+\frac{1}{n})^n(1-\frac{1}{n+2}) = \Big(1-\frac{1}{2n}+O(\frac{1}{n^2})\Big)(1-\frac{1}{n+2}) = 1-\frac{3}{2n}+O(\frac{1}{n^2})$ e quindi converge per il criterio si Raabe.

• $\sum \frac{n^{n-1}}{e^n n!}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}\Big((1+\frac{1}{n})^n\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \Big(1-\frac{1}{2n}+O(\frac{1}{n^2})\Big)(1-\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^2})) = 1-\frac{3}{2n}+O(\frac{1}{n^2})$ e quindi converge per il criterio si Raabe.

• $\sum(\ln n)^{-\ln(\ln n)}$. Detto $a_n = (\ln n)^{-\ln(\ln n)}$ si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1-2\frac{\ln(\ln n)}{\ln n}\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^2}\frac{\ln(\ln n)}{\ln n})$ e quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1-\frac{\alpha}{n}+\frac{f(n)}{n^s}$ per, ad esempio, $\alpha=1$, $s=\frac{3}{2}$, $f(n) = \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. Per il criterio di Gauss la serie diverge.

Un metodo più rapido consiste nell'osservare $\sum(\ln n)^{-\ln(\ln n)} = \sum e^{-(\ln\ln n)^2} \ge \sum\frac{1}{n}$ in quanto $\ln(\ln n)^2 \le \ln n$ per n sufficientemente grande.

• Non è detto che la serie $\sum n^{-1-f(n)}$, diverga. Se $f(n)$ tende a zero non troppo velocemente allora la serie può convergere. Se prendiamo $f(n)=n^{-1}$ allora la serie diverge come mostrato prima. Scriviamo ora $n^{-(1-f(n))\ln n}$ e prendiamo $f(n) = \ln_n(\ln n)^r = n^{r(\ln(\ln n))\ln n}$. Ne segue che $n^{-1-f(n)} = \frac{1}{n(\ln n)^r}$. Se $0\le r\le 1$ la serie diverge e converge se $r>1$.

59.8.2 Bisogna usare la formula di Stirling della *funzione* Γ: $\Gamma(x+1) = x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}(1+O(x^{-1}))$ per $x\to+\infty$. Sappiamo che $\Gamma(n+1)=n!$ e quindi la convergenza.

60.8.2 $\sum|\sin k|^\alpha$ diverge per ogni valore di α. Infatti la lunghezza dell'intervallo $[\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi]$ è superiore a 2 e quindi ogni sette interi ve ne è almeno uno che cade dentro l'intervallo $[\frac{\pi}{6}+2n\pi, \frac{5}{6}\pi+2n\pi]$ $n=0,1,\ldots$. Per quel valore intero si ha $\sin k > \frac{1}{2}$. Poiché tali interi sono infiniti, la serie diverge per qualsiasi valore di α.

• La serie $\sum(\sin k)^k$ diverge e lo dimostriamo facendo vedere che "frequentemente" $(\sin k)^k$ è vicino a 1 oppure -1. In linguaggio matematico facciamo vedere che $\overline{\lim}|\sin k|^k = 1$. Essendo $\frac{\pi}{2}$ irrazionale, esistono infinite frazioni per cui $|\frac{\pi}{2}-\frac{p}{q}| < q^{-2}$ e quindi $\pi\frac{q}{2}-\frac{1}{q} < p < \frac{1}{q}+\pi\frac{q}{2}$ e possiamo prendere solo quelle per cui q è dispari. Ma allora segue che $|\sin p| > \cos\frac{1}{q} > 1-\frac{1}{2q^2}$. $|\sin p|^p > (1-\frac{1}{2q^2})^p > (1-\frac{1}{2q^2})^{2q} > 1-\frac{1}{q} > 1-\frac{2}{p}$. Poiché ciò avviene per infiniti p/q la serie diverge.

61 .8.2 La convergenza puntuale per $x\in\mathbf{R}$ è ovvia. La convergenza assoluta si ha per $x\in\mathbf{R}\backslash 0$. Per la convergenza uniforme si può fare ricorso al criterio di Abel e scrivere la serie $\sum_{k=1}^n u_k(x) = \frac{e^{-nx^2}}{n}B_n - \sum_{k=1}^{n-1}(\frac{e^{-(k+1)x^2}}{k+1}-\frac{e^{-kx^2}}{k})B_k$ dove $B_k \stackrel{\rm def}{=} \sum_{i=1}^k(-)^i$ e ovviamente $|B_k|\le 1$.

