Capitolo 1

Successioni e serie di funzioni

Ultimo aggiornamento: 21 agosto 2019

Succession di funzioni

Considerazioni generali: non esiste un metodo generale (cioè un modo meccanico che valga in ogni situazione) per studiare la convergenza uniforme. La prima osservazione che va fatta è che, se $f_n : D \to \mathbf{R}$ convergono puntualmente ad f in D, il candidato ad essere il limite uniforme è f. La seconda è che lo studio ha come incognita l'insieme (o gli insiemi) sul quale (o sui quali) f_n converge uniformemente. La domanda da porsi è quindi:

$$\text{su quali insiemi } A \subset D \text{ vale} \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0 \ ?$$

Chiaramente se $f_n \to f$ uniformemente su tutto D convergerà uniformemente anche su tutti i sottoinsiemi A di D.
Un modo per cercare l'estremo superiore di $|f_n - f|$ (dove f è il limite puntuale di f_n) se f e f_n sono di classe C^1 è di cominciare risolvendo l'equazione

$$\frac{d}{dx}(f_n(x) - f(x)) = 0$$

e considerando i punti critici di $f_n - f$: si faccia attenzione che il minimo, se c'è, di $f_n - f$ potrebbe essere il massimo di $|f_n - f|$. Questo però è *un* modo e comunque non sempre fornisce l'estremo superiore (ad esempio il sup potrebbe non essere un massimo, il massimo potrebbe essere assunto agli estremi ecc.).
In generale è spesso utile intuire il comportamento della successione di cui

bisogna studiare la convergenza. Un consiglio è quindi quello di studiare qualitativamente, se possibile, il grafico delle funzioni f_n.

Esercizio 1.1 - Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n : [-1,1] \to \mathbf{R}\,, \qquad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

Esercizio 1.2 - Si studi convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$, $n \in \mathbf{N}$, definite in $D = \mathbf{R}$.

Esercizio 1.3 - Si studi convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni $f_n(x) = \sqrt[2n+1]{x} - x$, $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$. Si studi poi il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^a x^{\frac{1}{2n+1}}\, dx \qquad \text{per ogni } a > 0.$$

Esercizio 1.4 - Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,, \qquad f_n(x) = \frac{x+n}{x^2+n}$$

Esercizio 1.5 - Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,, \qquad f_n(x) = \frac{3x+4n}{x^2+n^2}$$

Esercizio 1.6 - Si studi convergenza puntuale ed uniforme di $f_n(x) = x(1-x)^n \log n$ in $[0,1]$.

Esercizio 1.7 - Si studi convergenza puntuale ed uniforme di $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.

Esercizio 1.8 - Si studino la convergenza puntuale ed uniforme delle funzioni

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x+n} \qquad \text{per } x \in [0, +\infty)$$

e si dimostri che

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x) \operatorname{sen}(nx) dx = 0\,.$$

Esercizio 1.9 - Si studino la convergenza puntuale ed uniforme delle funzioni

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x^2)^n \qquad \text{per } x \in [0,1] \qquad (\alpha > 0)$$

e si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx\,.$$

Esercizio 1.10 - Si studi convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = n^2x^2(1-x)^n, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Si calcoli poi $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

Esercizio 1.11 - Si studi convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = (\operatorname{sen} x)^{1/n}, \qquad x \in [0,\pi].$$

Esercizio 1.12 - Si studino la convergenza puntuale ed uniforme delle funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{n} + \operatorname{sen}^2 x\right)^n \qquad \text{per } x \in [0,\pi]$$

e si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n(x)dx\,.$$

Esercizio 1.13 - Si studino la convergenza puntuale ed uniforme delle funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{n} + a(1-x)x\right)^n \qquad \text{per } x \in [0,1]$$

per i due valori di $a = 4$ e poi di $a = 8$.

Esercizio 1.14 - Si studino la convergenza puntuale ed uniforme delle funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx}{(1+nx)(x^2+1)} \qquad \text{per } x \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 1.15 - Si studi la convergenza puntuale ed uniforme in $[-1,1]$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = n\log(1+x/n)\,.$$

Esercizio 1.16 - Si studino la convergenza puntuale ed uniforme delle funzioni

$$f_n(x) = n\,x\,e^{-nx^2} \qquad \text{per } x \in \mathbf{R}.$$

Si calcoli poi $\lim_{n\to\infty} \int_0^a f_n(x)dx$ per ogni $a > 0$.

Esercizio 1.17 - Si studino la convergenza puntuale ed uniforme delle funzioni

$$f_n(x) = n^x x^n \qquad \text{per } x \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 1.18 - Si studi la convergenza puntuale ed uniforme in $\mathbf{R}$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+n}}dt\,.$$

Serie di funzioni

Una serie di funzioni $\sum_n f_n$ è una speciale successione di funzioni $\{g_N\}_N$ dove $g_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$.
Ricordo: per le serie di funzioni si ha che

$$\text{conv. totale su } A \Longrightarrow \text{ conv. uniforme su } A \Longrightarrow \text{ conv. puntuale su } A\,.$$

Non ci sono molti criteri in generale per studiare la convergenza uniforme: in generale, e quindi in particolare se si ha una serie a termini tutti positivi (o tutti negativi), una strategia possibile è studiare prima la convergenza totale della serie, ma questo non garantisce di trovare tutti gli insiemi in cui vi è convergenza uniforme! (si vedano, ad esempio, l'Esercizio 1.22 e l'Esercizio 1.24). Quando si ha una serie a segni alterni si può sfruttare il criterio di Leibniz.
Per quanto riguarda lo studio della convergenza totale: chiaramente la miglior costante che controlla su un insieme A il valore assoluto di $f_n(x)$ è $\sup_A |f_n(x)$. Quindi per studiare la convergenza totale su A di $\sum_n f_n$ conviene, se si riesce a calcolare l'estremo superiore di $|f_n|$, studiare la serie

$$\sum_n \sup_{x\in A} |f_n(x)|\,.$$

Non sempre però conviene calcolare l'estremo superiore e ci si può accontentare di una stima (si veda, ad esempio, la soluzione dell'Esercizio 1.23) o non sempre si riesce a calcolare tale estremo superiore (si veda, ad esempio, la soluzione dell'Esercizio 1.21) .

Infine: qualche volta può non esserci la convergenza totale e quindi può diventare difficile studiare la convergenza uniforme. Due esempi nei quali non vi è convergenza totale e neanche convergenza uniforme sono dati in Esercizio 1.48 e Esercizio 1.49, il primo svolto, il secondo da provare da soli. I casi in cui non vi è convergenza totale, ma vi è quella uniforme sono chiaramente i più difficili.

Esercizio 1.19 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}\,.$$

Esercizio 1.20 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n^2}{x^2+n^4}\,.$$

ESERCIZIO 1.21 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n}{x^2+n^4+\log n}\,.$$

ESERCIZIO 1.22 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)}\,.$$

ESERCIZIO 1.23 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}\,.$$

ESERCIZIO 1.24 - Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\,|\mathrm{sen}\, x| & x \in [(n-1)\pi, n\pi] \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Si studi la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

ESERCIZIO 1.25 - Si studi la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{3^n}$.

ESERCIZIO 1.26 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}\,.$$

ESERCIZIO 1.27 - Si studi la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-nx}$.

ESERCIZIO 1.28 - Si studi la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x \in \mathbf{R}$.

ESERCIZIO 1.29 - Si studi la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{sen}^n x$, $x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.30 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\operatorname{sen} x + n}{n^2}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 1.31 - Si studi la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^x}{n}$, $x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.32 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2 \cos(nx^2)}{n^3+1} \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 1.33 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n \log n + x} \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 1.34 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+n^2 \operatorname{sen} x^2)} \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 1.35 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1-x^2}{3x-1}\right)^n \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 1.36 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-x^2}{3x-1}\right)^n \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 1.37 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x \log x)^n, \qquad x \in (0,1].$$

Esercizio 1.38 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^x x^n \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 1.39 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{nx^n} \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 1.40 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-e^{-nx^2}}{n^2} \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 1.41 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{x/n} \mathrm{sen}^2 \left(\frac{2x}{n}\right) \qquad x \geqslant 0.$$

Esercizio 1.42 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\,\left(\frac{x}{n}\right)}{n+x^2} \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 1.43 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x}{1+nx^2} \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 1.44 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n \mathrm{sen}^2 \left(\frac{|x|}{\sqrt{n}}\right) \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 1.45 - Si determinino gli insiemi di $\mathbf{R}^2$ nei quali vi è convergenza semplice, uniforme e totale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{arctg}\,(x^2+n^2)}{1+n^2 y}\,.$$

Esercizio 1.46 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \mathrm{sen}\, nx \qquad x \in \mathbf{R}$$

al variare di $p > 1$. In particolare si dica, nel caso $p = 3$, se la somma della serie è di classe C^1 (continua, derivabile e la cui derivata è continua). Se $p = 4$ possiamo dire che la funzione somma è di classe C^2?

Esercizio 1.47 - Si studi la serie di $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(x)x^n$ con f di classe C^1.

Esercizio 1.48 - Si studi la serie di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^\alpha}{n^x}$ al variare di $\alpha > 0$.

* Esercizio 1.49 Si studi la serie di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log x}{n^x}$.

Serie di potenze

Esercizio 1.50 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^n$$

e calcolarne la somma. Si studi poi le serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n3^n} x^n$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} x^n$ e confrontarle con la precedente.

Esercizio 1.51 - Si studi la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha + e^{\alpha n}}{n} x^n$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.52 - Sviluppare in serie di Taylor in $x = 0$ la funzione $f(x) = e^x$ e studiarne la convergenza.

Esercizio 1.53 - Calcolare lo sviluppo di Taylor nel punto $x = 1$ della funzione $\log x$ e calcolare il valore della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.

Esercizio 1.54 - Si studi la convergenza e calcolare la somma (ove converge) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \frac{x^n}{(1+x^2)^n}\,.$$

Esercizio 1.55 - Si studi il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n .$$

Esercizio 1.56 - Sviluppare in serie di Taylor in $x = 0$ la funzione $f(x) =$ arctg x e studiarne la convergenza.

Esercizio 1.57 - Calcolare gli sviluppi di seno e coseno in $x = 0$.

Esercizio 1.58 - Si studi la convergenza e calcolare la somma di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right] x^n .$$

Esercizio 1.59 - Si studi la convergenza della seguente serie e calcolarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-3) \left(\frac{x+1}{x} \right)^n .$$

Esercizio 1.60 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1} - x^n}{n}$$

e calcolarne la somma.

Esercizio 1.61 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(x-1)^n}$$

e calcolarne la somma.

Esercizio 1.62 - Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{4-x}{x^2 - 5x + 6} .$$

Esercizio 1.63 - Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \frac{1+3x^2}{(1-x)^3} .$$

Esercizio 1.64 - Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x-2}{3x-2}\right)$$

precisandone l'insieme di convergenza.

