Corso di laurea: Fisica ed Astronomia
Programma di **Analisi Matematica 2** – a.a. 2017/18
Docente: Fabio Paronetto

Gli argomenti denotati con un asterisco tra parentesi (e solo quelli) sono stati dimostrati.

26.2.2018 Introduzione al corso.
Serie numeriche: successione delle somme parziali, definizione di serie, definizione di carattere di una serie. Criterio di Cauchy ($*$). La serie armonica diverge positivamente ($*$). Condizione necessaria affinché una serie $\sum a_n$ converga è che $\lim a_n = 0$ ($*$). La serie geometrica e la sua somma.

27.2.2018 Ancora sulla serie geometrica. Serie telescopiche. Esempi. Ancora sulla serie armonica. Operazioni con le serie.
Serie a termini positivi: criterio del confronto ($*$). Criterio del confronto asintotico ($*$). Qualche esempio ed esercizio.
Criterio della radice n-esima ($*$). Criterio del rapporto ($*$).

28.2.2018 Corollario del criterio della radice n-esima ($*$). Corollario del criterio del rapporto ($*$). Esempi. Disuguaglianze tra $\liminf_n$ e $\limsup_n$ delle quantità $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ e $\sqrt[n]{a_n}$ ($\{a_n\}_n$ successione a termini positivi). Esempi. Criterio di condensazione di Cauchy ($*$). Serie armonica generalizzata. Criterio di Leibniz ($*$).

5.3.2018 Non c'è stata lezione (sospesa per le elezioni).

6.3.2018 Commenti sul criterio di Leibniz. Esempi.
Serie a termini complessi: convergenza di una serie a termini complessi. Convergenza assoluta. Una serie assolutamente convergente è convergente ($*$). Esempi ed esercizi.
Formula di Abel ($*$) e criterio di Dirichlet ($*$). Esempi di applicazione del criterio di Dirichlet.

7.3.2018 Esercizi sulle serie numeriche.

12.3.2018 Riordinamento di una serie: data una serie $\sum_n a_n$ convergente a S e assolutamente convergente si ha che ogni riordinamento di $\sum_n a_n$ è convergente a S; data una serie $\sum_n a_n$ convergente, ma non assolutamente convergente si ha che per ogni $L \in [-\infty, +\infty]$ esiste un riordinamento di $\sum_n a_n$ che ha come somma L.

Integrali generalizzati: definizione, commenti, primi esempi. Comportamento di $\int_1^\infty x^{-\alpha}dx$ e $\int_0^1 x^{-\alpha}dx$ per $\alpha > 0$. Criterio del confronto e criterio del confronto asintotico per funzioni non negative $(*)$. Esempi: in particolare integrale del reciproco di un polinomio di grado 1 e di grado 2.

13.3.2018 Convergenza assoluta: se il modulo di una funzione f è integrabile in senso generalizzato, lo è anche f $(*)$. Esempi. Criterio integrale per le serie numeriche $(*)$. Esempi ed esercizi. Integrale generalizzato della funzione di Gauss. La Gamma di Eulero. Nel caso sia possibile applicare il criterio integrale per le serie: andamento all'infinito di serie divergenti positivamente $(*)$; stima dell'errore tra la somma e le somme parziali di una serie convergente $(*)$.
Integrali oscillanti: $\int_0^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} x \, dx$ e $\int_0^{+\infty} f(x) \cos x \, dx$ convergono se f è limitata, positiva, decrescente e infinitesima all'infinito $(*)$.

14.3.2018 Criterio di Abel. Esempi ed esercizi su integrali impropri.

19.3.2018 Successioni di funzioni: definizioni di convergenza puntuale e uniforme. Commenti. La convergenza uniforme implica la puntuale $(*)$. Data una successione di funzioni continue puntualmente convergente ad una funzione continua, se $(f_n)_n$ è monotona in n allora converge uniformemente sui compatti $(*)$. Esempi e controesempi. Passaggio al limite sotto il segno di integrale per funzioni continue su intervalli limitati $(*)$. Passaggio al limite sotto il segno di derivata per funzioni di classe C^1 su intervalli limitati $(*)$. Esempi.