Si ha $\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{m} u_k(x) = \frac{e^{-nx^2}}{n} B_n - \frac{e^{-mx^2}}{m} B_m - \sum_{k=n+1}^{m} (\frac{e^{-(k+1)x^2}}{k+1} - \frac{e^{-kx^2}}{k}) B_k$. Maggiorando si ha $|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{m} u_k(x)| \le \frac{2}{n} + |(\frac{e^{-(n+2)x^2}}{n+2} - \frac{e^{-mx^2}}{m})| \le \frac{2}{n} + \frac{1}{n+2} \le \frac{3}{n}$ da cui la uniforme convergenza per $x \in \mathbf{R}$. La convergenza totale manca in quanto $\sup_{\mathbf{R}} |\frac{(-)^k}{k} e^{-kx^2}| = \frac{1}{k}$

• Suddividiamo l'intervallo $[-1,1]$ in infiniti sottointervalli $[a_k, b_k]$ di lunghezza 2^{-k}. $a_1 = -1$, $b_1 = -1 + \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = -\frac{1}{4}$ e via dicendo. Sia $0 < \alpha < 1$ e definiamo una successione di funzioni $f_k(x) = \begin{cases} k^{-\alpha}, & x = (a_k + b_k)/2 \\ 2(x - a_k)/k^\alpha 2^k, & a_k \le x \le (a_k + b_k)/2, \\ -2(x - b_k)/k^\alpha 2^k, & (a_k + b_k)/2 \le x \le b_k \\ 0 & x \in [-1,1] \backslash [a_k, b_k] \end{cases}$

Dato N, se $x \in [a_k, b_k]$ con $k \ge N$ allora $\sup_{x \in I} \sum_{k=N}^{+\infty} f_k(x) = \frac{1}{N^\alpha}$ e quindi la successione converge uniformemente. D'altra parte $\sum_{k=N}^{+\infty} \sup_{x \in I} f_k(x) = \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ e quindi la serie diverge.

62.8.2 Dimostriamo per assurdo. Dire che $f_n \to f$ *non uniformemente* significa che $\exists\, \varepsilon > 0 \colon \forall\, n\ \exists\, n_\varepsilon > n, x_{n_\varepsilon} \colon\ f(x_{n_\varepsilon}) - f_n(x_{n_\varepsilon}) > \varepsilon$. Consideriamo una successione illimitata di interi. A ciascun intero corrisponde una coppia $\{n_\varepsilon\}$ e $\{x_{n_\varepsilon}\}$. Essendo K compatto, da tali insiemi estraiamo una successione $\{n\}$ e $\{x_n\}$ tale che $x_n \to \overline{x} \in K$. Dunque abbiamo che $f(x_n) - f_n(x_n) \ge \varepsilon\ \forall\, n$. Poiché $f(x_n) \to f(\overline{x})$ (data la continuità della funzione $f(x)$) si ottiene $f(\overline{x}) - f_n(x_n) \ge \varepsilon\ \forall\, n$ ossia $f(\overline{x}) \ge f_n(x_n) + \varepsilon\ \forall\, n$. Scriviamo $f_n(x_n) = f_n(x_n) - f_n(\overline{x}) + f_n(\overline{x})$ e dimostriamo che $f_n(x_n) = f_n(x_n) - f_n(\overline{x}) \to 0$. Da tale fatto e dal fatto che $f_n(\overline{x}) \to f(\overline{x})$ (per la continuità della f) segue che $f(\overline{x}) \ge \varepsilon + f(\overline{x})$ il che è impossibile. Che $f_n(x_n) - f_n(\overline{x}) \to 0$ deriva dalla uniforme continuità delle funzioni $\{f_n\}$ *e dalla uniforme continuità della* f. La sola uniforme continuità di ciascuna f_n non basta in quanto "il δ" dipende da n e potrebbe andare a zero con esso. Ciò è impedito dal fatto che pure f è uniformemente continua. In dettaglio si scrive: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_{\varepsilon,n} \colon |x - y| < \delta_{\varepsilon,n} \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ e $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \overline{\delta}_\varepsilon \colon |x - y| < \overline{\delta}_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Se si avesse $\inf_n \delta_{\varepsilon,n} = 0$ allora anche $\overline{\delta}_\varepsilon = 0$ in quanto $f(x) - f(y) = f_n(x) - f_n(y) + (f(x) - f_n(x)) + (f(y) - f_n(y))$ per n sufficientemente grande si ha $(f(x) - f_n(x)) + (f(y) - f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Quindi per $|x - y| < \overline{\delta}_{\frac{\varepsilon}{2}}$ si avrebbe $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ per ogni n sufficientemente grande e questo è in contrasto con $\inf_n \delta_{\varepsilon,n} = 0$

