Corso di laurea: Fisica ed Astronomia
Programma di **Analisi Matematica 2** – a.a. 2018/19
Docente: Fabio Paronetto

Gli argomenti denotati con un asterisco tra parentesi (e solo quelli) sono stati dimostrati.

25.2.2019 Introduzione al corso.
Serie numeriche: successione delle somme parziali, definizione di serie, definizione di carattere di una serie. Criterio di Cauchy $(*)$.

26.2.2019 La serie armonica diverge positivamente $(*)$. Condizione necessaria affinché una serie $\sum a_n$ converga è che $\lim a_n = 0$ $(*)$. La serie geometrica e la sua somma. Ancora sulla serie geometrica: numeri con parte decimale periodica. Serie telescopiche. Esempi. Ancora sulla serie armonica: stima sull'andamento all'infinito delle somme parziali. Operazioni con le serie.
Serie a termini positivi: criterio del confronto $(*)$. Criterio del confronto asintotico $(*)$. Qualche esempio ed esercizio.

27.2.2019 Criterio della radice $n$-esima $(*)$. Criterio del rapporto $(*)$. Corollario del criterio della radice $n$-esima $(*)$. Corollario del criterio del rapporto $(*)$. Esempi. Disuguaglianze tra $\liminf_n$ e $\limsup_n$ delle quantità $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ e $\sqrt[n]{a_n}$ ($\{a_n\}_n$ successione a termini positivi). Esempi. Criterio di condensazione di Cauchy $(*)$. Serie armonica generalizzata. Qualche esempio ed esercizio.

4.3.2019 Criterio di Leibniz $(*)$. Commenti, esempi e controesempi.
Serie a termini complessi: definizione di convergenza di una serie a termini complessi. Commento: per le serie a termini complessi valgono alcuni risultati già visti per le serie a termini reali.

5.3.2019 Convergenza assoluta. Una serie assolutamente convergente è convergente $(*)$. Esempi ed esercizi.
Formula di Abel $(*)$ e criterio di Dirichlet $(*)$. Esempi di applicazione del criterio di Dirichlet.
Riordinamento di una serie: data una serie $\sum_n a_n$ convergente a $S$ e assolutamente convergente si ha che ogni riordinamento di $\sum_n a_n$ è convergente a $S$; data una serie $\sum_n a_n$ convergente, ma non assolutamente convergente si ha che per ogni $L \in [-\infty, +\infty]$ esiste un riordinamento di $\sum_n a_n$ che ha come somma $L$.

6.3.2019 Esercizi sulle serie numeriche.

11.3.2019 Integrali generalizzati: definizione, commenti, primi esempi. Comportamento di $\int_1^\infty x^{-\alpha}dx$ e $\int_0^1 x^{-\alpha}dx$ per $\alpha > 0$.

12.3.2019 Criterio del confronto e criterio del confronto asintotico per funzioni non negative $(*)$. Esempi: in particolare integrale del reciproco di un polinomio di grado 1 e di grado 2. Convergenza assoluta: se il modulo di una funzione $f$ è integrabile in senso generalizzato, lo è anche $f$ $(*)$. Esempi. Integrale generalizzato della funzione di Gauss. La Gamma di Eulero. Integrali oscillanti: $\int_0^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} x \, dx$ e $\int_0^{+\infty} f(x) \cos x \, dx$ convergono se $f$ è limitata, positiva, decrescente e infinitesima all'infinito $(*)$.

13.3.2019 Criterio di Abel. Esempi ed esercizi.
Criterio integrale per le serie numeriche $(*)$. Esempi ed esercizi. Nel caso sia possibile applicare il criterio integrale per le serie: andamento all'infinito di serie divergenti positivamente $(*)$; stima dell'errore tra la somma e le somme parziali di una serie convergente $(*)$.
Qualche esercizio sugli integrali impropri.