20.3.2018 Serie di funzioni: definizioni di convergenza puntuale, uniforme, assoluta puntuale, assoluta uniforme, totale. Criterio di Cauchy $(*)$. La convergenza totale implica la uniforme (criterio di Weierstass) $(*)$. Commenti ed esempi sulla differenza tra convergenza totale ed uniforme. Continuità del limite, integrazione per serie, derivazione per serie $(*)$.

Esercizi sulla convergenza di successioni di funzioni.

21.3.2018 Esercizi sulla convergenza di serie di funzioni.

26.3.2018 Serie di potenze in $\mathbf{C}$: definizione e proprietà $(*)$ (raggio di convergenza, insiemi di convergenza assoluta e totale). Centro e raggio di convergenza di una serie. Convergenza sui punti che distano ρ dal centro della serie (ρ raggio di convergenza). Criterio di Abel. Esempi.
Caso reale: se una serie di potenze converge in $(x_o - \rho, x_o + \rho)$ ad una funzione f allora anche la serie delle derivate termine a termine e delle primitive termine a termine hanno lo stesso raggio di convergenza e

convergono rispettivamente a f' e a $F - F(x_o)$, F primitiva di f $(*)$. Esempi. Serie di Taylor. Definizione di funzione sviluppabile in serie di Taylor e funzione analitica reale. Criterio di sviluppabilità $(*)$.

27.3.2018 La serie $\sum x^n/n!$. Alcuni sviluppi di Taylor in $\mathbf{R}$. Altri esempi. Caso complesso: definizione di funzione continua e olomorfa, definizione di funzione analitica complessa. Esempi. Definizione di funzione esponenziale, seno, coseno e logaritmo nel campo complesso. Alcune proprietà della funzione esponenziale. Per $x \in \mathbf{R}$ vale $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ $(*)$. Esempi di funzioni analitiche complesse e confronto con le analoghe reali.

28.3.2018 Esercizi sulle serie di potenze.

9.4.2018 Introduzione alla topologia in $\mathbf{R}^n$: definizione di prodotto scalare, di norma, di distanza. Commenti ed esempi. Esempi di norme e di distanze, esempi di funzioni che non sono norme e che non sono distanze: le funzioni

$$\delta_p(t,s) = |t-s|^p, \qquad p > 0,$$

sono distanze per $p \in (0,1]$, non sono distanze per $p > 1$ ($(*)$ dimostrato per $p = 1/2$ e per $p = 2$); le funzioni

$$x \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \qquad p > 0,$$

non sono norme per $p \in (0,1)$ $(*)$, sono norme per $p \geqslant 1$ ($(*)$ dimostrato solo per $p = 2$). Definizione della norma *infinito* $\|\cdot\|_\infty$. Per $x \in \mathbf{R}^n$, $\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ $(*)$. Gli insiemi

$$\left\{ x \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, \|x\|_p \leqslant 1 \right\}, \qquad p \in (0, +\infty].$$

Esempi di spazi normati e di spazi metrici. Ogni prodotto scalare induce una norma, ma non tutte le norme sono indotte da un prodotto scalare; ogni norma induce una distanza, ma non tutte le distanze sono indotte da una norma. Esempi. Disuguaglianza di Schwarz $(*)$.
Successioni in $\mathbf{R}^n$. Palla aperta e palla chiusa in $\mathbf{R}^n$ e, più in generale, in uno spazio metrico.

10.4.2018 Definizione di insieme aperto, di insieme chiuso, di complementare di un insieme in $\mathbf{R}^n$. Definizione di punto interno ad un insieme, di punto esterno ad un insieme, di parte interna, di chiusura, di frontiera o bordo. Punto di accumulazione e punto isolato. Insiemi limitati e compatti. Caratterizzazione degli insiemi chiusi e compatti tramite successioni. $(*)$

Esempi di insiemi aperti, chiusi, né aperti né chiusi. L'unione di aperti è aperta, l'intersezione di chiusi è chiusa. Definizione di segmento, di poligonale, di insieme connesso per poligonali, di insieme convesso. Esempi. Limiti per funzioni $f : E \to \mathbf{R}^k$, $E \subset \mathbf{R}^n$: definizioni.

Spazi metrici: spazio metrico completo, esempi. L'insieme $C^0([0,1])$ munito della distanza d_1 non è uno spazio metrico completo $(*)$.

11.4.2018 L'insieme $C^0([0,1])$ munito della distanza d_∞ è uno spazio metrico completo $(*)$. Teorema delle contrazioni $(*)$. Esempi. Metedo di Newton per trovare gli zeri di una funzione di una variabile reale.

