

Corso di laurea: Fisica ed Astronomia
Programma di **Analisi Matematica 2** – a.a. 2016/17
Docente: Fabio Paronetto

Gli argomenti denotati con un asterisco tra parentesi (e solo quelli) sono stati dimostrati.

27.2.2017 Introduzione al corso.

Serie numeriche: successione delle somme parziali, definizione di serie, definizione di carattere di una serie. Criterio di Cauchy (*). La serie armonica diverge positivamente (*). Condizione necessaria affinché una serie $\sum a_n$ converga è che $\lim a_n = 0$ (*). La serie geometrica e la sua somma. Altri esempi. Operazioni con le serie.
Serie a termini positivi: criterio del confronto (*).

28.2.2017 Criterio del confronto asintotico (*). Criterio del rapporto (*) e suo corollario (*). Criterio della radice n -esima (*) e suo corollario (*). Esempi. Disuguaglianze tra $\liminf_n$ e $\limsup_n$ delle quantità $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ e $\sqrt[n]{a_n}$ ($\{a_n\}_n$ successione a termini positivi). Esempi. Criterio di condensazione di Cauchy (*).

1.3.2017 Commenti sul criterio di condensazione di Cauchy. Serie armonica generalizzata. Criterio di Leibniz (*).

Serie a termini complessi: convergenza di una serie a termini complessi, convergenza assoluta. Una serie assolutamente convergente è convergente (*). Esempi ed esercizi.

6.3.2017 Riordinamento di una serie: data una serie $\sum_n a_n$ convergente a S e assolutamente convergente si ha che ogni riordinamento di $\sum_n a_n$ è convergente a S ; data una serie $\sum_n a_n$ convergente, ma non assolutamente convergente si ha che per ogni $L \in [-\infty, +\infty]$ esiste un riordinamento di $\sum_n a_n$ che ha come somma L .

Esercizi sulle serie numeriche.

7.3.2017 Integrali generalizzati: definizione, commenti, primi esempi. Comportamento di $\int_1^\infty x^{-\alpha} dx$ e $\int_0^1 x^{-\alpha} dx$ per $\alpha > 0$. Criterio del confronto e criterio del confronto asintotico per funzioni non negative (*). Esempi. Convergenza assoluta: se il modulo di una funzione f è integrabile in senso generalizzato, lo è anche f (*). Esempi. Integrale generalizzato della funzione di Gauss.

- 8.3.2017 Criterio integrale per le serie numeriche (*). Esempi. Andamento all'infinito di serie divergenti positivamente. Stima dell'errore tra la somma e le somme parziali di una serie convergente. Integrali oscillanti. Teorema: $\int_0^{+\infty} f(x) \sin x \, dx$ e $\int_0^{+\infty} f(x) \cos x \, dx$ convergono se f è limitata, positiva, decrescente e infinitesima all'infinito (*). Criterio di Abel. Esempi ed esercizi. La Gamma di Eulero.
- 13.3.2017 Esercizi su integrali impropri.
- 14.3.2017 Qualche altro esercizio su integrali impropri.
 Successioni di funzioni: definizioni di convergenza puntuale e uniforme. Commenti. La convergenza uniforme implica la puntuale (*). Data una successione di funzioni continue puntualmente convergente ad una funzione continua, se $(f_n)_n$ è monotona in n allora converge uniformemente sui compatti (*). Esempi e controesempi. Passaggio al limite sotto il segno di integrale per funzioni continue su intervalli limitati (*). Passaggio al limite sotto il segno di derivata per funzioni di classe C^1 su intervalli limitati (*).
- 15.3.2017 Serie di funzioni: definizioni di convergenza puntuale, uniforme, assoluta puntuale, assoluta uniforme, totale. Criterio di Cauchy (*). La convergenza totale implica la uniforme (criterio di Weierstass) (*). Commenti ed esempi sulla differenza tra convergenza totale ed uniforme. Continuità del limite, integrazione per serie, derivazione per serie (*).
 Esercizi sulla convergenza di successioni di funzioni.
- 20.3.2017 Esercizi sulla convergenza di serie di funzioni.
- 21.3.2017 Serie di potenze in $\mathbf{C}$: definizione e proprietà (*) (raggio di convergenza, insiemi di convergenza assoluta e totale). Esempi. Caso reale: se una serie di potenze converge in $(x_o - \rho, x_o + \rho)$ ad una funzione f allora anche la serie delle derivate termine a termine e delle primitive termine a termine hanno lo stesso raggio di convergenza e convergono rispettivamente a f' e a $F - F(x_o)$, F primitiva di f (*). Esempi. Serie di Taylor. Definizione di funzione sviluppabile in serie di Taylor e funzione analitica reale. Criterio di sviluppabilità. Esempi. La serie $\sum x^n/n!$.
- 22.3.2017 Alcuni sviluppi di Taylor in $\mathbf{R}$. Altri esempi. Caso complesso: definizione di funzione continua e olomorfa, definizione di funzione analitica complessa. Esempi. Definizione di funzione esponenziale, seno, coseno e logaritmo nel campo complesso. Alcune proprietà della funzione esponenziale. Per $x \in \mathbf{R}$ vale $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (*). Esempi di funzioni analitiche complesse e confronto con le analoghe reali.