- • 1) $K = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$ se $x \in [0,1)$ e $f_n(0) = 0$ (f_n non continua)
- • 2) $K = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$ (f non continua)
- • 3) $K = [-1,1]$, $f_n(x) = nxe^{-n^2(x-\frac{1}{n})^2}$ ($f_n \not\searrow f$, $f_n \not\nearrow f$)
- • 4) $K = [0,1)$ $f_n(x) = x^n$, (K non compatto)

Una dimostrazione leggermente diversa è la seguente. Partiamo sempre dalla definizione di *non uniforme continuità* ossia $\exists\, \varepsilon > 0 \colon \forall\, n\ \exists\, n_\varepsilon > n, x_{n_\varepsilon} \colon\ f(x_{n_\varepsilon}) - f_n(x_{n_\varepsilon}) > \varepsilon$. Ne segue che esiste una successione di interi $\{k\}$ tale che $f(x_k) - f_k(x_k) > \varepsilon$. Sia $A_k \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in K \colon\ f(x) - f_k(x) \ge \varepsilon\}$. $A_k \ne \emptyset$ è chiuso e limitato ed inoltre $A_k \supset A_{k+1}$. Ne segue che $B \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \ne \emptyset$. Dunque esiste $\xi \in B \subset K$ e quindi $\xi \in A_k$ per ogni k. Ma allora $f(\xi) - f_k(\xi) \ge \varepsilon$ per ogni k e questo vorrebbe dire che $f_k(\xi) \not\to f(\xi)$

63.8.2 Dobbiamo far vedere che $\sup_E |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $n > N_\varepsilon$ sapendo che $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $n > N_{\varepsilon,x}$. Essendo E compatto abbiamo che $\forall\ r\ \exists\ E_1, \ldots, E_{m_r} : (diam E_i) < r\ \wedge\ E = \bigcup_{k=1}^{m_r} E_i$. Sia $a_i \stackrel{\rm def}{=} \inf_{E_i} x_i$, $b_i \stackrel{\rm def}{=} \sup_{E_i} x_i$, . Ora $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ vuol dire $f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon$ e quindi, se $x \in E_i$, $f_n(a_i) - \varepsilon < f(x) < f_n(b_i) + \varepsilon$. La funzione f_n è uniformemente continua ossia $\forall\ \varepsilon\ \exists\ \delta_n :\ |x - y| < \delta_n \ \Rightarrow\ |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ e se $r \stackrel{\rm def}{=} r_n < \delta_n$ allora $f_n(b_i) - f_n(a_i) < \varepsilon$. Inoltre segue che, per ogni $n' > n$ si ha $f_{n'}(b_i) - f_{n'}(a_i) \le \varepsilon$ dalla convergenza della successione $f_n \to f$. Ne segue che $\sup_{E_i} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Essendo gli insiemi E_i in numero finito, si ottiene il risultato.

64.8.2 Dobbiamo far vedere che $\forall\ \varepsilon >\ \exists\ N_\varepsilon : n, m > N_\varepsilon \ \Rightarrow\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ sapendo che $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in D$ $n, m > N_\varepsilon$ e che $\{f_n\}$ è equicontinua. Sia $x \in E \backslash D$, $f_n(x) - f_m(x) = (f_n(x) - f_n(\xi)) + (f_n(\xi) - f_m(\xi)) + (f_m(\xi) - f_m(x))$ dove $\xi \in D$ è scelto in modo che: $|f_n(x) - f_n(\xi)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ per ogni n data la equicontinuità della famiglia di funzioni. Per ogni n, m sufficientemente grandi si ha $|f_n(\xi) - f_m(\xi)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ e quindi per n, m sufficientemente grandi si ha $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

• si enumerino i razionali $\{r_k\}$ e si prenda la successione di funzioni $f_k(x) \stackrel{\rm def}{=} e^{-k^2(x - r_k)^2}$. La successione non converge per ogni x razionale e converge al valore 0 per ogni irrazionale Diofantino. Infatti $\lim_{k \to +\infty} f_k(x) = 0$ se esistono ε, C costanti tali che $|x - r_k| \ge \dfrac{C}{|k|^{1+\varepsilon}}$ per ogni $k \ne 0$. D'altra parte, dato r_q consideriamo due successioni $\hat r_k \stackrel{\rm def}{=} r_q + \dfrac{1}{k^2}$ e $r'_k \stackrel{\rm def}{=} r_q + \dfrac{1}{k^4}$. $\lim_{k \to +\infty} f_k(\hat r_k) = 0$, $\lim_{k \to +\infty} f_k(r'_k) = 1$, . Ne segue che la successione $\{f_k(x)\}$ non può essere equicontinua. Si prendano i punti $x_k = r_k$ e $y_k = r_k + \dfrac{1}{k}$ da cui $f_k(x_k) - f(y_k) = 1 - e^{-k^{-2}} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 1$ anziché zero come dovrebbe se la successione di funzioni fosse equicontinua.