Esercizio 1.65 - Calcolare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}}\, x^n$$

al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.66 - Calcolare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{2+x}{1+x^2}\right)$$

precisandone l'insieme di convergenza.

Esercizio 1.67 - Mostrare che $\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Esercizio 1.68 - Trovare una serie di potenze la cui somma, in un opportuno intervallo, sia $\log(1 + x - 2x^2)$.

Esercizio 1.69 - Si studi la serie di potenze $\displaystyle\sum_n \left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right)x^n$.

Esercizio 1.70 - Che differenza c'è fra la due serie di potenze

$$\sum_n \frac{1}{n^2}\, x^n \qquad \text{e} \qquad \sum_n \frac{1}{n^2}\, x^{n^2}\ ?$$

Esercizio 1.71 - Si studi le serie di potenze

$$\sum_n \frac{(n!)^3}{(3n)!}\, x^n \qquad \text{e} \qquad \sum_n \frac{(n!)^3}{(3n)!}\, x^{n^2}\ .$$

Esercizio 1.72 - Si studi la serie di potenze $\displaystyle\sum_n \frac{x^{n^n}}{n^n}$.

Esercizio 1.73 - Si studi la serie di potenze $\displaystyle\sum_n (2 + \operatorname{sen} n\pi/2)^n x^n$.

$*$ Esercizio 1.74 Si dimostri che

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1}\, dt = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

Soluzioni

Soluzione 1.1 - Limite puntuale:

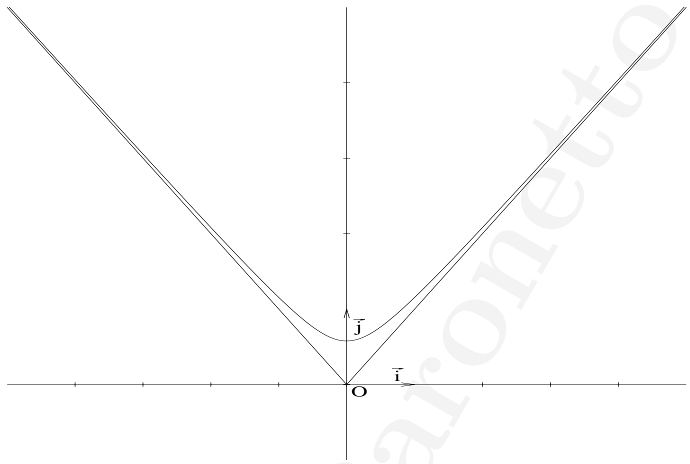

Figura 1.1:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = |x| \qquad \text{per ogni } x \in [-1,1]\,.$$

Limite uniforme:

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left| \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - |x| \right| = \sup_{x\in[-1,1]} \left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - |x| \right) \leqslant \sup_{x\in[-1,1]} \sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

Osservazione - Nell'ultimo passaggio si è usata la diseguaglianza $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$ (lasciata per esercizio).

Osservazione - Le funzioni f_n sono tutte funzioni C^1, ma il limite è solo continuo: la convergenza uniforme si trascina al limite la continuità, ma non la derivabilità.

Soluzione 1.2 - Il limite puntuale è dato da (si veda la Figura 1.2)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} \pi/2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\pi/2 & x < 0 \end{cases}$$

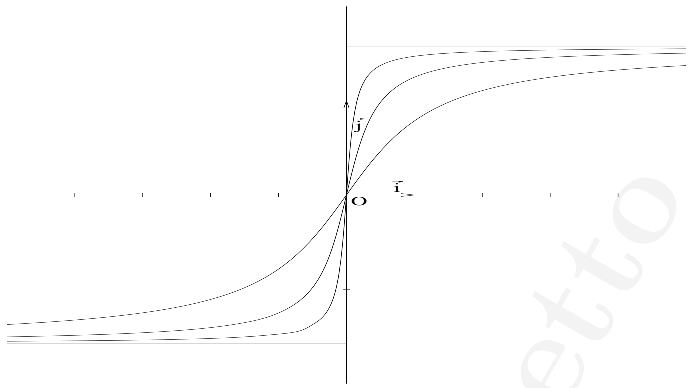

Figura 1.2:

Usiamo il Teorema 1.5 (continuità della funzione limite) delle dispense che qui ricordiamo brevemente.

Teorema 1.1 *Se una successione di funzioni continue in D converge uniformemente ad f in D allora f è continua in D.*

Questo può essere usato anche in negativo: cioè se $\{f_n\}_n$ è una successione di funzioni continue che converge puntualmente ad una funzione f non continua, la convergenza non può essere uniforme.
Concludiamo che se $D = \mathbf{R}$ f_n non converge uniformemente ad f. Ci si può chiedere se ci sono insiemi strettamente contenuti in $\mathbf{R}$ sui quali la convergenza è uniforme. Si consideri $A = [a, +\infty)$ con $a > 0$. La derivata di $|f_n - f| = f - f_n$ è sempre negativa (per cui non ci sono punti stazionari). Questo però ci dice che il massimo è assunto per $x_n = a$. Per cui

$$\sup_{x \in [a,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \pi/2 - f_n(a) = \pi/2 - \operatorname{arctg}(na)\,.$$

Dalla convergenza puntuale concludiamo che questa quantità converge a zero. Poiché analogamente si può trattare il caso in cui $A = (-\infty, b]$ con $b < 0$ concludiamo che f_n converge uniformemente ad f su tutti gli insiemi del tipo $(-\infty, b] \cup [a, +\infty)$ con $b < 0$ e $a > 0$ e solo in quelli.

Soluzione 1.3 - Limite puntuale:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1-x & x<0 \end{cases}$$

C'è convergenza uniforme negli insiemi $[a,b] \cup [c,d]$ con $b<0<c$.

Soluzione 1.4 - Il limite puntuale è $f \equiv 1$ su tutto $\mathbf{R}$. Prima di tutto si osservi che (si vedano alcuni grafici in Figura 1.3)

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f_n(x) = 0$$

e anche che

$$f_n(x) = 0 \quad \text{per } a_n = -n\,.$$

Per ognuna di queste ragioni

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)| \geqslant 1$$

e quindi non vi può essere convergenza uniforme su tutto $\mathbf{R}$ e nemmeno su semirette. Vediamo che succede se consideriamo un compatto $[a,b]$. Calcoliamo la derivata e poniamola uguale a zero. Si ha

$$f_n'(x) = 0 \iff x^2 + 2nx - n = 0$$

che ha come soluzioni $x_n = -n + \sqrt{n^2+n}$ e $y_n = -n - \sqrt{n^2+n}$. Si osservi che $x_n \to 1/2$ mentre $y_n \to -\infty$, quindi, qualunque sia $[a,b]$, y_n definitivamente non appartiene ad $[a,b]$. Se $1/2 \in (a,b)$ allora x_n definitivamente appartiene ad $[a,b]$. In $[a,b]$ quindi o non ci sono punti stazionari o c'è solamente x_n, nel quale f_n assume il suo valore massimo che vale

$$f_n(x_n) = \frac{\sqrt{n^2+n}}{2n(n+1-\sqrt{n^2+n})} = \frac{n+\sqrt{n^2+n}}{2n} \to 1\,.$$

Attenzione: il massimo di $|f_n - f|$ non è detto sia assunto in x_n. Infatti si ha

$$f_n(x) - f(x) = \frac{x(1-x)}{x^2+n}$$

che è positiva per $x \in (0,1)$ (e negativa altrimenti). Quindi

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} \dfrac{-x(1-x)}{x^2+n} & x \in [a,0] \\ \dfrac{x(1-x)}{x^2+n} & x \in [0,1] \\ \dfrac{-x(1-x)}{x^2+n} & x \in [1,b] \end{cases}$$

Per cui l'estremo superiore (che in realtà è un massimo) è sicuramente

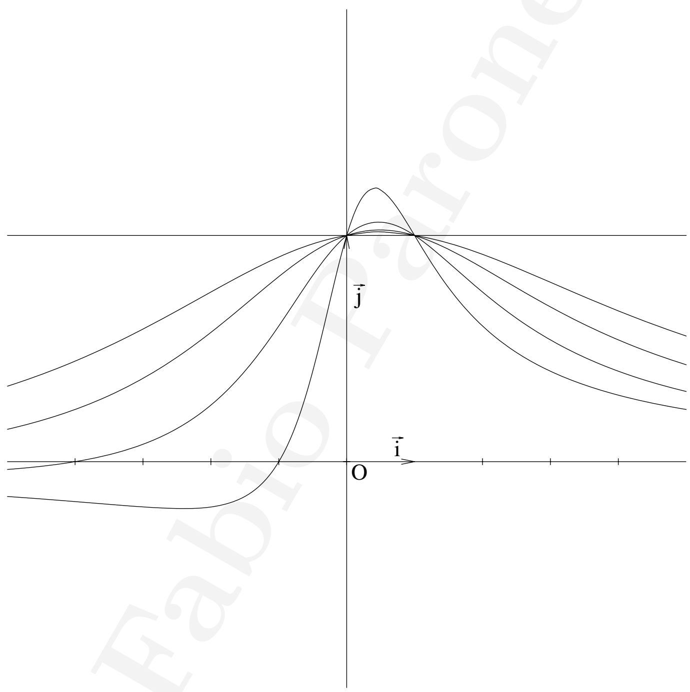

Figura 1.3:

assunto in $x = a$ o $x = b$ oppure $x = x_n$. Per cui

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \max\{|f_n(a) - 1|, |f_n(b) - 1|, f_n(x_n) - 1\}\,.$$

Poiché tutti e tre i valori dell'insieme a destra convergono a zero si conclude che $\{f_n\}_n$ converge uniformemente sui compatti.

Soluzione 1.6 - Convergenza puntuale: $f_n(x) \to 0$ per ogni $x \in [0,1]$. Per l'uniforme calcoliamo la derivata di f_n:

$$f_n'(x) = (1-x)^{n-1} \log n[(1-x) - nx]$$

e questa si annulla per $x_n = 1/(n+1)$ (la funzione è non negativa e nulla agli estremi, x_n è quindi di massimo). Il valore

$$f_n(x_n) = \frac{\log n}{n+1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n \to 0\,.$$

Soluzione 1.7 - Il limite puntuale è (in Figura 1.4 sono riportati i grafici di alcune f_n)

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \qquad\qquad \text{per ogni } x \in [0,1]\,.$$

Vediamo se il limite è anche uniforme:

$$f_n'(x) = \frac{n(1+n^2x^2) - 2n^3x^2}{(1+(nx)^2)^2} = \frac{n - n^3x^2}{(1+(nx)^2)^2}$$

che si annulla per $x_n = 1/n$. Ora $f_n(x_n) = 1/2$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ per cui

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Osservazione - Si osservi che il limite puntuale di funzioni continue può essere continuo anche se il limite non è uniforme.