Curve: definizione di curva e del suo sostegno. Esempi: curve diverse possono avere lo stesso sostegno. Definizione di curva continua e di derivata. Definizione di curva chiusa, semplice, C^1, C^1 a tratti, regolare, regolare a tratti. Esempi di curve non regolari.

16.4.2018 Curve piane: curve cartesiane. Esempi. Curve equivalenti: curve orientate allo stesso modo e curve orientate in modo opposto. Curve piane in forma implicita come luogo di zeri di funzioni di due variabili. Curve in $\mathbf{R}^3$ come intersezione di grafici di funzioni di due variabili. Un esempio e una sua parametrizzazione. Coordinate polari. Curve piane in forma polare. Esempi nel caso in cui la forma polare sia del tipo $\rho = f(\vartheta)$.
Integrale di una funzione a valori vettoriali (di una curva). Teorema fondamentale del calcolo integrale per le curve. Lemma: se γ è integrabile allora $|\int_a^b \gamma(t)dt| \leqslant \int_a^b |\gamma(t)|dt$.
Poligonale iscritta ad una curva. Definizione di lunghezza di una curva $\ell(\gamma;[a,b])$ come estremo superiore della lunghezza delle poligonali inscritte alla curva.

17.4.2018 Definizione di curva rettificabile. Esempio di una curva continua su un compatto, non rettificabile. Lunghezza di una curva come integrale del modulo della derivata se la curva è $C^1([a,b])$ $(*)$.
La lunghezza soddisfa $\ell(\gamma;[a,b]) = \ell(\gamma;[a,c]) + \ell(\gamma;[c,b])$ se $c \in (a,b)$. $\ell(\gamma;[a,b]) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$ anche se γ è C^1 a tratti.
Parametro d'arco o ascissa curvilinea: definizione e proprietà. Esempi ed esercizi sul calcolo dell'ascissa curvilinea e della lunghezza di una curva. Integrali curvilinei (di prima specie): definizione e commenti.

18.4.2018 Teorema: se γ e $\tilde\gamma$ sono cammini equivalenti allora $\ell(\gamma) = \ell(\tilde\gamma)$ $(*)$. Teorema: se γ e $\tilde\gamma$ sono cammini equivalenti allora $\int_\gamma f\,ds = \int_{\tilde\gamma} f\,ds$ $(*)$. Retta tangente ad una curva. Esempi ed esercizi sulle curve.

23.4.2018 Funzioni di più variabili: restrizione di una funzione ad una retta, insiemi di livello, funzioni radiali. Due esempi di una funzione definita in $\mathbf{R}^2$, non continua in un punto e le cui restrizioni a tutte le rette passanti per tale punto sono continue. $\lim_{x\to x_o} f(x) = l$ se e solo se $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$ per ogni successione $\{x_n\}_n$ convergente a x_o. Teorema della permanenza del segno. Teorema di Weiestrass. Definizione di punto di massimo e minimo, di massimo e minimo stretto, di massimo locale e minimo locale, di massimo locale e minimo locale stretto. Definizione di derivata parziale e di derivata direzionale. Esempi di derivate parziali. Un esempio di funzione che ammette tutte le derivate parziali nulle in un punto e che non è continua in tale punto.

24.4.2018 Differenziabilità: definizione per funzioni a valori scalari e confronto con la dimensione 1.
Conseguenze della differenziabilità: una funzione differenziabile in un punto è continua in quel punto $(*)$; una funzione differenziabile in un punto ammette tutte le derivate direzionali in quel punto e inoltre $\frac{\partial f}{\partial v}(x_o) = \langle \nabla f(x_o), v\rangle$ $(*)$. Commenti. Esempi di calcolo di derivate direzionali.
Il differenziale di una funzione $f : A \to \mathbf{R}$, $df : A \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R})$.
Condizioni equivalenti alla differenziabilità: esistenza del piano tangente, formula di Taylor al prim'ordine (con resto di Peano).
Direzione di massima pendenza e legame con il gradiente $(*)$.

2.5.2018 Derivata di $f \circ \gamma$ se $\gamma : I \to A$ derivabile in t_o e $f : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ differenziabile in $\gamma(t_o)$ $(*)$. Commento: legame con le derivate direzionali.