18.3.2019 Esercizi sugli integrali impropri.

19.3.2019 Successioni di funzioni: definizioni di convergenza puntuale e uniforme. Commenti. La convergenza uniforme implica la puntuale $(*)$. Data una successione di funzioni continue puntualmente convergente ad una funzione continua, se $(f_n)_n$ è monotona in $n$ allora converge uniformemente sui compatti $(*)$. Esempi e controesempi. Passaggio al limite sotto il segno di integrale per funzioni continue su intervalli limitati $(*)$. Passaggio al limite sotto il segno di derivata per funzioni di classe $C^1$ su intervalli limitati $(*)$. Esempi.

20.3.2019 Serie di funzioni: definizioni di convergenza puntuale, uniforme, assoluta puntuale, assoluta uniforme, totale. Criterio di Cauchy $(*)$. La convergenza totale implica la uniforme (criterio di Weierstass) $(*)$. Commenti ed esempi sulla differenza tra convergenza totale ed uniforme. Continuità del limite, integrazione per serie, derivazione per serie $(*)$.

Esercizi sulla convergenza di successioni di funzioni.

25.3.2019 Esercizi sulla convergenza di successioni e serie di funzioni.

26.3.2019 Esercizi sulla convergenza di serie di funzioni.

Serie di potenze in $\mathbf{C}$: definizione e proprietà $(*)$ (raggio di convergenza, insiemi di convergenza assoluta e totale). Centro e raggio di convergenza di una serie di potenze complessa. Commenti Convergenza sui punti che distano $\rho$ dal centro della serie ($\rho$ raggio di convergenza). Criterio di Abel. Esempi.

27.3.2019 Caso reale: se una serie di potenze converge in $(x_o - \rho, x_o + \rho)$ ad una funzione $f$ allora anche la serie delle derivate termine a termine e delle primitive termine a termine hanno lo stesso raggio di convergenza e convergono rispettivamente a $f'$ e a $F - F(x_o)$, $F$ primitiva di $f$ $(*)$. Esempi. Serie di Taylor. Definizione di funzione sviluppabile in serie di Taylor e funzione analitica reale. Criterio di sviluppabilità $(*)$.
Un esempio di funzione che non soddisfa il criterio di sviluppabilità, ma che è sviluppabile in un intervallo.
La serie $\sum x^n/n!$: studio della convergenza e uso del criterio di sviluppabilità per verificare che $\sum x^n/n!$ converge a $e^x$. Alcuni sviluppi di Taylor in $\mathbf{R}$. Altri esempi.
Il numero di Nepero: stime e confronto tra $\lim_n (1 + 1/n)^n$ e $\sum 1/n!$.

1.4.2019 Caso complesso: definizione di funzione continua e olomorfa, definizione di funzione analitica complessa. Esempi. Definizione di funzione esponenziale, seno, coseno nel campo complesso. Alcune proprietà della funzione esponenziale. Per $x \in \mathbf{R}$ vale $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ $(*)$. Esempi di funzioni analitiche complesse e confronto con le analoghe reali.

2.4.2019 Logaritmo complesso.

Esercizi sulle serie di potenze.

3.4.2019 Introduzione alla topologia in $\mathbf{R}^n$. Definizioni di prodotto scalare, di norma, di distanza. Commenti ed esempi. Ogni prodotto scalare induce una norma, ma non tutte le norme sono indotte da un prodotto scalare; ogni norma induce una distanza, ma non tutte le distanze sono indotte da una norma. Esempi.
Disuguaglianza di Schwarz $(*)$. In uno spazio vettoriale $V$ dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vale le caratterizzazione: $\|x\|_V = \max_{\|y\|_V = 1} \langle x, y \rangle$ dove $\| \cdot \|_V$ è la norma associata al prodotto scalare di $V$ $(*)$.
Esempi di norme e di distanze, esempi di funzioni che non sono norme e che non sono distanze: le funzioni

$$\delta_p(t, s) = |t - s|^p, \qquad p > 0,$$

sono distanze per $p \in (0, 1]$, non sono distanze per $p > 1$ ($(*)$ dimostrato per $p = 1/2$ il primo fatto, per ogni $p > 1$ il secondo). Lasciato per