Soluzione 1.8 - Facilmente si ha che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad \text{per ogni } x \in [0,+\infty)$$

La convergenza non è però uniforme. Infatti

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x)| = +\infty\,.$$

È uniforme però sui limitati. Si consideri, ad esempio, un intervallo $[0,a]$ con $a > 0$:

$$f_n'(x) = \frac{x^2 + 2nx}{(x+n)^2} \geqslant 0$$

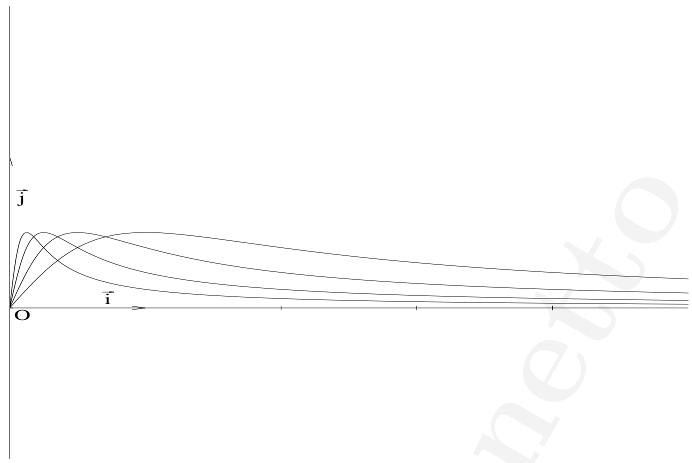

Figura 1.4:

per cui le funzioni sono crescenti e quindi assumono il massimo in $x = a$:

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| = \frac{a^2}{a+n} \to 0 \qquad \text{per ogni } a \in (0, +\infty)\,.$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |\textstyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{sen}\, nx dx| &\leqslant \lim_{n\to\infty} \textstyle\int_0^1 |f_n(x)||\mathrm{sen}\,(nx)|dx \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \textstyle\int_0^1 |f_n(x)|dx = 0 \end{aligned}$$

grazie al fatto che $f_n \to 0$ uniformemente in $[0,1]$. Si noti che anche le funzioni $x \mapsto f_n(x)\mathrm{sen}\,(nx)$ convergono uniformemente a 0 in $[0,1]$ poiché $g_n(x) = \mathrm{sen}\,(nx)$ sono equilimitate (questo è vero solo perché le f_n convergono a **zero**! In generale se $f_n \to f$ uniformemente e g_n sono equilimitate non possiamo affermare che $f_n g_n$ convergono uniformemente).

Soluzione 1.9 - Il limite puntuale è $f \equiv 0$. Per studiare la convergenza uniforme calcoliamo il massimo delle f_n.

$$f_n'(x) = n^\alpha (1-x^2)^{n-1}[1 - x^2(1+2n)] = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{1+2n}}$$

Valutiamo il massimo di $|f_n - f|$:

$$M_n(\alpha) = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = n^\alpha \frac{1}{\sqrt{1+2n}}\Big(1 - \frac{1}{1+2n}\Big)\,.$$

Si ha che

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} M_n(\alpha) = 0 && \text{per } 0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2} \\
&\lim_{n\to\infty} M_n(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2e}} && \text{per } \alpha = \frac{1}{2} \\
&\lim_{n\to\infty} M_n(\alpha) = +\infty && \text{per } \alpha > \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

e quindi vi è convergenza uniforme solo per $0 \leqslant \alpha < 1/2$. Calcoliamo l'integrale. Per $0 \leqslant \alpha < 1/2$

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_n f_n(x)dx = 0$$

grazie alla convergenza uniforme. Negli altri casi calcolo la primitiva che è data da

$$\int_0^1 f_n = -n^\alpha \frac{1}{2(n+1)}(1-x^2)^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{n^\alpha}{2(n+1)}\,.$$

Si ha allora che

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 0 && \text{per } 0 \leqslant \alpha < 1 \\
&\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \frac{1}{2} && \text{per } \alpha = 1 \\
&\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = +\infty && \text{per } \alpha > 1\,.
\end{aligned}$$

Soluzione 1.10 - La successione converge puntualmente a zero in $[0, 2)$. Converge uniformemente in solo in insiemi $[a, b] \subset [0, 2)$.

Soluzione 1.12 - Facilmente si vede che $f_n(0) = f_n(\pi) \to 0$.
Se $x \in (0, \pi)$, $x \neq \pi/2$ si ha che $\operatorname{sen}^2 x < 1$ e quindi si ha che esiste $a < 1$ per il quale definitivamente vale

$$\frac{1}{n} + \operatorname{sen}^2 x \leqslant a < 1$$

per cui $f_n(x) \to 0$ se $x \neq \pi/2$. Se $x = \pi/2$ si ha che

$$f_n(\pi/2) = \Big(\frac{1}{n} + 1\Big)^n \to e$$

quindi il limite puntuale è (si veda la Figura 1.5)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} e & x = \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & x \neq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Può convergere uniformemente? NO! Perché le f_n sono continue e f non lo

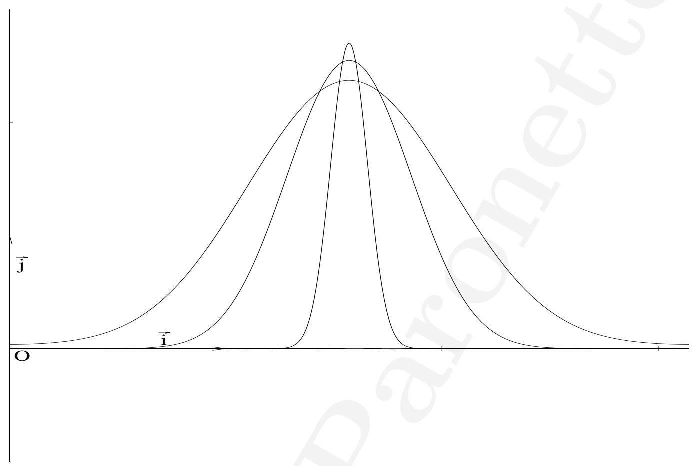

Figura 1.5:

è. Vediamo che succede se togliamo un intorno di $\pi/2$. Fisso $\delta > 0$ (e minore di $\pi/2$): in $[0, \pi/2 - \delta]$ f_n è crescente per ogni $n \in \mathbf{N}$ per cui il massimo è assunto per $x = \pi/2 - \delta$. Detto α il valore $\operatorname{sen}^2(\pi/2 - \delta) < 1$ si ha che esiste $\epsilon > 0$ tale che

$$\alpha + \epsilon < 1$$

e quindi

$$\max_{x\in[0,\pi/2-\delta]} |f_n(x)| \leqslant \left(\frac{1}{n} + \alpha\right)^n \leqslant (\alpha + \epsilon)^n \to 0\,.$$

Allo stesso modo si può procedere in $[\pi/2+\delta, \pi]$. Conclusione: f_n convergono uniformemente a $f \equiv 0$ in tutti gli insiemi del tipo $A_\delta = [0, \pi/2 - \delta] \cup [\pi/2 + \delta, \pi]$. Calcoliamo l'integrale:

$$|\int_0^\pi f_n(x)dx| = |\int_{A_\delta} f_n(x)dx + \int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2+\delta} f_n(x)dx| \leqslant \int_{A_\delta} |f_n|(x)dx + 2e\delta\,.$$

Passando al limite si ha che in A_δ, grazie alla convergenza uniforme, l'integrale tende a 0. Concludendo si ha che:

$$\forall\delta > 0 \quad \lim_{n\to\infty} |\int_0^\pi f_n(x)dx| < 2e\delta$$

il che significa che l'integrale tende a 0.

Soluzione 1.15 - Proponiamo due svolgimenti. Il primo: scrivendo $f_n(x)$ come $\log(1+x/n)^n$ si ottiene che il limite puntuale è la funzione $f(x) = x$. Vediamo se è uniforme. Prendiamo in considerazione le funzioni $g_n(x) = (1+x/n)^n$. Sappiamo dal primo corso di analisi che

$$(1+x/n)^n \text{ è definitivamente crescente in } n \text{ (per } x \geqslant -n)$$

e converge alla funzione $g(x) = e^x$. Allora anche f_n è definitivamente crescente in n, cioè

$$f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)\,.$$

Poiché le f_n sono continue e convergono puntualmente ad una funzione continua sul compatto $[-1,1]$ la convergenza è uniforme.
Che succede in $[-1,+\infty)$?

Il secondo svolgimento fa uso del seguente risultato.

Teorema 1.2 *Sia $(f_n)_n$ una successione in $C^1([a,b])$ tale che*

1) f_n' converge uniformemente ad una funzione g in $[a,b]$;

2) esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che $f_n(x_0)$ converge.

Allora la successione $(f_n)_n$ converge uniformemente ad una funzione f. Inoltre $f \in C^1([a,b])$ e $f' = g$.

Usiamo questo teorema per risolvere l'esercizio. Calcoliamo direttamente il limite uniforme di

$$f_n(x) = n\log(1+x/n)$$

in $[-1,1]$. Si ha che $f_n'(x) = \frac{n}{x+n}$ che converge uniformemente alla costante 1, inoltre $f_n(0)$ converge a 0. Per cui f_n converge uniformemente alla funzione f data da

$$f(x) = 0 + \int_0^x 1dt = x$$

Soluzione 1.18 - La successione converge puntualmente alla funzione nulla su tutto $\mathbf{R}$, uniformemente solo sui compatti.