• Dimostriamo ora che se $\{f_n\}$ equicontinua, E compatto e f_n convergente per ogni $x \in E$, allora la convergenza è uniforme. Dobbiamo mostrare che $\sup_E |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $n > N_\varepsilon$ sapendo che $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $n > N_{\varepsilon,x}$. Essendo E compatto abbiamo che $\forall\ r\ \exists\ E_1, \ldots, E_{m_r} : (diam E_i) < r\ \wedge\ E = \bigcup_{k=1}^{m_r} E_i$. Sia $a_i \stackrel{\rm def}{=} \inf_{E_i} x_i$, $b_i \stackrel{\rm def}{=} \sup_{E_i} x_i$, . Abbiamo $f_n(x) - \varepsilon < f_m(x) < f_n(x) + \varepsilon$. Dalla equicontinuità e dalla compattezza di E, si ha che $n > N_{\varepsilon,i} \ \Rightarrow\ \sup_{E_i} f_n(x) - \inf_{E_i} f_n(x) < \varepsilon$. Ne segue che $n > N_{\varepsilon,i} \ \Rightarrow\ \sup_{E_i} |f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon$. Dalla finitezza della famiglia E_i segue il risultato.

• R.: $E = [0, 1]$ $f_n(x) = x^n$. Che la famiglia non è equicontinua lo si vede prendendo le due successioni $y_k = 1$, e $x_k = 1 - \dfrac{1}{n}$. $y^n - x^n = (y - x) \sum_{i=0}^{n-1} x^i y^{n-i-1} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \dfrac{1}{n})^{n-1-i} =$
$\dfrac{1}{n}(1 - \dfrac{1}{n})^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \dfrac{1}{n})^{-i} \ge \dfrac{1}{n}(1 - \dfrac{1}{n})^{n-1} n (1 - \dfrac{1}{n})^{-n} \to 1$ e quindi la famiglia non è equicontinua.

65.8.2

66.8.2

67.8.2 Per dimostrare la uniforme convergenza in un intervallo $0 \le t \le t_0 < t_1$ basta osservare che il raggio di convergenza della serie è $\overline{\lim} |a_k|^{-1/k} \stackrel{\rm def}{=} r \ge t_1$. Duque per $0 \le t \le t_0 < t_1$ si maggiora la serie con una serie di potenze uniformemente convergente. Se però abbiamo

$r = t_1$ il ragionamento precedente non vale più . Bisogna scrivere $\sum\limits_{k=p}^{q} a_k t_1^k (\frac{t}{t_1})^k$ e usare la trasformazione di Abel (tralasciamo i dettagli). Essenziale è il fatto che $(\frac{t}{t_1})^k \searrow 0$. Altrettanto importante è notare che se si trattasse di serie di potenze complesse il teorema ci darebbe *la convergenza uniforme su ogni raggio all'estremo del quale la serie converge.* Non è detto che la convergenza sia uniforme sull'insieme dei raggi. Ad esempio la serie di potenze $\sum \frac{z^k}{k^2}$ converge uniformemente su ogni raggio e uniformemente su tutti i raggi ossia uniformemente su tutto il cerchio di raggio 1 in virtù del fatto che la serie di n^{-2} converge. Viceversa la serie $\sum \frac{z^k}{k}$ converge per ogni $|z| \leq 1$ $z \neq 1$ (è maggiorata da una serie di potenze per $|z| < 1$ e si usa il criterio di Abel per $|z| = 1$) ma non converge uniformemente su $\{|z| \leq 1, z \neq 1\}$. Basta far vedere che $\exists\ \varepsilon > 0$: $\forall\ N\ \exists\ p, q > N,\ t > \tau$: $\sum\limits_{k=p}^{q} (\frac{t^k}{k} - \frac{\tau^k}{k}) \geq \varepsilon$. Prendiamo $t_k = 1 - \delta_k$ tale che $\delta_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, $k\delta_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ e $\tau_k = \frac{1}{2}$. È facile vedere che $t_k^k = 1 - k\delta_k + O(k^2\delta_k^2) \geq \frac{1}{2}$ se k è abbastanza grande e quindi la convergenza non è uniforme.