27.3.2017 Esercizi sulle serie di potenze.

Introduzione alla topologia in $\mathbf{R}^n$: definizione di prodotto scalare, di norma, di distanza. Commenti ed esempi. Esempi di spazi normati e di spazi metrici. Ogni prodotto scalare induce una norma, ma non tutte le norme sono indotte da un prodotto scalare; ogni norma induce una distanza, ma non tutte le distanze sono indotte da una norma. Esempi di norme diverse su $\mathbf{R}^n$ e di distanze non indotte da una norma. Disuguaglianza di Schwarz (*). Definizione di insieme aperto, di insieme chiuso, di complementare di un insieme in $\mathbf{R}^n$. Definizione di punto interno ad un insieme, di punto esterno ad un insieme, di parte interna, di chiusura, di frontiera o bordo.

28.3.2017 Successioni in $\mathbf{R}^n$. Ogni successione di Cauchy è convergente in $\mathbf{R}^n$. Punto di accumulazione e punto isolato. Insiemi limitati e compatti. Caratterizzazione degli insiemi chiusi e compatti tramite successioni. Esempi di insiemi aperti, chiusi, né aperti né chiusi. L'unione di aperti è aperta, l'intersezione di chiusi è chiusa. Definizione di segmento, di poligonale, di insieme connesso per poligoni, di insieme convesso. Esempi.

Limiti per funzioni $f : E \rightarrow \mathbf{R}^k$, $E \subset \mathbf{R}^n$: definizioni.

Spazi metrici: spazio metrico completo, esempi. L'insieme $C^0([0, 1])$ munito della distanza d_1 non è uno spazio metrico completo (*). L'insieme $C^0([0, 1])$ munito della distanza d_∞ è uno spazio metrico completo (*).

29.3.2017 Teorema delle contrazioni (*). Esempi.

Curve: definizione di curva e del suo sostegno. Esempi: curve diverse possono avere lo stesso sostegno. Curve piane: curve cartesiane. Esempi. Definizione di curva continua e di derivata. Definizione di curva C^1 , C^1 a tratti, regolare, regolare a tratti. Esempi di curve non regolari.

Curve equivalenti: curve orientate allo stesso modo e curve orientate in modo opposto. Curve piane in forma implicita come luogo di zeri di funzioni di due variabili.

3.4.2017 Curve chiuse e curve semplici. Curve in $\mathbf{R}^3$ come intersezione di grafici di funzioni di due variabili. Un esempio e una sua parametrizzazione. Coordinate polari. Curve piane in forma polare. Esempi nel caso in cui la forma polare sia del tipo $\rho = f(\vartheta)$.