Soluzione 1.19 - Supponiamo per il momento di dover studiare semplicemente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^n}\,.$$

In un caso del genere ci si può ridurre a studiare la serie geometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} y^n$$

pensando poi a sostituire a y $1/(1+x)$. Sappiamo che la serie geometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n - 1 \qquad \text{per } |q| < 1\,.$$

Di conseguenza la serie appena scritta converge alla funzione

$$\frac{y}{1-y}$$

puntualmente in $(-1,1)$ ed uniformemente e totalmente solo nei compatti $[a,b] \subset (-1,1)$. Infatti

$$\sup_{y\in[0,1)} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} y^n - \sum_{n=N}^{\infty} y^n \Big| = \sup_{y\in[0,1)} \Big| \sum_{n=N+1}^{\infty} y^n \Big| = +\infty$$

e anche

$$\sup_{y\in(-1,0]} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} y^n - \sum_{n=N}^{\infty} y^n \Big| = \sup_{y\in(-1,0]} \Big| \sum_{n=N+1}^{\infty} y^n \Big| = \sup_{y\in[0,1)} \Big| \frac{y^{N+1}}{1-y} \Big| = +\infty$$

per cui non può esservi convergenza uniforme, e nemmeno totale, in $(-1,0]$ e in $[0,1)$. Vediamo ora nei compatti $[a,b] \subset (-1,1)$. Infatti: si consideri per semplicità $[0,b]$ con $0 < b < 1$. Denotiamo con $g(y)$ il limite di g_N, cioè $g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y^n$. Si ha

$$\begin{aligned} \sup_{[0,b]} |g_N(y) - g(y)| &= \sup_{[0,b]} |\sum_{n=1}^{N} y^n - \sum_{n=1}^{\infty} y^n| = \sup_{[0,b]} |\sum_{n=N+1}^{\infty} y^n| \\ &\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} b^n = \tfrac{b^{N+1}}{1-b} \end{aligned}$$

Considerando il limite per $N \to \infty$ si ottiene la convergenza uniforme. Analogamente si ottiene in $[a, 0]$ con $-1 < a < 0$ e quindi in ogni $[a, b] \subset (-1, 1)$. Questo si traduce, per la serie considerata, nella convergenza alla funzione

$$\frac{\frac{1}{1+x}}{1 - \frac{1}{1+x}} = \frac{1}{x}$$

puntualmente in $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ e uniformemente e totalmente negli insiemi $(-\infty, \alpha]$, $[\beta, +\infty)$ con $\alpha < -2$ e $\beta > 0$. Infatti la trasformazione $g(x) = 1/(1 + x)$ manda l'intervallo $[a, 0]$, con $-1 < a$, in $(-\infty, \frac{1-a}{a}]$, e l'intervallo $[0, b]$, con $b < 1$, in $[\frac{1-b}{b}, +\infty)$. Se, ad esempio, $a = -\frac{1}{1+\delta}$ con $\delta > 0$, cioè a compreso tra -1 e 0, si ottiene che $\frac{1-a}{a} = -2 - \delta$, cioè un numero strettamente minore di -2. Analogamente si vede che $\frac{1-b}{b}$ è strettamente positivo.

Veniamo ora all'esercizio proposto: poiché la serie data è il limite, per $N \to +\infty$, di $\sum_{n=1}^{N} \frac{x}{(1+x)^n}$ per le somme finite si ha

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x}{(1+x)^n} = x \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(1+x)^n} \,.$$

Per cui l'insieme di convergenza puntuale contiene sicuramente l'insieme nel quale converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^n}$, cioè $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$. Si osservi però che la serie data converge anche per $x = 0$ (infatti ogni termine è identicamente nullo!). Perciò l'insieme di convergenza puntuale è $(-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$ e la funzione limite è

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)\,, \\ 0 & x = 0\,, \end{cases}$$

(poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^n} = 1/x$).
Per quanto riguarda le convergenze uniforme e totale si può ragionare come prima per ottenere che vi è convergenza negli insiemi del tipo $(-\infty, \alpha]$, $[\beta, +\infty)$ con $\alpha < -2$ e $\beta > 0$. Non può esservi convergenza uniforme, e di conseguenza nemmeno totale, nell'insieme $[0, +\infty)$ dal momento che la funzione limite è discontinua in tale insieme mentre le somme parziali sono ovviamente continue.
Cosa succederebbe se invece considerassimo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x)^n}$?
A questo proposito si veda anche l'Esercizio 1.47.

Soluzione 1.20 - Converge totalmente su $\mathbf{R}$.

Soluzione 1.21 - Puntuale per ogni $x \in \mathbf{R}$ perché, ad esempio,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big| \frac{x+n}{x^2+n^4+\log n} \Big| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x+n|}{n^4}$$

In generale vale, per $a, b > 0$, che $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, per cui $2(a^2+b^2) \geqslant (a+b)^2$, da cui

$$\Big| \frac{x+n}{x^2+n^4+\log n} \Big| \leqslant 2\frac{|x+n|}{2(x^2+n^4)} \leqslant 2\frac{|x+n|}{(|x|+n^2)^2} \leqslant \frac{2}{|x|+n^2} \leqslant \frac{2}{n^2}$$

per cui la serie converge totalmente in $\mathbf{R}$.

Soluzione 1.22 - Per ogni $x \in \mathbf{R}$ $1/\log(n+x^2)$ è decrescente in n per cui la serie è convergente per ogni x. La stima del resto

$$\Big| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} - \sum_{n=2}^{m-1} \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} \Big| \leqslant \frac{1}{\log(m+x^2)} \leqslant \frac{1}{\log m} \to 0$$

quindi vi è convergenza uniforme su tutto $\mathbf{R}$. Ovviamente non vi è la totale: si ha che

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \Big| \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} \Big| = \frac{1}{\log n}$$

(il massimo è assunto per $x = 0$, **fare la derivata per esercizio!**) e la serie $\sum_n (\log n)^{-1}$ diverge. Non c'è convergenza totale nemmeno in nessun intervallo (a, b) (o $[a, b]$) poiché

$$\sup_{x \in (a,b)} \Big| \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} \Big| = \max \Big\{ \frac{1}{\log(n+a^2)}, \frac{1}{\log(n+b^2)} \Big\}$$

se $0 \notin [a, b]$, mentre

$$\sup_{x \in (a,b)} \Big| \frac{(-1)^n}{\log(n+x^2)} \Big| = \frac{1}{\log n} \qquad \text{se } 0 \in [a, b].$$

Soluzione 1.23 - Per $x \geqslant 1$ si ha che

$$\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} \geqslant \frac{nx^n}{2|x|^n n^2} = \frac{1}{2n}$$

per cui la serie diverge. Per $x \in (-1,1)$ si ha che

$$\left|\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}\right| \leqslant n|x|^n$$

per cui vi è convergenza assoluta. Per $x \leqslant -1$

$$\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} = (-1)^n \frac{n|x|^n}{1+|x|^n n^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{n|x|^n}{1+|x|^n n^2} \leqslant \frac{1}{n}$$

Verifichiamo che è monotona decrescente in n: mi chiedo se

$$\frac{(n+1)|x|^{n+1}}{1+|x|^{n+1}(n+1)^2} \leqslant \frac{n|x|^n}{1+|x|^n n^2}$$

cioè se

$$n|x|^n + n(n+1)^2|x|^{2n+1} \geqslant (n+1)|x|^{n+1} + (n+1)n^2|x|^{2n+1}$$

il che è equivalente, per $x \neq 0$, a

$$(n+1)|x| \leqslant n(n+1)|x|^{n+1} + n$$

che è vero per ogni x soddisfacente $|x| \geqslant 1$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$. Usando il criterio di Leibniz si conclude che la serie converge in $(-\infty,-1]$.
Quindi converge puntualmente in $(-\infty,1)$.
Dalla stima in $(-1,1)$ si vede che vi è convergenza totale in $[0,a]$ per ogni $0<a<1$, ma non può esservi in $[0,1)$. Infatti la derivata, per $x>0$,

$$\frac{d}{dx}\frac{nx^n}{1+x^n n^2} = \frac{n^2 x^{n-1}}{(1+x^n n^2)^2} > 0 \tag{1.1}$$

per cui

$$\sup_{[0,1)} \frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} = \frac{n}{1+n^2}.$$

Dalla monotonia si conclude che non vi è nemmeno convergenza uniforme in $[0,1)$. Infatti

$$\sup_{[0,1)}\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}\right| =$$
$$= \sup_{[0,1)}\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}\right| = \sum_{n=N+1}^{\infty}\sup_{[0,1)}\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2} = +\infty.$$

Per x negativo si ha:

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}-\sum_{n=1}^{m-1}\frac{nx^n}{1+|x|^n n^2}\Big|\leqslant\frac{m|x|^m}{1+|x|^m m^2}\leqslant\frac{1}{m}\to 0\,.$$

Da (1.1) si ha che le funzioni sono monotone anche per $x<0$ (decrescenti per n pari, crescenti per n dispari). Analogamente a quanto visto prima si conclude che non vi può essere convergenza totale in $[-1,0]$ o in $[a,0]$ con $a\leqslant -1$. Conclusione: vi è convergenza puntuale in $(-\infty,1)$, uniforme su tutti gli insiemi del tipo $(-\infty,a]$ con $a<1$ e totale su tutti gli insiemi del tipo $[a,b]$ con $[a,b]\subset(-1,1)$.

Soluzione 1.24 - Questo è un esempio molto semplice si serie di funzioni non negative che converge uniformemente, ma non totalmente.
La funzione f è a supporto compatto e le f_n non sono altro che traslazioni di f. Di conseguenza $\sum f_n(x)$ in realtà è una somma finita, per cui c'è convergenza puntuale (e assoluta, visto che le f_n sono tutte non negative) su tutto $\mathbf{R}$. C'è convergenza uniforme? Si, su tutto $\mathbf{R}$, perché

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\Big|\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)-\sum_{n=N}^{\infty}f_n(x)\Big|=\sup_{x\in\mathbf{R}}\Big|\sum_{n=N+1}^{\infty}f_n(x)\Big|\leqslant\frac{1}{N+1}\,.$$

C'è convergenza totale? NO! perché il massimo di f_n è ovviamente $1/n$ assunto per $x_n=\pi/2+n$ e la serie $\sum_n\frac{1}{n}=+\infty$. Converge, però, totalmente sui sottoinsiemi del tipo $(-\infty,a]$.
Ex: modificare le f_n in modo tale da avere convergenza totale su $\mathbf{R}$.

Soluzione 1.25 - La successione di funzioni è definita solo per $x\in[-1,1]$. La serie converge totalmente in $[-1,1]$.

Soluzione 1.26 - Consideriamo dapprima la convergenza assoluta. Poiché la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2+n}{n^2}\qquad\text{diverge per ogni } x\in\mathbf{R}$$

non vi è convergenza assoluta e tantomeno convergenza assoluta uniforme o convergenza totale.
Passiamo alle convergenze semplice e uniforme. Usando il criterio di Leibniz si deduce che la serie converge per ogni $x\in\mathbf{R}$. Per vedere se la serie converge uniformemente usiamo la stima del criterio di Leibniz: detta f la somma

della serie si ha

$$\left|f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{x^2+k}{k^2}\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{x^2+k}{k^2}\right| \leqslant \left|\frac{x^2+n}{n^2}\right|$$

e quindi, considerando un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, si ha che

$$\sup_{x\in[a,b]} \left|f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{x^2+k}{k^2}\right| \leqslant \max\left\{\frac{a^2+n}{n^2}, \frac{b^2+n}{n^2}\right\} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

per cui vi è convergenza uniforme sui compatti. Non vi può essere convergenza uniforme su $\mathbf{R}$ o su una semiretta. Infatti

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} \left|\sum_{k=n}^{n+p} (-1)^k \frac{x^2+k}{k^2}\right| = +\infty \qquad \text{per ogni } p \in \mathbf{N}.$$

Questo perché il coefficiente di x^2 nella somma precedente è $\sum_{k=n}^{n+p} (-1)^k \frac{1}{k^2}$ che non è zero e quindi per il criterio di Cauchy per le serie di funzioni la serie non converge uniformemente in $[a,+\infty)$ e analogamente in $(-\infty,b]$. In conclusione la serie converge puntualmente ovunque, uniformemente solo sui compatti, non converge assolutamente o totalmente.