68.8.2 Per il teorema precedente la serie $\sum a_k t^k$ è continua su $0 \leq t \leq t_1$ e quindi $\lim\limits_{t\to 1} \sum a_k t^k = \sum a_k t_1^k = \lim\limits_{t\to 1} f(t) \stackrel{\rm def}{=} f(t_1)$.

69.8.2 La funzione $f(t)$ è crescente limitata e quindi ammette come limite l'estremo superiore nell'insieme $0 \leq t < 1$. Poiché $a_k \geq 0$ tale estremo superiore è $\sum a_k$.

• Se manca l'ipotesi $\sum a_k t_k \leq C$ per ogni $0 \leq t < 1$ un controesempio è $a_k \equiv 1$.

70 .8.2 Se $b = 0$ converge per ogni a positivo. Se $b \neq 0$ converge per $a > \frac{1}{2}$ e diverge altrimenti. Se $b = 0$ e $a > 0$ si usa il teorema di Abel. Se $b \neq 0$ si scrive $\frac{\sin k}{k^a + b\sin k} - \frac{\sin k}{k^a} = \frac{-\sin^2 k}{k^a(k^a + b\sin k)}$. Ora $\sum \frac{\sin k}{k^a}$ converge per il Teorema di Abel. $\sum \frac{-\sin^2 k}{k^a(k^a + b\sin k)}$ converge assolutamente se $a > \frac{1}{2}$ mentre per $a \leq \frac{1}{2}$ diverge e questo lo si vede scrivendo $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ e usando ancora una volta Abel.

71.8.2 $\boxed{a \leq 0}$ abbiamo $k^{-a-\sin k} \geq k^{-\sin k} \not\to 0$ e quindi la serie non può convergere.

$\boxed{a = 1}$ Suddividiamo gli interi in gruppi di 4 ($\{1, 2, 3, 4, \}$, $\{5, 6, 7, 8, \}$, etc.), in ogni gruppo vi è un intero, diciamo k_j per cui $\sin k_j < 0$ e quindi $k_j^{-1-\sin k_j} \geq k_j^{-1}$ da cui la divergenza in quanto $\sum k^{-1-\sin k} \geq \sum\limits_j (k_j)^{-1-\sin k_j} \geq \sum\limits_{j=1}^{+\infty} (4j)^{-1}$. Se

$\boxed{1 < a < 2}$ Facciamo ricorso a una parte dell'esercizio 1.5*** e in particolare al fatto che la successione $\{k\omega\}$ è densa sul cerchio se $\frac{\omega}{\pi}$ è irrazionale (nel nostro caso $\omega = 1$). In tal caso, dato $\varepsilon > 0$, esistono due interi k_1 e k_2 tale che $\|k_1\omega - k_2\omega\| < \varepsilon$ ($\|\cdot\|$ è la distanza sul cerchio ossia $\|\alpha - \beta\| = \min\limits_{k\in\mathbf{Z}} |\alpha - \beta - k\pi\}|$). Ora $|\sin j(k_1\omega) - \sin j(k_2\omega)| \leq |\sin j(k_1\omega - k_2\omega)| \leq \|jk_1\omega - jk_2\omega\| = \|k_1\omega - k_2\omega\| < \varepsilon$. La successione $\{j(k_1 - k_2)\}$ è una sottosuccessione della successione $\{k\}$ e quindi dopo $N_0 \stackrel{\rm def}{=} \left[\frac{2\pi}{\|k_1 - k_2\|}\right] + 1$ interi la successione $\{j(k_1 - k_2)\}$ ha percorso l'intera circonferenza e ogni passo è lungo meno di ε. Ciò vuol dire che se suddividiamo gli interi in gruppi di N_0 elementi, avremo infiniti interi j per cui $|\sin j(k_1 - k_2) + 1| < \varepsilon$ ossia $-1 - \varepsilon <$

$\sin j(k_1-k_2) < -1+\varepsilon$. Sia A l'insieme degli interi j per cui è vera la precedente disuguaglianza. Otteniamo $\sum k^{-a-\sin k} \geq \sum_{j\in A}(j(k_1-k_2))^{-a-\sin j(k_1-k_2)} \geq \sum_{j\in A}(j(k_1-k_2))^{-a+1-\varepsilon} = +\infty$ in quanto ogni N_0 elementi almeno uno appartiene ad A.

$\boxed{a>2}$ La serie converge in quanto $k^{-a-\sin k} \leq k^{-a+1}$ e $1-a<-1$ da cui la convergenza.