esercizio il primo fatto per ogni $p \in (0, 1]$ $(*)$.
Le funzioni

$$x \mapsto \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \qquad p > 0,$$

non sono norme per $p \in (0, 1)$ $(*)$, sono norme per $p \geqslant 1$ ($(*)$ dimostrazione lasciata per esercizio solo per $p = 2$). Definizione della norma *infinito* $\| \cdot \|_\infty$. Per $x \in \mathbf{R}^n$, $\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ $(*)$. Gli insiemi

$$\left\{ x \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, \|x\|_p \leqslant 1 \right\}, \qquad p \in (0, +\infty].$$

Esempi di spazi normati e di spazi metrici. Norme equivalenti.

Successioni in $\mathbf{R}^n$: in $\mathbf{R}^n$ la norma euclidea $|\cdot| = \|\cdot\|_2$ è equivalente alla norma $\|\cdot\|_\infty$ $(*)$.

8.4.2019 Successioni in $\mathbf{R}^n$: alcune proprietà.
Definizione di insieme aperto, di insieme chiuso, di complementare di un insieme in $\mathbf{R}^n$. Definizione di punto interno ad un insieme, di punto esterno ad un insieme, di parte interna, di chiusura, di frontiera o bordo. Punto di accumulazione e punto isolato. Alcuni esempi.
Caratterizzazione degli insiemi chiusi tramite successioni. $(*)$

9.4.2019 Insiemi limitati e compatti. Caratterizzazione degli insiemi compatti tramite successioni. $(*)$ Altri esempi.
L'unione arbitraria di aperti è aperta, l'intersezione arbitraria di chiusi è chiusa; l'intersezione finita di aperti è aperta, l'unione finita di chiusi è chiusa. Controesempi.
Definizione di segmento e di poligonale, di insieme connesso per poligonali, di insieme convesso. Esempi.
Spazi metrici: spazio metrico completo, esempi. L'insieme $C^0([0, 1])$ munito della distanza $d_p$, $p > 1$, non è uno spazio metrico completo $(*)$. L'insieme $C^0([0, 1])$ munito della distanza $d_\infty$ è uno spazio metrico completo $(*)$. Teorema delle contrazioni $(*)$. Esempi. Metedo di Newton per trovare gli zeri di una funzione di una variabile reale.

10.4.2019 Curve: definizione di curva e del suo sostegno. Esempi: curve diverse possono avere lo stesso sostegno. Curve piane: curve cartesiane. Esempi. Definizione di curva continua e derivabile. Definizione di curva chiusa, semplice, $C^1$, $C^1$ a tratti, regolare, regolare a tratti. Esempi di curve non regolari. Curve equivalenti: curve orientate allo stesso modo e curve orientate in modo opposto. Curve piane in forma implicita come luogo di zeri di funzioni di due variabili a valori reali. Curve in $\mathbf{R}^3$ come intersezione dei luoghi degli zeri di due funzioni di tre variabili a valori reali: un caso particolare è l'intersezione di due grafici di funzioni di due variabili.

15.4.2019 Coordinate polari. Curve piane in forma polare. Esempi nel caso in cui la forma polare sia del tipo $\rho = f(\vartheta)$.
Integrale di una funzione a valori vettoriali (di una curva). Teorema fondamentale del calcolo integrale per le curve e $|\int_a^b \gamma(t)dt| \leqslant \int_a^b |\gamma(t)|dt$.
Poligonale inscritta ad una curva subordinata ad una suddivisione ordinata dell'intervallo di definizione della curva, sua lunghezza, lunghezza di una curva $\ell(\gamma; [a, b])$ come estremo superiore della lunghezza delle poligonali inscritte alla curva.