Integrale di una funzione a valori vettoriali (di una curva). Teorema fondamentale del calcolo integrale per le curve. Lemma: se γ è integrabile allora $|\int_a^b \gamma(t) dt| \leq \int_a^b |\gamma(t)| dt$.

Poligonale iscritta ad una curva. Definizione di lunghezza di una curva $\ell(\gamma; [a, b])$ come estremo superiore della lunghezza delle poligoni inscritte alla curva. Definizione di curva rettificabile. Esempio di una curva

continua su un compatto, non rettificabile. Lunghezza di una curva come integrale del modulo della derivata se la curva è $C^1([a, b])$ (*).

4.4.2017 La lunghezza soddisfa $\ell(\gamma; [a, b]) = \ell(\gamma; [a, c]) + \ell(\gamma; [c, b])$ se $c \in (a, b)$.
 $\ell(\gamma; [a, b]) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ anche se γ è C^1 a tratti.

Parametro d'arco o ascissa curvilinea: definizione e proprietà. Esempi ed esercizi sul calcolo dell'ascissa curvilinea e della lunghezza di una curva. Integrali curvilinei (di prima specie). Teorema: se γ e $\tilde{\gamma}$ sono cammini equivalenti allora $\int_{\gamma} f ds = \int_{\tilde{\gamma}} f ds$ (*). Esercizi ed esempi.

5.4.2017 Retta tangente ad una curva.

Versore tangente e versore normale. Nel caso di curve parametrizzate con il parametro d'arco: curvatura. Qualche esempio ed esercizio sulle curve.

Funzioni di più variabili: restrizione di una funzione ad una retta e insiemi di livello. Un esempio di una funzione definita in $\mathbf{R}^2$, non continua in un punto e le cui restrizioni a tutte le rette passanti per tale punto sono continue.

10.4.2017 Esercizi su limiti di funzioni di più variabili.

11.4.2017 Teorema della permanenza del segno. Teorema di Weierstrass (*). Definizione di punto di massimo e minimo, di massimo e minimo stretto, di massimo locale e minimo locale, di massimo locale e minimo locale stretto. Definizione di derivata parziale e di derivata direzionale. Esempi di derivate parziali. Un esempio di funzione che ammette tutte le derivate parziali nulle in un punto e che non è continua in tale punto. Differenziabilità: definizione per funzioni a valori scalari e confronto con la dimensione 1.

12.4.2017 Conseguenze della differenziabilità: una funzione differenziabile in un punto è continua in quel punto (*); una funzione differenziabile in un punto ammette tutte le derivate direzionali in quel punto e inoltre $\frac{\partial f}{\partial v}(x_o) = \langle \nabla f(x_o), v \rangle$ (*). Commenti. Esempi di calcolo di derivate direzionali. Condizioni equivalenti alla differenziabilità: esistenza del piano tangente, formula di Taylor al prim'ordine (con resto di Peano). Direzione di massima pendenza e legame con il gradiente (*).

18.4.2017 Derivata di $f \circ \gamma$ se $\gamma : I \rightarrow A$ derivabile in t_o e $f : A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ differenziabile in $\gamma(t_o)$ (*). Commento: legame con le derivate direzionali. Derivate parziali di $g \circ f$ in x_o con $f : A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ differenziabile in x_o e $g : I \rightarrow \mathbf{R}$, I intervallo aperto, derivabile in $y_o = f(x_o)$. Legame del gradiente con gli insiemi di livello: in particolare se f è costante sul

sostegno di una curva γ derivabile allora $\nabla f(\gamma(t))$ è ortogonale a $\gamma'(t)$.
Teorema del differenziale totale (*). Commenti.

Esercizi ed esempi sulla regolarità di funzioni di due variabili.

19.4.2017 Esercizi sulla regolarità di funzioni di due variabili.

Esercizi su massimi e minimi di funzioni definite su compatti di $\mathbf{R}^2$ usando le curve di livello.

Definizione di punto critico (o stazionario). Se una funzione è differenziabile in x_o e x_o è un punto di minimo o massimo locale, allora $\nabla f(x_o) = (0, \dots, 0)$ (*).