Soluzione 1.27 - Per $x < 0$ $\lim_{n\to\infty} xn^{-1}e^{-nx} = -\infty$ per cui la serie diverge. Per $x \geqslant 0$ la serie invece converge (per $x = 0$ è identicamente nulla, per $x > 0$ si può usare, ad esempio, il criterio del rapporto). Vediamo che in $[0,+\infty)$ la serie converge totalmente. Derivando si ottiene che il punto $x_n = 1/n$ è stazionario. Poiché $f_n(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ e $f_n \geqslant 0$ x_n risulta punto di massimo. Quindi

$$|f_n(x)| \leqslant f_n(1/n) = \frac{1}{n^2}\frac{1}{e} \to 0\,.$$

Soluzione 1.28 - Per $x > 1$ converge e per $x \leqslant 1$ diverge a $+\infty$. Poiché la funzione $f_n(x) = n^{-x}$ è decrescente si ha che

$$\sup_{x\in(1,+\infty)} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n}$$

e la serie $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Idem per la convergenza uniforme:

$$\sup_{x\in(1,+\infty)} \Big|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}\Big| = \sup_{x\in(1,+\infty)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = +\infty\,.$$

Se invece si considera un qualunque insieme del tipo $[a, +\infty)$ con $a > 1$ si ha, sempre per il fatto che f_n è decrescente, che $\sup_{x\in[a,+\infty)} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^a}$ e $\sum \frac{1}{n^a}$ converge per ogni $a > 1$. Concludendo si ha convergenza totale, e quindi anche uniforme, in tutti gli insiemi del tipo $[a, +\infty)$ con $a > 1$.

Soluzione 1.38 - La serie converge puntualmente in $[-1, 1)$ e assolutamente puntualmente in $(-1, 1)$.
La serie converge uniformemente in $[-1, b]$ per ogni $b < 1$ e assolutamente uniformemente in $[a, b]$ per ogni a, b tali che $-1 < a < b < 1$.
La serie converge totalmente in $[a, b]$ per ogni a, b tali che $-1 < a < b < 1$.

Soluzione 1.41 - La serie converge puntualmente per ogni $x \geqslant 0$. Per vederlo si fissi x e, poiché $\operatorname{sen} x \leqslant x$, per $n \geqslant x$ si ha che

$$0 \leqslant e^{x/n}\operatorname{sen}^2\left(\frac{2x}{n}\right) \leqslant e\frac{4x^2}{n^2}$$

e dal criterio del confronto si ha convergenza semplice per ogni $x \geqslant 0$.
Non si può avere convergenza totale poiché

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} e^{x/n}\operatorname{sen}^2\left(\frac{2x}{n}\right) = +\infty\,.$$

Non si può avere nemmeno convergenza uniforme in $[0, +\infty)$ perché se ci fosse ci sarebbe convergenza uniforme a zero delle funzioni $f_n(x) = e^{x/n}\operatorname{sen}^2\left(\frac{2x}{n}\right)$, e questa non c'è. Vediamo se la serie converge uniformemente in un insieme del tipo $[0, a]$: per n sufficientemente grande, basta che

$$\frac{2a}{n} \leqslant \frac{\pi}{2},$$

cioè $n \geqslant 4a/\pi$, si ha che la funzione $x \mapsto \operatorname{sen}^2\left(\frac{2x}{n}\right)$ è crescente. La funzione $x \mapsto e^{x/n}$ è ovviamente crescente, per cui il massimo di f_n è assunto proprio in a, almeno definitivamente. Per cui

$$\sup_{x\in[0,a]} e^{x/n}\operatorname{sen}^2\left(\frac{2x}{n}\right) = e^{a/n}\operatorname{sen}^2\left(\frac{2a}{n}\right) < e^{a/n}\frac{4a^2}{n^2} \qquad \text{per ogni } n \geqslant 4a/\pi\,.$$

Di conseguenza vi è convergenza totale ed uniforme in $[0, a]$ per ogni $a < +\infty$.

Soluzione 1.42 - Converge puntualmente, uniformemente e totalmente in $\mathbf{R}$.

Soluzione 1.43 - Limitiamoci per ora a considerare $x \in [0, +\infty)$, poi per simmetria si potranno trarre le analoghe considerazioni per x negativo.
Per $x = 0$ la serie chiaramente converge (a zero), per $x > 0$ la serie converge poiché

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x}{1 + nx^2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x}{nx^2} = \frac{1}{n^{3/2}} \frac{1}{x}$$

e per confronto si conclude. Vediamo se vi è convergenza totale. Derivando la funzione $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x}{1+nx^2}$ si ottiene

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{1}{n} \frac{1}{(1 + nx^2)^2} \Big[\sqrt{n}(1 + nx^2) - 2n^{3/2} x^2 \Big] = \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{(1 + nx^2)^2} \Big[\sqrt{n} - n^{3/2} x^2 \Big] \end{aligned}$$

per cui

$$f_n'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 = \frac{1}{n}.$$

Il punto $x_n = 1/\sqrt{n}$ è di massimo per f_n, che cresce in $[0, x_n]$ e decresce in $[x_n, +\infty)$. Poiché si ha

$$f_n(x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{1 + n\frac{1}{n}} = \frac{1}{2\,n}$$

non vi è convergenza totale in $[0, +\infty)$. Si osservi che se si fissa $a > 0$, poiché $x_n \to 0$ per $n \to +\infty$, definitivamente f_n risulta decrescente in $[a, +\infty)$; di conseguenza f_n ammette massimo in $x = a$ relativamente all'insieme $[a, +\infty)$. Poiché la serie

$$\sum_n f_n(a) \qquad \text{converge}$$

si ottiene che la serie data converge totalmente, e quindi anche uniformemente, in $[a, +\infty)$.
Rimane da rispondere alla domanda: vi è convergenza uniforme in $[0, +\infty)$ (o semplicemente in $[0, a]$ per un qualche $a > 0$)? Gli strumenti immediati che si hanno a disposizione sono: il primo (in positivo) è la convergenza totale che implica quella uniforme, ma si è già visto che la serie non converge totalmente in $[0, a]$. Il secondo (in negativo) è vedere che la successione

$(f_n)_n$ non converge uniformemente a zero in $[0,a]$, il che implicherebbe la non convergenza uniforme della serie in $[0,a]$. Ma poiché (definitivamente) si ha

$$|f_n(x)| \leqslant f_n(x_n) = \frac{1}{2\,n} \qquad \text{per ogni } x \in [0,a]$$

per cui la successione converge uniformemente in $[0,a]$, il che non aiuta a rispondere.

Proviamo allora in un altro modo: poiché

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x}{1+nx^2} = x \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+nx^2}$$

si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x}{1+nx^2} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+nx^2} \tag{1.2}$$

per cui studiamo ora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+nx^2}.$$

Dal criterio integrale per la convergenza delle serie, poiché la successione $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+nx^2}$ è decrescente (x fissato), si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{1+tx^2}\, dt \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+nx^2} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{1+tx^2}\, dt.$$

Ora, con il cambio di variabile $s = \sqrt{t}$ gli integrali diventano

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{1+tx^2}\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{2}{1+s^2x^2}\, ds = \frac{2}{x} \operatorname{arctg}(sx)\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{x} - 2\,\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{1+tx^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+s^2x^2}\, ds = \frac{2}{x} \operatorname{arctg}(sx)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{x}.$$

Detta F la funzione somma della serie in $[0,+\infty)$ da (1.2) si ricava che

$$\pi - 2\operatorname{arctg} x \leqslant F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x}{1+nx^2} \leqslant \pi$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} (\pi - 2\operatorname{arctg} x) \leqslant \liminf_{x\to 0} F(x) \leqslant \limsup_{x\to 0} F(x) \leqslant \pi.$$

Si deduce che $\lim_{x\to 0} F(x)$ esiste e

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \pi.$$

Poiché $F(0) = 0$ si conclude che F non è continua in 0. Poichè ognuna delle f_n è continua in $[0, a]$, e quindi lo è anche $\sum_{n=1}^{N} f_n$, non può esserci convergenza uniforme a F in $[0, a]$ altrimenti F sarebbe continua.
Considerenaod anche i valori negativi di x si osservi che la funzione somma F risulta continua in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Si conclude che vi è convergenza totale e uniforme in $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$ per ogni $a > 0$ e non vi è convergenza totale, e nemmeno uniforme, in $[-a, a]$ per ogni $a > 0$.

Soluzione 1.46 - Si osservi che la serie converge totalmente per ogni $p > 1$. Vi è quindi convergenza puntuale e uniforme su $\mathbf{R}$ ad una funzione f. Se si considera $p = 3$ si ottiene la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{sen} nx.$$

Considerando le derivate di ogni singolo termine e sommandole si ottiene la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx$$

che di nuovo converge totalmente. Per cui la somma della serie data è una funzione f di classe C^1 e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx.$$

In generale dato $p > 1$, la somma f della serie è di classe C^k se $p > k + 1$.

Soluzione 1.47 - Si veda anche la soluzione dell'esercizio che segue.

Per quanto riguarda la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ si procede come nella soluzione dell'Esercizio 1.19 per ottenere la convergenza puntuale in $(-1, 1)$ e uniforme e totale nei compatti contenuti in $(-1, 1)$ alla funzione

$$\frac{1}{1-x}.$$

Ciò che può modificare gli insiemi di convergenza è la presenza di $f(x)$. L'unica cosa che può alterare il comportamento della serie è il fatto che $f(1)$ e/o $f(-1)$ siano 0 (se $f(1) \neq 0$ e $f(-1) \neq 0$ la serie in 1 e -1 non converge), escludendo il caso in cui $f(x) = 0$ per ogni $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ che farebbe banalmente convergere la serie in tale insieme. Concentriamoci quindi sul comportamento di f in 1 e -1. Cominciamo considerando $f(x) = |x+1|^\alpha |x-1|^\beta$ con $\alpha, \beta \geqslant 0$. Chiaramente la serie converge in $(-1, 1)$ e non converge in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Nel punto -1, nel quale la serie $\sum_n x^n$ non è determinata, si ha che per qualunque valore positivo di α $f(-1) = 0$ e questo fa sì che la serie in -1 converga. Analogamente nel punto 1 la serie converge (è identicamente nulla) per $\beta > 0$. Il limite puntuale è dato dalla funzione

$$\begin{cases} (x+1)^\alpha (1-x)^{\beta-1} & x \in (-1,1) \quad \text{se } \alpha, \beta \geqslant 0 \\ 0 & x = -1 \qquad\ \ \text{se } \alpha > 0, \beta \geqslant 0 \\ 0 & x = 1 \qquad\quad\ \text{se } \alpha \geqslant 0, \beta > 0\,. \end{cases}$$