72 .8.2 Se non converge allora la successione delle somme parziali $\sum_{k=3}^{n}\frac{\sin\ln\ln k}{k\ln k}$ non è di Cauchy e quindi $\exists\,\varepsilon>0\ :\ \forall\,N\geq 0\ \exists\,M>N,\ J>N\ :\ \sum_{k=M}^{J}\frac{\sin\ln\ln k}{k\ln k}>\varepsilon$. Consideriamo le equazioni $\ln\ln x = q\pi$ e $\ln\ln x=\pi(q+1)$ che ci danno $x_q=e^{e^{q\pi}}$ e $x_{q+1}=e^{e^{(q+1)\pi}}$ e poi l'intervallo $([x_q]+1,[x_{q+1}]-1)$. Inoltre risolviamo le equazioni $\ln\ln x=\frac{\pi}{2}+q\pi$ e $\ln\ln x=-\frac{\pi}{6}+\pi(q+1)$ che ci danno le soluzioni $x'_q=e^{e^{\frac{\pi}{2}+q\pi}}$ e $x'_{q+1}=e^{e^{-\frac{\pi}{6}+(q+1)\pi}}$ e conseguentemente consideriamo l'intervallo $([x'_q]+1,[x'_{q+1}]-1)\subset([x_q]+1,[x_{q+1}]-1)$. Supponendo che nell'intervallo $([x_q]+1,[x_{q+1}]-1)$ la funzione $\frac{\sin\ln\ln x}{x\ln x}$ sia positiva, si ha (sarebbe lo stesso se fosse negativa) $\sum_{k=[x_q]+1}^{[x_{q+1}]-1}\frac{\sin\ln\ln k}{k\ln k} > \frac{1}{2}\sum_{k=[x'_q]+1}^{[x'_{q+1}]-1}\frac{1}{k\ln k} > \frac{1}{2}\frac{x'_q-x_q}{x'_q\ln(x'_q)}$ e quest'ultima è una quantità che tende all'infinito quando $q\to+\infty$.$\blacksquare$

73.8.2 Sia $N_k=\{k\colon 2^{-k}\leq d_{n_k}<2^{-k+1}\}$ e sia M_k il più grande dei $k\in N_k$. Dal fatto che $d_k\to+\infty$ segue che se $j\notin N_k$ allora $d_j<2^{-k}$ oppure $d_j\geq 2^{-k+1}$. Si definisce $c_j=\frac{1}{M_k}\frac{1}{\sqrt{d_{M_k}}}$ per ogni $k\in N_k$. La successione $\{c_k\}$ è monotona decrescente in quanto $M_{k+1}\geq M_k$ e inoltre $d_{M_k}\leq d_{M_{k+1}}$. La serie $\sum c_k$ converge in quanto $\sum c_k=\sum_k\sum_{j\in N_k}c_j\leq\sum_k\frac{1}{\sqrt{d_{M_k}}}\leq\sum_k 2^{-k/2}$. Inoltre $M_kc_{M_k}d_{M_k}=\sqrt{d_{M_k}}$ che tende all'infinito per $k\to+\infty$

74.8.2 $c_k=\frac{1}{(n+1)^2 2^{(n+1)^2}\ln 2}$ per $2^{n^2}<k\leq 2^{(n+1)^2}$ al variare di n.

$\sum_k c_k=\sum_n\sum_{k\colon 2^{n^2}<k\leq 2^{(n+1)^2}}\frac{1}{(n+1)^2 2^{(n+1)^2}\ln 2}<K\sum_n\frac{1}{(n+1)^2}<+\infty$. Per $k_n=2^{(n+1)^2}$ si ha $k_na_{k_n}\ln k_n=1$

75.8.2 $n-m\geq 1$ implica che $a_k\leq k^{-2}$ e quindi la serie converge. Per la somma si scriva $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ e si utilizzino le serie telescopiche. Il risultato è $\frac{m!}{(n-m)n!}$

76 .8.2 Si scriva $\frac{a_k}{(1+a_1)\dots(1+a_k)}=\frac{1+a_k}{(1+a_1)\dots(1+a_k)}-\frac{1}{(1+a_1)\dots(1+a_k)}$ per cui $\sum_{k=1}^{N}a_k=\sum_{k=1}^{N}(b_{k-1}-b_k)$ dove $b_k=\frac{1}{(1+a_1)\dots(1+a_k)}$ e $b_0=1$. Ne segue che $\sum_{k=1}^{N}a_k=1-b_N=1-\frac{1}{\prod_{k=1}^{N}(1+a_k)}=1-\exp(-\sum_{k=1}^{N}\ln(1+a_k))$ e quindi se $\sum_{k=1}^{+\infty}\ln(1+a_k)=S$ allora $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k=1-e^{-S}$ (si intende 1 se $S=+\infty$)