16.4.2019 Definizione di curva rettificabile. Esempio di una curva continua su un compatto, non rettificabile. Lunghezza di una curva come integrale del modulo della derivata se la curva è $C^1([a, b])$ $(*)$.
La lunghezza soddisfa $\ell(\gamma; [a, b]) = \ell(\gamma; [a, c]) + \ell(\gamma; [c, b])$ se $c \in (a, b)$.
$\ell(\gamma; [a, b]) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$ anche se $\gamma$ è $C^1$ a tratti.
Parametro d'arco o ascissa curvilinea: definizione e proprietà. Esempi ed esercizi sul calcolo dell'ascissa curvilinea e della lunghezza di una curva.
Integrali curvilinei (di prima specie): definizione e commenti.
Teorema: se $\gamma$ e $\tilde{\gamma}$ sono cammini equivalenti allora $\ell(\gamma) = \ell(\tilde{\gamma})$ $(*)$. Teorema: se $\gamma$ e $\tilde{\gamma}$ sono cammini equivalenti allora $\int_\gamma f\, ds = \int_{\tilde{\gamma}} f\, ds$ $(*)$.

17.4.2019 Retta tangente ad una curva. Esempi ed esercizi sulle curve.

6.5.2019 Funzioni di più variabili: restrizione di una funzione ad una retta, insiemi di livello, funzioni radiali.
Definizioni di limite per funzioni di $n$ variabili e a valori in $\mathbf{R}^k$.
Definizioni di funzione continua in un punto.

7.5.2019 Teorema: $\lim_{x \to x_o} f(x) = l$ se e solo se $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$ per ogni successione $\{x_n\}_n$ convergente a $x_o$. Due esempi di una funzione definita in $\mathbf{R}^2$, non continua in un punto e le cui restrizioni a tutte le rette passanti per tale punto sono continue. Teorema della permanenza del segno. Definizione di punto di massimo e minimo, di massimo e minimo stretto, di massimo locale e minimo locale, di massimo locale e minimo locale stretto. Teorema di Weiestrass.
Definizione di derivata parziale e di derivata direzionale. Esempi di derivate parziali. Un esempio di funzione che ammette tutte le derivate parziali nulle in un punto e che non è continua in tale punto.

Differenziabilità: definizione per funzioni a valori scalari e confronto con la dimensione 1.

8.5.2019 Conseguenze della differenziabilità: una funzione differenziabile in un punto è continua in quel punto ($*$); una funzione differenziabile in un punto ammette tutte le derivate direzionali in quel punto e inoltre $\frac{\partial f}{\partial v}(x_o) = \langle \nabla f(x_o), v \rangle$ ($*$). Commenti.
Il differenziale di una funzione $f : A \to \mathbf{R}$, $df : A \to \mathcal{L}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R})$. Base canonica per $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R})$: $df_{x_o} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o) dx_i$.
Condizioni equivalenti alla differenziabilità: esistenza del piano tangente, formula di Taylor al prim'ordine (con resto di Peano).
Direzione di massima pendenza e legame con il gradiente ($*$).
Derivata di $f \circ \gamma$ se $\gamma : I \to A$ regolare a tratti e derivabile in $t_o$ e $f : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ differenziabile in $\gamma(t_o)$ ($*$).

13.5.2019 Derivate direzionali lungo vettori di modulo arbitrario. Derivata di $f \circ \gamma$: commenti e legame con le derivate direzionali.
Definizione di funzione $C^1(A)$. Teorema del differenziale totale ($*$). Commenti.

14.5.2019 Esercizi su limiti per funzioni di più variabili. Esercizi ed esempi sulla regolarità di funzioni di due variabili.

15.5.2019 Altri esercizi ed esempi sulla regolarità di funzioni di due variabili.

Definizione di punto critico (o stazionario). Se una funzione è differenziabile in $x_o$ e $x_o$ è un punto di minimo o massimo locale, allora $\nabla f(x_o) = (0, \ldots 0)$ ($*$). Teorema del valor medio ($*$). Se $f$ differenziabile ha gradiente nullo in un insieme connesso per poligonali allora è costante ($*$). Derivate seconde: definizione di derivata seconda. Teorema di Schwarz ($*$). Funzioni di classe $C^2$. Un esempio di una funzione $C^1(\mathbf{R}^2) \cap C^2(\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0\})$ che ha derivate seconde miste diverse in $(0,0)$.