Vediamo ora le convergenze uniforme e totale. Giacché in $[-1, 0]$ vale la seguente stima

$$1 \leqslant |x-1|^\beta \leqslant 2^\beta$$

possiamo limitarci, per la convergenza totale in $[-1, 0]$, a studiare la funzione $|x+1|^\alpha x^n$ dal momento che, dalla stima appena sopra, si ha

$$|x+1|^\alpha |x|^n \leqslant |x+1|^\alpha |x-1|^\beta x^n \leqslant 2^\beta |x+1|^\alpha |x|^n\,. \qquad (*)$$

Derivando la funzione $|x+1|^\alpha |x|^n$ si ottiene il massimo in $-\frac{n}{n+\alpha}$ e valutando la funzione in tal punto si ottiene che il valore massimo (per $|x+1|^\alpha |x|^n$) è dato da

$$\frac{\alpha}{\alpha+n}\Big(\frac{n}{\alpha+n}\Big)^n.$$

Poiché $(\frac{n}{\alpha+n})^n \to e^{-\alpha}$ e $\sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha}{\alpha+n} = +\infty$, dalla prima delle due disuguaglianze in $(*)$ si deduce che la serie non può convergere totalmente in $[-1, 0]$. In maniera del tutto analoga si può vedere che il massimo di $|x-1|^\beta |x|^n$ è assunto in $\frac{n}{n+\beta}$ e vale $\frac{\beta}{\beta+n}\Big(\frac{n}{\beta+n}\Big)^n$ e quindi la serie non converge totalmente in $[0, 1]$. Però sui compatti $[a, b] \subset (-1, 1)$, dalla convergenza totale della serie $\sum_n x^n$ e dalla limitatezza di f, vi è convergenza totale.
Veniamo ora alla convergenza uniforme. In $[-1, 0]$ la serie è a segni alterni. Dal criterio di Leibniz, e usando la seconda disuguaglianza in $(*)$, ricaviamo

che

$$\sup_{x\in[-1,0]}\Big|\sum_{n=0}^{\infty}|x+1|^{\alpha}|x-1|^{\beta}x^n-\sum_{n=0}^{N}|x+1|^{\alpha}|x-1|^{\beta}x^n\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{x\in[-1,0]}\Big||x+1|^{\alpha}|x-1|^{\beta}|x|^{N+1}\Big|\leqslant 2^{\beta}\frac{\alpha}{\alpha+n}\Big(\frac{n}{\alpha+n}\Big)^{n}.$$

Tale quantità chiaramente tende a zero quando $n\to+\infty$, per cui la serie converge uniformemente in $[-1,0]$.
In $[0,1]$ la convergenza uniforme dipende dal valore del parametro β. Per $0<\beta\geqslant 1$ la serie in 1 converge a zero, per $x<1$ a $(1+x)^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}$: di conseguenza il limite non è continuo e non può esservi convergenza uniforme.
Per $\beta>1$ si ha

$$\sup_{x\in[0,1]}\Big|\sum_{n=0}^{\infty}f(x)x^n-\sum_{n=0}^{N-1}f(x)x^n\Big|=\sup_{x\in[0,1]}\Big|f(x)\frac{1}{1-x}-f(x)\frac{1-x^N}{1-x}\Big|=$$
$$=\sup_{x\in[0,1]}(x+1)^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}x^N$$

Limitandoci a considerare $(1-x)^{\beta-1}x^N$, poiché $(x+1)^{\alpha}$ è compreso tra 1 e 2^{α} per $x\in[0,1]$, valutando la derivata si ha

$$\frac{d}{dx}(1-x)^{\beta-1}x^N=0\quad\text{per } x=\frac{n}{n+\beta-1}$$

che è il punto di massimo (verificare!), nel quale la funzione assume il valore

$$\Big(\frac{\beta-1}{N+\beta-1}\Big)^{\beta-1}\Big(\frac{N}{N+\beta-1}\Big)^{N}$$

che tende a zero (verificare!) per ogni $\beta>1$.

Nel caso generale possiamo concludere che se $f(-1)=0$ vi è convergenza uniforme in $[-1,0]$, nell'intervallo positivo la serie si comporta come $\sum_n x^n$ se $f(1)\neq 0$. Se invece $f(1)=0$ ed esiste $\beta\in(0,1]$ tale che

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{(1-x)^{\beta}}=\lambda\in\mathbf{R},$$

cioè se l'ordine di infinitesimo di f in 1 è minore o uguale di 1, il limite esiste in tutto $[0,1]$, ma non è continuo, e quindi non vi può essere convergenza uniforme in $[0,1]$, se invece esiste $\beta>1$ tale che

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{(1-x)^{\beta}}=\lambda\in\mathbf{R},$$

cioè se l'ordine di infinitesimo di f in 1 è maggiore di 1, la serie converge uniformemente in tutto $[0,1]$. Per la totale bisognerà valutare il massimo e fare i conti.
Per quanto riguarda la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x)^n}$, proposta alla fine della soluzione dell'Esercizio 1.19, si può concludere che la serie converge uniformemente in $[0,+\infty)$.

Soluzione 1.48 - La serie chiaramente converge puntualmente in $[1,+\infty)$. Per $x>1$ è sufficiente confrontarla con la serie armonica generalizzata, per $x=1$ tutti i termini sono nulli.
Vediamo la convergenza totale. Detta $f_n(x) = \frac{(x-1)^\alpha}{n^x}$ si ha che annullando la derivanta dell'n-esimo addendo si ottiene

$$\left(\frac{1}{n^x}\right)^2 [\alpha(x-1)^{\alpha-1}n^x - (x-1)^\alpha n^x \log n] = \\ = \frac{(x-1)^{\alpha-1}}{n^x}[\alpha - (x-1)\log n] = 0.$$

Questo è vero per $x=1$ nel caso in cui α sia maggiore di 1 oppure, qualunque sia $\alpha>0$, per

$$\alpha = (x-1)\log n \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 1 + \frac{\alpha}{\log n}.$$

La funzione f_n si annulla in $x=1$ dopodiché è positiva e decresce a zero all'infinito. È quindi evidente che, detto x_n il valore $1+\frac{\alpha}{\log n}$, tale valore sia un punto di massimo. Si ha che

$$f_n(x_n) = \left(\frac{\alpha}{\log n}\right)^\alpha \frac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{\log n}}} > \left(\frac{\alpha}{\log n}\right)^\alpha \frac{1}{n}$$

e

$$\sum_n f_n(x_n) = \sum_n \frac{1}{n(\log n)^\alpha} \qquad \text{che} \begin{array}{ll} \diagup & \text{diverge} \quad \text{se } \alpha \in (0,1] \\ \diagdown & \text{converge} \quad \text{se } \alpha > 1 \end{array}$$

per cui non vi è convergenza totale per $\alpha \leqslant 1$. C'è invece per $\alpha > 1$, per cui in questi casi c'è anche convergenza uniforme in $[1,+\infty)$.
Concentriamoci ora nei casi $\alpha \leqslant 1$. Poiché $x_n \to 1$ si ha facilmente che $\sum f_n$ converge uniformemente in $[a,+\infty)$ per ogni $a>1$. Infatti definitivamente $x_n < a$ e di conseguenza il massimo di f_n, relativamente all'insieme $[a,+\infty)$,

è assunto in a. Per la convergenza puntuale si ha che $\sum f_n(a)$ converge e quindi c'è convergenza totale (e quindi uniforme) in $[a, +\infty)$.
Per quanto riguarda l'insieme $[1, +\infty)$ si ha che

$$f_n \qquad \text{converge uniformemente a zero in } [1, +\infty)$$

visto che $f_n(x_n)$ tende a zero, ma questo non aiuta.
Ora stimiamo la quantità

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Poiché

$$\frac{1}{2^{x-1}} \frac{1}{x-1} = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^x}\, dt < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} < \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\, dt = \frac{1}{x-1}$$

si ha che

$$\liminf_{x \to 1^+} \frac{(x-1)^\alpha}{2^{x-1}} \frac{1}{x-1} \leqslant \liminf_{x \to 1^+} \sum_n \frac{(x-1)^\alpha}{n^x} \leqslant$$
$$\leqslant \limsup_{x \to 1^+} \sum_n \frac{(x-1)^\alpha}{n^x} \leqslant \limsup_{x \to 1^+} \frac{(x-1)^\alpha}{x-1}.$$

Si conclude che $\lim_{x \to 1^+} \sum_n \frac{(x-1)^\alpha}{n^x}$ esiste e per $\alpha = 1$ si ha

$$\lim_{x \to 1^+} \sum_n \frac{(x-1)^\alpha}{n^x} = 1,$$

per $\alpha \in (0, 1)$ si ha

$$\lim_{x \to 1^+} \sum_n \frac{(x-1)^\alpha}{n^x} = +\infty.$$

In ogni caso, poiché la funzione somma della serie assume il valore 0 in 1 si ha che la funzione limite non è continua ed essendo tutti gli addendi continui non vi può essere convergenza uniforme altrimenti anche il limite sarebbe una funzione continua.

Soluzione 1.49 - Si veda la soluzione dell'esercizio precedente.

Soluzione 1.50 - Calcolando il seguente limite

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}$$

si ha che il raggio è 3. Conclusione: la serie converge (puntualmente) in $(-3,3)$ e non converge (puntualmente) in $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$. Vediamo in 3 e -3 che succede.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(-3)^n \quad \text{non converge,} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}3^n \quad \text{diverge}$$

Conclusione: si ha convergenza puntuale (solo) in $(-3,3)$. Vediamo gli altri tipi di convergenza.

Teorema 1.3 *Una serie di potenze centrata in* 0 *converge totalmente in ogni intervallo chiuso del tipo* $[-a,a]$ *con* $a<\rho$.

Si ha di conseguenza convergenza totale, e quindi uniforme, in ogni intervallo $[-a,a]$ con $a<3$. Vediamo se si ha convergenza uniforme anche in $(-3,3)$. Ragionando come al solito (si veda, ad esempio, la risoluzione dell'esercizio 1.19) si deduce che la serie non può convergere uniformemente in $(-3,3)$ e quindi nemmeno totalmente.
Si osservi che la serie ha come somma la funzione

$$f(x)=\frac{3}{3-x}\,.$$

Soluzione 1.51 - Si può fare il limite della radice n-esima di $\frac{n^\alpha+e^{\alpha n}}{n}$ oppure pensare la serie come (**perché?**)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^\alpha}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\alpha n}}{n}x^n$$

e studiare separatamente le due serie. Seguiamo quest'ultima strada. Il primo termine:

$$\sqrt[n]{n^{\alpha-1}}\to 1 \qquad \text{quindi il raggio di convergenza è } 1\,,$$

il secondo termine:

$$\sqrt[n]{\frac{e^{\alpha n}}{n}}\to e^\alpha \qquad \text{quindi il raggio di convergenza è } \frac{1}{e^\alpha}\,.$$

Se $\alpha=0$: il raggio è lo stesso e la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}x^n$. Vediamo la convergenza negli estremi: per $x=-1$ c'è, per $x=1$ no, quindi l'insieme di convergenza puntuale è $[-1,1)$. La convergenza è uniforme? Non può esserlo dappertutto (vedi esercizio precedente).