26.4.2017 Teorema del valor medio (*). Se f differenziabile ha gradiente nullo in un insieme connesso per poligonalità allora è costante (*). Derivate seconde: definizione di derivata seconda. Teorema di Schwarz (*). Un esempio di una funzione $C^1(\mathbf{R}^2) \cap C^2(\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ che ha derivate seconde miste diverse in $(0, 0)$.

Forme bilineari e forme quadratiche in $\mathbf{R}^n$. Ogni forma bilineare può essere rappresentata, in maniera unica, da una matrice. Ogni forma quadratica può essere rappresentata da infinite matrici e in maniera unica da una matrice simmetrica.

Data una matrice A simmetrica vale $\lambda_{\min}|x|^2 \leq \langle A \cdot x, x \rangle \leq \lambda_{\max}|x|^2$ dove $\lambda_{\min}$ è il minimo autovalore, $\lambda_{\max}$ il massimo autovalore (*).

8.5.2017 Definizione di matrice definita positiva, negativa, semidefinita positiva, semidefinita negativa, indefinita. Legame tra la definizione di una matrice e il segno degli autovalori. Criterio per capire se una matrice è definita positiva oppure definita negativa guardando i determinanti dei minori principali di “nord-ovest”. La traccia di una matrice simmetrica è la somma degli autovalori, il determinante è il prodotto degli autovalori. Esempi.

Differenziale secondo. Matrice hessiana. La matrice hessiana per una funzione differenziabile due volte è simmetrica. Formula di Taylor al secondo ordine.

Dato x_o stazionario per f : se x_o è un punto di minimo (massimo) locale allora $\langle H_f(x_o) \cdot v, v \rangle \geq 0$ (≤ 0) per ogni vettore $v \in \mathbf{R}^n$; se $H_f(x_o) > 0$ (< 0) allora x_o è un punto di minimo (massimo) stretto (*).

9.5.2017 Esercizi su massimi e minimi su compatti in $\mathbf{R}^2$, su illimitati in $\mathbf{R}^2$.

10.5.2017 Esercizi sulla natura dei punti critici per funzioni di due e tre variabili. Funzioni convesse e loro caratterizzazioni.

- 15.5.2017 Campi di vettori: definizione di integrale curvilineo di seconda specie (lavoro di un campo lungo un cammino). Tale integrale dipende dall'orientazione del cammino. Esempi di calcolo di un integrale curvilineo di seconda specie. (Forme differenziali: definizione e parallelismo con i campi di vettori). L'integrale lungo cammini equivalenti è lo stesso, a meno del segno dell'orientazione del cammino (*). Esempi. Campi che sono gradienti. Insiemi connessi per archi. Campi conservativi e primitive di un campo (potenziali). Caratterizzazione dei campi conservativi (*). (Forme differenziali esatte). Campi irrotazionali. I campi di conservativi di classe C^1 sono irrotazionali. Aperti semplicemente connessi. Esempi di insiemi semplicemente connessi e non. Sugli aperti semplicemente connessi i campi irrotazionali e C^1 sono conservativi.
- 16.5.2017 Esempi e controesempi di campi che ammettono potenziale. Esempi ed esercizi su integrali di seconda specie e calcolo di potenziali. Esempio del calcolo di un potenziale attraverso il calcolo del lavoro compiuto lungo un cammino.
- 17.5.2017 Metodo di Newton per trovare gli zeri di una funzione di una variabile reale. Funzioni implicite: teorema del Dini per funzioni scalari di due variabili (*). Esempi ed esercizi.
- 22.5.2017 Esercizi sulle funzioni implicite per funzioni scalari di due variabili. Matrice jacobiana e formula per la derivazione di funzioni composte (*).
- 23.5.2017 Teorema delle funzioni implicite: caso generale (solo enunciato). Omeomorfismi e diffeomorfismi, inverse di una funzione. Esempi. Teorema dell'invertibilità locale (*).