Corsi di laurea in ingegneria aerospaziale e ingegneria meccanica
Prova scritta di Fondamenti di Analisi Matematica II

Padova, 25.1.2013

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **motivare** le risposte.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Dire se nell'insieme D la funzione f ammette massimo e/o minimo ed eventualmente trovarli, dove

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, |x^2+y^2-1| \leqslant z \leqslant 2\right\}, \quad f(x,y,z) = \arccos\left(\frac{z+x}{2+\sqrt{3}}\right).$$

2. Data la funzione $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita da

$$F(x,y,z) = \big(z + \log(z-1)\big)\big(xy + e^x\big)$$

si mostri che l'equazione $F(x,y,z) = 0$ definisce implicitamente una funzione f di due variabili in un intorno del punto $P_o = (1,-e,2)$, specificando quali sono le due variabili. Detta $\tilde{P}_o$ la proiezione del punto P_o nel piano individuato da queste due variabili, si dica se il punto $\tilde{P}_o$ è stazionario per f.
Se sì, si dica se può essere un punto di minimo.

3. Data l'equazione differenziale $y''' - 2y'' + 5y' = 4$ se ne trovi l'integrale generale. Si indichino poi le eventuali soluzioni che soddisfano

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)-1}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)-1}{t} = \frac{4}{5}.$$

4. Data la curva

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t^2 + t^{2/3}, t^2 + t^{1/3}) & \text{se } t \in [0,1]\,, \\ (\log(e+1-t)^2, \log^2(e+1-t)^2) & \text{se } t \in (1,e]\,, \end{cases}$$

a) si verifichi che la curva è semplice e chiusa;
b) denotata con ν la normale esterna alla regione limitata che ha come bordo la curva γ e con F il campo di vettori $F(x,y) = (y^{1/3}, x^{2/3})$ si calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \langle F, \nu \rangle \, ds\,.$$

5. Si calcoli il volume dell'insieme

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, y^2 \leqslant z\,,\ 2 - x^2 - y^2 \geqslant z\right\}.$$

Corsi di laurea in ingegneria aerospaziale e ingegneria meccanica
Prova scritta di Matematica 3

Padova, 25.2.2013

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **motivare** le risposte.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Dato l'insieme $D = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 - 4y \leqslant 0,\ y \geqslant x,\ y \geqslant -x\big\}$ si calcoli

$$\int_{\partial D^+} x(y-2)dx + x^2 dy\,.$$

2. Data l'equazione differenziale $xyy' = y^2 - 4$
a) se ne trovino tutte le soluzioni;
b) si dica se esiste una soluzione dell'equazione soddisfacente $y(3) = 2$. Motivare la risposta.

3. Si trovino, se esistono, il massimo e il minimo della funzione

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{y^2 - x^2} \qquad \text{definita in } E = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, x^2 + y^2 \leqslant 2\big\}.$$

4. Dati la superficie di rotazione S definita da

$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \text{con } (x, y) \in C := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$$

e il campo di vettori $F(x, y, z) = (x, y, z)$ si calcoli il flusso $\int_S \langle F, \nu\rangle d\sigma$ del campo F attraverso la superficie S orientando la normale ν a S in modo tale che la terza componente di ν risulti positiva.

5. Data la funzione $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$F(x, y) = (\cos y)\,(\log x) + (y - \pi)^2,$$

a) si dica se l'equazione $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $f = f(y)$ tale che $F(f(y), y) = 0$ in un intorno del punto $(1, \pi)$. Si verifichi che il punto π è stazionario per f e se ne studi la natura;
b) si consideri la funzione $G(x, y, z) = (\cos y)\,(\log x) + (y - \pi)^2$, cioè $G(x, y, z) = F(x, y)$. Si risponda alle seguenti domande solo basandosi su quanto ottenuto nel punto a): è possibile dire che in un intorno del punto $(1, \pi, 2)$ soddisfacente $G(1, \pi, 2) = 0$ esiste $g = g(y, z)$ tale che $G(g(y, z), y, z) = 0$? Se sì, è possibile dire se il punto $(\pi, 2)$ è stazionario per g ed eventualmente dire quale sia la sua natura per la funzione g?

2. Si trovino, se esistono, il massimo e il minimo della funzione $f(x,y,z) = z+x^2-4x$ oppure $f(x,y,z) = z + x^2 - 4x + y^2$ (la seconda è costante nell'ellisse) definita nell'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z \geqslant x^2 + y^2,\ z \leqslant 2x\}.$$

2. Si trovino, se esistono, il massimo e il minimo della funzione $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{y^2-x^2}$ nell'insieme

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqslant 2\right\}.$$

3. Si calcoli il volume dell'insieme E descritto nell'esercizio precedente.