Teorema 1.4 (Leibniz) *Sia* $(a_n)_n$ *una serie a termini positivi. Se* $a_n \to 0$ *ed è decrescente allora* $\sum(-1)^n a_n$ *converge. Inoltre*

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{m}(-1)^n a_n\Big| \leqslant |a_{m+1}| \,.$$

Sicuramente abbiamo convergenza totale negli insiemi del tipo $[a, b]$ con $-1 < a < b < 1$, non abbiamo convergenza uniforme, e quindi nemmeno totale, in $[0, 1)$. Vediamo in $[-1, 0]$: qui la serie è a segni alterni, per vedere se la serie è uniformemente convergente uso il criterio di Leibniz. Detta f la somma della serie e f_n le somme parziali devo vedere se vale

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty \to 0$$

cioè

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{[-1,0]} \Big|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2}{k}|x|^k - \sum_{n=0}^{n}(-1)^k \frac{2}{k}|x|^k\Big|$$
$$\leqslant \lim_{n\to+\infty} \sup_{[-1,0]} \frac{2}{n+1}|x|^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} \to 0$$

quindi vi è convergenza uniforme in $[-1, 0]$, ma non totale! Concludendo: per $\alpha = 0$ si ha che la serie converge puntualmente in $[-1, 1)$, uniformemente in $[-1, b] \subset [-1, 1)$ e totalmente in ogni $[a, b] \subset (-1, 1)$.
Gli altri casi: se $\alpha > 0$ il raggio della somma delle due serie è $1/e^\alpha$. Il primo termine sicuramente converge totalmente in $[-1/e^\alpha, 1/e^\alpha]$, quindi limitiamoci a considerare il secondo. Negli estremi: per $x = -1/e^\alpha$ la serie converge, per $x = 1/e^\alpha$ la serie diverge, infatti si ha rispettivamente

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \,.$$

Convergenza uniforme e totale come sopra:

$$\text{convergenza uniforme in } \Big[-\tfrac{1}{e^\alpha}, b\Big] \quad \text{per ogni } b < \tfrac{1}{e^\alpha}$$

$$\text{convergenza totale in } [a, b] \quad \text{per ogni } a > -\tfrac{1}{e^\alpha}\,,\ b < \tfrac{1}{e^\alpha}$$

Se $\alpha < 0$ il raggio della somma delle due serie è 1. Vediamo gli estremi: il secondo termine questa volta converge totalmente in $[-1, 1]$. Il primo negli estremi è

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^{1-\alpha}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}}$$

che convergono entrambe. Vi è convergenza totale in $[-1,1]$.

Soluzione 1.52 - È facile vedere che

$$f^{(k)}(x) = f(x) \qquad \text{per ogni } k \in \mathbf{N}\,.$$

Per cui lo sviluppo di Taylor è dato da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

Vediamo di studiare la convergenza di questa serie: puntuale in tutto $\mathbf{R}$, ad esempio con il criterio della radice n-esima. Non può essere uniforme in tutto $\mathbf{R}$ perché

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = +\infty\,.$$

Se anche ci limitiamo a $x \in (-\infty, 0]$ abbiamo (p_n il polinomio di grado n delle somme fino all'n-esimo termine)

$$\sup_{x\in(-\infty,0]} \Big| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \Big| = \sup_{x\in(-\infty,0]} |e^x - p_n(x)| = +\infty\,.$$

Vediamo cosa si può dire: se mi limito a considerare un intervallo $[a,b]$ ho che

$$\Big| \frac{x^k}{k!} \Big| \leqslant \frac{b^k}{k!}$$

per la crescenza di x^k. La serie data dai maggioranti converge. Concludendo: la serie di Taylor in $x=0$ è data da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ che converge puntualmente su tutto $\mathbf{R}$ e uniformemente e totalmente solo sui compatti.

Soluzione 1.54 - La serie dell'esercizio **non è** una serie di potenze. Tuttavia lo studio di tale serie può essere ricondotto allo studio di una serie di potenze.
Innanzitutto si osservi che

$$\lim_n \Big[\frac{n}{n+2} \frac{|x|^n}{(1+x^2)^n} \Big]^{1/n} = \frac{|x|}{1+x^2}$$

che è sempre minore di 1 (per esercizio vedere che $\frac{|x|}{1+x^2} \leqslant 1/2$). Di conseguenza la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbf{R}$. Calcoliamo la somma della serie (per $|y| < 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\, y^n\,.$$

Si ha che

$$\frac{n}{n+2}\, y^n = \frac{n+2-2}{n+2}\, y^n = \Big[1 - \frac{2}{n+2}\Big]\, y^n = y^n - \frac{2}{y^2}\frac{1}{n+2}\, y^{n+2}$$

Ora mi chiedo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\, y^n \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} y^n - \frac{2}{y^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}\, y^{n+2}\,.$$

La risposta è si, perché $\lim_n(a_n+b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$ qualora i due limiti a destra (o almeno uno di essi) esistano e nel nostro caso le due serie a destra convergono entrambe (per $|y| < 1$). Prendiamo in esame il secondo termine:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}\, y^{n+2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^y t^{n+1}dt \overset{!}{=} \int_0^y \Big(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n+1}\Big)dt = \\
&= \int_0^y \Big(\sum_{n=2}^{\infty} t^n\Big)dt = \int_0^y \frac{t^2}{1-t}dt
\end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio con il punto esclamativo è lecito se la convergenza è uniforme!! (e lo è se y è fissato tra -1 e 1). Per integrare $\frac{t^2}{1-t}$ dividiamo t^2 per $1-t$ e scriviamo

$$t^2 = (1-t)(-1-t) + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{t^2}{1-t} = -(1+t) + \frac{1}{1-t}$$

e quindi integrando

$$\int_0^y \frac{t^2}{1-t}dt = -y - \frac{y^2}{2} - \log(1-y)\,.$$

Tirando le fila si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2}\, y^n &= \frac{y}{1-y} - \frac{2}{y^2}\Big[-y - \frac{y^2}{2} - \log(1-y)\Big] \\
&= \frac{y}{1-y} + \frac{2}{y} + 1 + \frac{2}{y^2}\log(1-y)
\end{aligned}$$

Si osservi che questa funzione è regolare anche se sembra avere singolarità in $y = 0$. Infatti $\log(1-y) = -y - y^2/2 - y^3/3 + o(y^3)$ e quindi

$$\begin{aligned}
&\frac{y}{1-y} + \frac{2}{y} + 1 + \frac{2}{y^2}\log(1-y) = \\
&\qquad = \frac{y}{1-y} + \frac{2}{y} + 1 + \frac{2}{y^2}\left[-y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + o(y^3)\right] = \\
&\qquad = \frac{y}{1-y} + \frac{2}{3}y + o(y).
\end{aligned}$$

Tornando al nostro problema: poiché la quantità $\frac{x^n}{(1+x^2)^n}$ è sempre minore di 1 la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\,\frac{x}{1+x^2}$$

converge puntualmente per ogni $x \in \mathbf{R}$; converge pure uniformemente e totalmente su $\mathbf{R}$ poiché $\frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}$. Si conclude sostituendo nell'espressione di sopra $\frac{x}{1+x^2}$ al posto di y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\,\frac{x^n}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{1+x^2-x} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{x^2}{2(1+x^2)^2} - \log\frac{1+x^2-x}{1+x^2}\,.$$

Soluzione 1.55 - Usiamo una conseguenza del seguente risultato.

Teorema 1.5 *Sia a_n serie a termini positivi. Se esiste*

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

allora esiste anche $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ e vale

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{a_n}\,.$$

Allora calcoliamo il limite della radice n-esima calcolando il rapporto (provare a farlo con la radice n-esima)

$$\lim_n \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!} = \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

quindi vi è convergenza puntuale in $(-e, e)$ e non vi è in $(-\infty, -e) \cup (e, +\infty)$. Vediamo gli estremi:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{quindi per } x = n \quad e^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} \geqslant \frac{n^n}{n!}$$

per cui

$$\frac{n!}{n^n}e^n \geqslant 1\,. \tag{1.3}$$

La serie quindi non converge per $x = -e$ e diverge a $+\infty$ per $x = e$. Ovviamente converge totalmente e uniformemente in tutti gli intervalli $[a, b] \subset (-e, e)$. Come al solito si ha che la serie non può convergere uniformemente in $(-e, e)$.
Anziché la stima (1.3) si può usare, per studiare il comportamento della serie in $x = e$ la formula di Stirling

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,\left(1 + O(1/n)\right).$$

Soluzione 1.56 - Sappiamo che la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \text{per } |q| < 1\,.$$

Possiamo allora concludere che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n \qquad \text{converge a} \qquad \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{per } |x| < 1\,.$$

Studiamo questa serie. Converge puntualmente in $(-1, 1)$. Per $x = 1$ e per $x = -1$ ovviamente non converge. Al solito, la serie non convergerà uniformemente in $(-1, 1)$, ma è facile vedere che converge totalmente in tutti i compatti $[a, b]$ contenuti in $(-1, 1)$. Calcoliamo la derivata di $f(x) = \text{arctg } x$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Integrando termine a termine si ha, posto $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}$, grazie alla convergenza uniforme

$$\lim_n \int_0^x f_n(t)dt = \int_0^x \lim_n f_n(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \text{arctg } x\,.$$

Ora

$$\int_0^x (-1)^k t^{2k} dt = (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$$

per cui

$$\text{arctg } x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

per ogni $x \in [-1,1]$ e la convergenza uniforme solo sui compatti contenuti in $(-1,1)$.

Soluzione 1.57 - Calcoliamo la derivata di $f(x) = \operatorname{sen} x$.