20.5.2019 Esercizi su massimi e minimi di funzioni definite su compatti di $\mathbf{R}^2$ (e qualche semplice esempio in dimensione più alta) usando le curve, e in generale gli insiemi, di livello.

21.5.2019 Esercizi su massimi e minimi di funzioni definite su compatti e su illimitati di $\mathbf{R}^2$.
Data una matrice $A$ simmetrica vale $\lambda_{\min}|x|^2 \leqslant \langle A \cdot x, x \rangle \leqslant \lambda_{\max}|x|^2$ dove $\lambda_{\min}$ è il minimo autovalore, $\lambda_{\max}$ il massimo autovalore ($*$).

22.5.2019 Differenziale secondo. Matrice hessiana. La matrice hessiana per una funzione differenziabile due volte è simmetica. Formula di Taylor al se-

condo ordine.
Dato $x_o$ stazionario per $f$: se $x_o$ è un punto di minimo (massimo) locale allora $\langle H_f(x_o)\cdot v, v\rangle \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) per ogni vettore $v \in \mathbf{R}^n$; se $H_f(x_o) > 0$ ($< 0$) allora $x_o$ è un punto di minimo (massimo) stretto ($*$).
Forme quadratiche, e matrici, (semi-)definite positive, (semi-)definite negative, indefinite.
Forme bilineari e forme quadratiche in $\mathbf{R}^n$. Ogni forma bilineare può essere rappresentata, in maniera unica, da una matrice. Ogni forma quadratica può essere rappresentata da infinite matrici e in maniera unica da una matrice simmetrica.

27.5.2019 Criterio per capire se una matrice è definita positiva oppure definita negativa guardando i determinanti dei minori principali di "nord-ovest". La traccia di una matrice simmetrica è la somma degli autovalori, il determinante è il prodotto degli autovalori. Esempi.

28.5.2019 Altri esercizi sulla natura dei punti critici per funzioni di due e tre variabili.

Funzioni convesse e due loro caratterizzazioni ($*$). Commenti sui punti critici e sui punti di minimo di funzioni convesse.

29.5.2019 I differenziali $dx_j$ come base del duale di $\mathbf{R}^n$.
Campi di vettori (e 1-forme differenziali): definizione di integrale curvilineo di seconda specie (lavoro di un campo lungo un cammino). Tale integrale dipende dall'orientazione del cammino. Esempi di calcolo di un integrale curvilineo di seconda specie. (Forme differenziali: definizione e parallelismo con i campi di vettori). L'integrale lungo cammini equivalenti è lo stesso, a meno del segno dell'orientazione del cammino ($*$). Esempi. Campi che sono gradienti (forme differenziali che sono esatte). Potenziale di un campo conservativo (primitiva di una forma differenziale). Due caratterizzazioni dei campi conservativi tramite il lavoro lungo cammini equivalenti o chiusi ($*$). Campi irrotazionali (forme differenziali chiuse). I campi conservativi di classe $C^1$ sono irrotazionali. Un esempio di un campo irrotazionale che non è conservativo. Definizione di omotopia tra due cammini chiusi e definizione di aperto semplicemente connesso. Esempi di insiemi semplicemente connessi e non. Sugli aperti semplicemente connessi i campi irrotazionali e $C^1$ sono conservativi.
Un esempio di campo definito in un insieme non semplicemente connesso che non ammette potenziale.

4.6.2019 Esempi ed esercizi su integrali di seconda specie e calcolo di potenziali. Esempi del calcolo di un potenziale sia attraverso il calcolo del lavoro compiuto lungo un cammino, sia integrando.

5.6.2019 Differenziale per funzioni a valori vettoriali, matrice jacobiana, formula di Taylor al primo ordine per funzioni di $n$ variabili e a valori in $\mathbf{R}^k$.