77.8.2

78.8.2

79.8.2 2) Sia $S_n(x)\doteq\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)m+1}+\ldots+\frac{1}{km-1}-\frac{x}{km}$. $S_n(x)-S_n(y)=\frac{x-y}{m}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{m}$ e la serie diverge a meno che $x=y$. Per calcolare il valore di x che dà convergenza e poi la somma della serie osserviamo che $\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}=\ln n+\gamma_n$ dove $\gamma_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$ e γ è la costante di Eulero.

$$S_n(x)\doteq\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)m+1}+\ldots+\frac{1}{km-1}+\frac{1}{km}-\frac{x}{km}-\frac{1}{km}=$$
$$=\sum_{k=1}^m\frac{1}{k}+\sum_{k=2}^n\Big(\frac{1}{(k-1)m+1}+\ldots+\frac{1}{km-1}+\frac{1}{km}\Big)-\sum_{k=1}^n\frac{x}{km}-\sum_{k=1}^n\frac{1}{km}=$$
$$=\sum_{k=1}^m\frac{1}{k}+\sum_{k=2}^n\Big\{\sum_{j=1}^{km}\frac{1}{j}-\sum_{j=1}^{(k-1)m}\frac{1}{j}\Big\}-\sum_{k=1}^n\frac{x}{km}-\sum_{k=1}^n\frac{1}{km}=$$
$$=\ln m+\gamma_m+\sum_{k=2}^n\big((\ln(km)-\ln((k-1)m)+\gamma_{km}-\gamma_{(k-1)m}\big)-\frac{x+1}{m}(\ln n+\gamma_n)$$
$$=\ln m+\gamma_m+\big((\ln(nm)-\ln m+\gamma_{nm}-\gamma_m\big)-\frac{x+1}{m}(\ln n+\gamma_n)=$$
$$=\ln m+\gamma_m+\ln m-\ln m+\gamma_{nm}-\gamma_m-\frac{x+1}{m}\gamma_n+(1-\frac{x+1}{m})\ln n$$

e nel limite $n\to+\infty$, prendendo $x=m-1$, si ha il risultato $\ln m$

80.8.2 $2\sum_{k=1}^r\frac{\sin(k^2x)\sin kx}{k}=\sum_{k=1}^r\frac{\cos k(k-1)x-\cos k(k+1)x}{k}=$

$=\sum_{k=1}^r\frac{\cos k(k-1)x}{k}-\frac{\cos k(k+1)x}{k+1}+\sum_{k=1}^r\frac{\cos k(k+1)x}{k+1}-\frac{\cos k(k+1)x}{k}=1-\frac{\cos r(r+1)x}{r+1}+$ $\sum_{k=1}^r\frac{\cos k(k+1)x}{k+1}-\frac{\cos k(k+1)x}{k}=1-\frac{\cos r(r+1)x}{r+1}-\sum_{k=1}^r\frac{\cos k(k+1)x}{k(k+1)}$ e quindi la serie converge uniformemente.

- $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(k^2x)\sin kx}{k}$ si risolve come prima.
- $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(k^2x)\cos kx}{k}$ converge per alcuni punti e diverge per altri. Sia $x=\pi\frac{p}{q}$ con p e q primi fra di loro. Riscriviamo la serie nel seguente modo $\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{r=1}^{q-1}\frac{1}{qk-r}\sin\big((qk-r)^2\pi\frac{p}{q}\big)\cos(qk-r)\pi\frac{p}{q}=$ $\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{r=1}^{q-1}\frac{1}{qk-r}\sin\big(r^2\pi\frac{p}{q}\big)\cos(\pi r\frac{p}{q}-\pi kp)$. Se p è dispari, quindi q pari, cisacuna delle $q-1$ serie è una serie di Leibnitz. Se p è pari la questione è più complicata. Ad esempio prendiamo $p=2$ e $q=3$. Abbiamo $\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{r=1}^{q-1}\frac{1}{3k-r}\sin r^2\pi\frac{2}{3}\cos\pi r\frac{2}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{1}{3k-1}+\frac{1}{3k-2})$ e quindi diverge.
- $\sum\cos(k^2x)$. Sia $x=\pi\frac{p}{q}$ con p,q interi qualsiasi (tali punti sono densi sulla retta). Se $k=2qN$ con N intero allora $\cos(k^2x)=\cos(4qN^2p\pi)=1$ e quindi il termine generico della serie non tende a zero.