Esercizi su limiti per funzioni di più variabili.

7.5.2018 Teorema del differenziale totale $(*)$. Commenti.

Esercizi ed esempi sulla regolarità di funzioni di due variabili.

8.5.2018 Definizione di punto critico (o stazionario). Se una funzione è differenziabile in x_o e x_o è un punto di minimo o massimo locale, allora $\nabla f(x_o) = (0, \dots 0)$ $(*)$. Teorema del valor medio $(*)$. Se f differenziabile ha gradiente nullo in un insieme connesso per poligonali allora è costante $(*)$. Derivate seconde: definizione di derivata seconda. Teorema di Schwarz $(*)$. Un esempio di una funzione $C^1(\mathbf{R}^2) \cap C^2(\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0\})$ che ha derivate seconde miste diverse in $(0,0)$.
Forme bilineari e forme quadratiche in $\mathbf{R}^n$. Ogni forma bilineare può essere rappresentata, in maniera unica, da una matrice. Ogni forma quadratica può essere rappresentata da infinite matrici e in maniera unica da una matrice simmetrica.
Data una matrice A simmetrica vale $\lambda_{\min}|x|^2 \leqslant \langle A\cdot x, x\rangle \leqslant \lambda_{\max}|x|^2$ dove $\lambda_{\min}$ è il minimo autovalore, $\lambda_{\max}$ il massimo autovalore $(*)$.

9.5.2018 Criterio per capire se una matrice è definita positiva oppure definita negativa guardando i determinanti dei minori principali di "nord-ovest". La traccia di una matrice simmetrica è la somma degli autovalori, il determinante è il prodotto degli autovalori. Esempi.

Esercizi su massimi e minimi di funzioni definite su compatti di $\mathbf{R}^2$ usando le curve di livello.

14.5.2018 Differenziale secondo. Matrice hessiana. La matrice hessiana per una funzione differenziabile due volte è simmetica. Formula di Taylor al secondo ordine.
Dato x_o stazionario per f: se x_o è un punto di minimo (massimo) locale allora $\langle H_f(x_o) \cdot v, v \rangle \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) per ogni vettore $v \in \mathbf{R}^n$; se $H_f(x_o) > 0$ (< 0) allora x_o è un punto di minimo (massimo) stretto ($*$).
Funzioni convesse e due loro caratterizzazioni ($*$).
Commenti sui punti critici e sui punti di minimo di funzioni convesse.

15.5.2018 Esercizi su massimi e minimi su compatti in $\mathbf{R}^2$, su illimitati in $\mathbf{R}^2$.

16.5.2018 Esercizi sulla natura dei punti critici per funzioni di due e tre variabili.

21.5.2018 I differenziali dx_j come base del duale di $\mathbf{R}^n$.
Campi di vettori (e 1-forme differenziali): definizione di integrale curvilineo di seconda specie (lavoro di un campo lungo un cammino). Tale integrale dipende dall'orientazione del cammino. Esempi di calcolo di un integrale curvilineo di seconda specie. (Forme differenziali: definizione e parallelismo con i campi di vettori). L'integrale lungo cammini equivalenti è lo stesso, a meno del segno dell'orientazione del cammino ($*$). Esempi. Campi che sono gradienti (forme differenziali che sono esatte). Potenziale di un campo conservativo (primitiva di una forma differenziale). Due caratterizzazioni dei campi conservativi tramite il lavoro lungo cammini equivalenti o chiusi ($*$). Campi irrotazionali (forme differenziali chiuse). I campi conservativi di classe C^1 sono irrotazionali. Un esempio di un campo irrotazionale che non è conservativo. Definizione di omotopia tra due cammini chiusi e definizione di aperto semplicemente connesso. Esempi di insiemi semplicemente connessi e non.

22.5.2018 Sugli aperti semplicemente connessi i campi irrotazionali e C^1 sono conservativi.
Esempi e controesempi di campi che ammettono potenziale. Esempi ed esercizi su integrali di seconda specie e calcolo di potenziali. Esempio del calcolo di un potenziale attraverso il calcolo del lavoro compiuto lungo un cammino.

23.5.2018 Differenziale per funzioni a valori vettoriali, matrice jacobiana, formula di Taylor al primo ordine per funzioni di n variabili e a valori in $\mathbf{R}^k$.