81.8.2 Studiamo il caso di $p=2$. La serie converge. La possiamo scrivere come $\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{4k-3}+$

$\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k}) = \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{4}{k^2} + O(k^{-3})$ da cui la convergenza. Va detto che l'avere raggruppato i vari termini della serie ed avere ottenuto una serie convergente non sempre è lecito. In altre parole la convergenza della serie raggruppata non sempre dà luogo alla convergenza della serie originaria. Si consideri infatti la serie $\sum(-)^k$ che chiaramente diverge. Viceversa la serie in cui raggruppo due termini vicini è la serie nulla e converge. La procedura giusta per sapere se un raggruppamento è efficace o no passa attraverso la proprietà di Cauchy $\forall\ \varepsilon\ \exists\ k_\varepsilon :\ p,q > k_\varepsilon \ \Rightarrow\ |\sum_{k=p}^{q} a_k| < \varepsilon$ ed il punto essenziale è notare che ora si tratta di una somma finita in cui si possono effettuare tutti i raggruppamenti che si vogliono. È superfluo sottolineare che $|\sum_{k=p}^{q}(-)^k| = 1$ e quindi la serie diverge.

82.8.2 La serie converge. Usiamo il criterio di Cauchy. Nella somma $\sum_{k=p}^{q} a_k$ scegliamo p e q in modo tale che $\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{n=n_0}^{n_1} (-)^n \sum_{k=\frac12 n(n-1)+1}^{\frac12 n(n+1)} \frac{1}{k} = \sum_{n=n_0}^{n_1} (-)^n \big(\ln(\frac12 n(n+1)) - \ln(\frac12 n(n-1) - 1) + \gamma_{\frac12 n(n+1)} - \gamma_{\frac12 n(n-1)+1}\big)$.

$\ln(\frac12 n(n+1)) - \ln(\frac12 n(n-1)-1) = \frac{2}{n} + O(n^{-2})$. $\gamma_k = \frac{1}{2k} + O(k^{-2})$ da cui si ha $|\sum_{n=n_0}^{n_1} \big((-)^n \frac{2}{n} + O(n^{-2})\big)| < \varepsilon$ per qualsiasi n_0 sufficientemente grande.

L'estensione al caso in cui p e q non consentono di scrivere $\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{n=n_0}^{n_1} (-)^n \sum_{k=\frac12 n(n-1)+1}^{\frac12 n(n+1)} \frac{1}{k}$ si ottiene facilmente. Ad esempio supponiamo che

$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{n=n_0}^{n_1} (-)^n \sum_{k=\frac12 n(n-1)+1}^{\frac12 n(n+1)} \frac{1}{k} + (-)^{n_1+1} \sum_{k=\frac12 n_1(n_1+1)+1}^{\frac12 (n_1+1)(n_1+2)-1} \frac{1}{k} +$

Si verifica che il terzo pezzo tende a zero per $n_1 \to +\infty$

83.8.2 Scegliamo p e q in modo che $\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{n=n_0}^{n_1} (-)^n \sum_{k=2^n+1;}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{n=n_0}^{n_1} (-)^n \big(\ln(2^{n+1}) - \ln(2^n+1) + \gamma_{2^{n+1}} - \gamma_{2^n+1}\big) \sim \sum_{n=n_0}^{n_1} (-)^n \ln 2$ che chiaramente non può essere reso piccolo a piacere.

.

Referenze

[B] T.J.I'A Bromwich *An Introduction to the Theory of Infinite Series* Mac Millan and CO., Limited

[Ba1] N.K.Bary *A Treatise on Trigonometric Series, Vol.1* Pergamon Press

[Ba2] N.K.Bary *A Treatise on Trigonometric Series, Vol.2* Pergamon Press

[HLP] Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G.: *Inequalities* , Cambridge University Press, second edition 1952

[WW] E.T. Whittaker & G.N.Watson: *A course of modern analysis* Cambridge University Press, Ristampa del 1992 della quarta edizione del 1927 (prima edizione nel 1902)

[H1] Einar Hille: *Analytic Function Theory* Vol.1, Chelsea Publishing Company, 1959

[K] Konrad Knopp: *Theory and Application of Infinite Series* Hafner Publishing Company New York, 1971

[M] A.I Markushevich: *Theory of functions of a complex variable* vol.I, Prentice Hall (1965);

[LC] M. Lavrentiev, E.T.B. Chabat: *Méthodes de la téorie des fonctions d'une variable complex* Edizioni Mir, 1972

[S] K.R-Stromberg: *An Introduction to Classical Real Analysis* Chapman & Hall (1981)