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= \cos x & \qquad f^{(1)}(0) &= 1 \\ f^{(2)}(x) &= -\operatorname{sen} x & \qquad f^{(2)}(0) &= 0 \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x & \qquad f^{(3)}(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x & \qquad f^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

e poi il ciclo si ripete. Quindi lo sviluppo in 0 è dato da

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \,.$$

Vediamo la convergenza. Per il criterio di Leibniz converge per ogni x reale. La convergenza è uniforme e totale solo sui compatti (in modo analogo all'esercizio precedente). In modo simile si calcola anche lo sviluppo del coseno

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \,.$$

Soluzione 1.58 - Si ha che

$$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$$

per cui il limite della radice n-esima è 0: la serie converge per ogni $x \in \mathbf{R}$. Prima di studiare le convergenze uniforme e totale calcoliamo la somma della serie. Sappiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \,.$$

Si ha che

$$\frac{n}{(n+1)!} x^n = x \frac{d}{dx} \Big[\frac{x^n}{(n+1)!} \Big] = x \frac{d}{dx} \Big[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{x} \Big]$$

per cui, grazie alla convergenza uniforme posso invertire il segno di derivata con il limite e ottenere

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} x \frac{d}{dx}\Big[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{x}\Big] \\
&= x\frac{d}{dx}\Big[\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\Big] \\
&= x\frac{d}{dx}\Big[\frac{1}{x}(e^x - 1 - x)\Big] \\
&= x\Big[-\frac{1}{x^2}(e^x - 1 - x) + \frac{1}{x}(e^x - 1)\Big] \\
&= e^x - \frac{1}{x}(e^x - 1)\,.
\end{aligned}$$

Vediamo la convergenza uniforme in $\mathbf{R}$:

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}x^k - \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}x^k\Big| = \sup_{x\in\mathbf{R}}\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}x^k\Big| = +\infty$$

quindi non vi è convergenza uniforme in $\mathbf{R}$. Nemmeno se ci limitiamo a semirette $[a,+\infty)$, perché l'estremo superiore è $+\infty$ proprio perché consideriamo la semiretta fino a $+\infty$. Che succede se consideriamo $(-\infty, 0]$?

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in(-\infty,0]}\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}x^k - \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}x^k\Big| = \\
&\qquad = \sup_{x\in(-\infty,0]}\Big|e^x - \frac{1}{x}(e^x - 1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}x^k\Big| = +\infty
\end{aligned}$$

perché $f(x) = e^x - \frac{1}{x}(e^x - 1)$ è limitata in $(-\infty, 0]$, mentre un polinomio di grado n no! Per $x \in [-a, a]$ con a positivo

$$\Big|\frac{k}{(k+1)!}x^k\Big| \leqslant \frac{k}{(k+1)!}a^k\,.$$

La serie $\sum_n \frac{na^n}{(n+1)!}$ converge per ogni a reale per cui si ha convergenza totale e uniforme in ogni compatto.

Soluzione 1.59 - Posso fare il cambio $y = (x+1)/x$ e studiare $\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)y^n$. Il raggio di convergenza è (si vede facilmente) 1, per cui la serie converge puntualmente per $y \in (-1, 1)$. La convergenza, al solito, è totale nei compatti $[a, b] \subset (-1, 1)$, ma non in $(-1, 1)$. Posso scrivere

$$(n-3)y^n = y^4(n-3)y^{n-4}$$

e vedere $(n-3)y^{n-4}$ come la derivata di y^{n-3}. Abbiamo

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)y^n &= -3-2y-y^2+\sum_{n=4}^{\infty}(n-3)y^n \\ &= -3-2y-y^2+\sum_{k=1}^{\infty}ky^{3+k}\end{aligned}$$

e

$$y^4\sum_{k=1}^{\infty}ky^{k-1} = y^4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dy}y^k = y^4\frac{d}{dy}\sum_{k=1}^{\infty}y^k = y^4\frac{d}{dy}\frac{y}{1-y} = \frac{y^4}{(1-y)^2}$$

Conclusione:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)y^n = -3-2y-y^2+\frac{y^4}{(1-y)^2}$$

dove la convergenza è puntuale per $y \in (-1,1)$ e totale sui compatti $[a,b] \subset (-1,1)$. La funzione $f(x)=(x+1)/x$ ha il grafico in Figura 1.6 per cui,

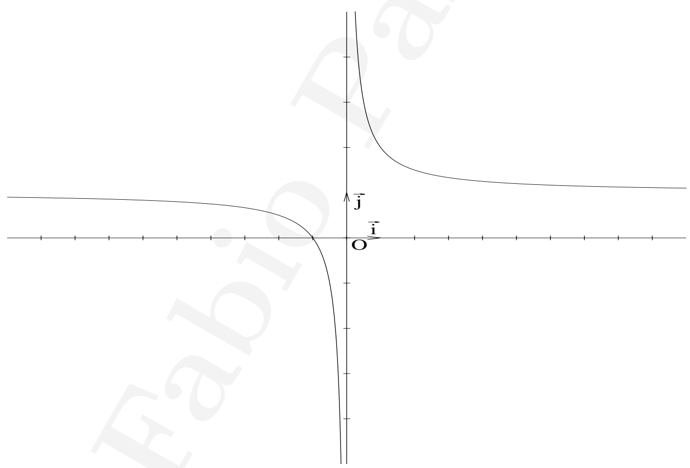

Figura 1.6:

tornando a considerare x, si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-3)\Big(\frac{x+1}{x}\Big)^n = -3-2\frac{x+1}{x}-\Big(\frac{x+1}{x}\Big)^2+\frac{(x+1)^4}{x^2}$$

dove la convergenza è puntuale per $x \in (-\infty,-1/2)$ e totale negli insiemi del tipo $[a,b] \subset (-\infty,-1/2)$. Infatti

$$\Big|\frac{x+1}{x}\Big| < 1 \quad \text{per} \quad x \in (-\infty,-1/2)\,.$$

Soluzione 1.62 - Spezzando il polinomio $x^2 - 5x + 6$ come prodotto di $x - 3$ e $x - 2$ si ottiene che

$$f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x-2}\,.$$

Sapendo che, per $|q| < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ converge al valore $\dfrac{1}{1-q}$ si può scrivere

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3-x} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{x}{3}\Big)^n$$

che converge per $|\frac{x}{3}| < 1$, cioè per $|x| < 3$. L'altro termine:

$$-\frac{2}{x-2} = \frac{2}{2-x} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{x}{2}\Big)^n$$

che converge per $|\frac{x}{2}| < 1$, cioè per $|x| < 2$. Sarà possibile effettuare la somma solo dove convergono entrambe, quindi sicuramente per $x \in (-2, 2)$ si ha che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\Big]x^n\,.$$

Soluzione 1.63 - Si osservi che

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{e che} \qquad \frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)^2} = 2\,\frac{1}{(1-x)^3}\,.$$

Poiché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge uniformemente in ogni intervallo chiuso $[a, b] \subset (-1, 1)$ e così pure la serie delle sue derivate (prime e seconde, ma non solo) si può affermare che (per quei valori di $x \in [a, b] \subset (-1, 1)$ con a, b arbitrari, ma $|a|, |b| < 1$, per cui per ogni $x \in (-1, 1)$)

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx} n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}\,.$$

Per cui dove vi è convergenza per entrambe le serie, e in questo caso entrambe convergono in $(-1,1)$, vale

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{3x^2}{(1-x)^3} = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + \frac{3x^2}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n(n-1)}{2}x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)+3n(n-1)}{2}x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (2n^2+1)x^n \,.
\end{aligned}
$$

Soluzione 1.64 - La funzione f può essere scritta nei seguenti modi

$$
\begin{aligned}
\log\left(\frac{x-2}{3x-2}\right) &= \log(x-2) - \log(3x-2) \qquad \text{NO!!} \\
&= \log(2-x) - \log(2-3x) \qquad \text{SI!!}
\end{aligned}
$$

Perché scartiamo il primo dei due? I due modi non sono equivalenti: la funzione f è definita quando il suo argomento è positivo, e cioè quando $x-2$ e $3x-2$ hanno lo stesso segno. Quindi f può essere spezzata come sopra nel primo modo se $x-2$ e $3x-2$ sono entrambi positivi, nel secondo modo se $x-2$ e $3x-2$ sono entrambi negativi. Per $x=0$, intorno al quale vogliamo sviluppare f, le funzioni $\log(x-2)$, $\log(3x-2)$ non sono definite, mentre $\log(2-x)$ e $\log(2-3x)$ sì.
Per esercizio, e anche per convincersi di quanto appena detto, disegnare i grafici di $\log(\frac{x-2}{3x-2})$, $\log(x-2)$, $\log(3x-2)$, $\log(2-x)$ e $\log(2-3x)$.
Abbiamo trasferito quindi il problema nello scrivere lo sviluppo delle due funzioni $\log(2-x)$ e $\log(2-3x)$. Si ha, per $|x/2|<1$,

$$
\frac{d}{dx}\log(2-x) = -\frac{1}{2-x} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n
$$

Integrando tra 0 e x, con $|x| < 2$, poiché la serie sopra converge uniformemente

$$\log(2-t)\Big|_0^x = -\frac{1}{2}\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n dt = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \left(\frac{t}{2}\right)^n dt$$

e quindi

$$\log(2-x) - \log 2 = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{n+1}\,.$$

Analogamente si ottiene, per $|3x/2| < 1$ e quindi per $|x| < 2/3$,

$$\log(2-3x) - \log 2 = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}\,.$$

Concludendo:

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{x-2}{3x-2}\right) &= \log 2 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{n+1} - \log 2 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\frac{x^{n+1}}{n}\end{aligned}$$

e l'insieme di convergenza è l'intersezione degli insiemi sui quali convergono separatamente le due serie. Concludiamo che

$$\log\left[\frac{x-2}{3x-2}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{1}{2^n}\right]\frac{x^n}{n}$$

e la convergenza è puntuale in $[-2/3, 2/3)$, uniforme in tutti gli insiemi del tipo $[-2/3, a]$ con $a \in (-2/3, 2/3)$ e totale in tutti gli insiemi del tipo $[b, c]$ con $b, c \in (-2/3, 2/3)$, $b < c$.
Infatti una delle due serie converge puntualmente almeno in $(-2, 2)$ e l'altra almeno in $(-2/3, 2/3) \subset (-2, 2)$, quindi la serie converge in $(-2/3, 2/3)$ e non converge in $(-\infty, -2/3)\cup(2/3, +\infty)$ (per verifica calcolare il limite della radice n-esima dei coefficienti). Negli estremi: è sufficiente studiare la seconda serie, poiché convergendo la prima in $(-2, 2)$ in particolare convergerà in $-2/3$ e $2/3$. Per $x = 2/3$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}\frac{1}{n}$$

che diverge a $+\infty$, mentre per $x = -2/3$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{3}{2}\Big)^n \Big(-\frac{2}{3}\Big)^{n+1} \frac{1}{n} = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

che converge.
La convergenza è uniforme in tutti gli intervalli del tipo $[-2/3, a]$ con $a < 2/3$ e totale negli intervalli del tipo $[b, c] \subset (-2/3, 2/3)$.

Soluzione 1.65 - L'insieme è $[-1, 1]$ per $\alpha < -1/2$, $[-1, 1)$ per $\alpha \geqslant -1/2$.

Soluzione 1.68 - Si può fare seguendo la soluzione dell'Esercizio 1.64 osservando che $1 + x - 2x^2 = (2x + 1)(1 - x)$.

Soluzione 1.70 - Attenzione! nella prima serie i coefficienti a_n sono dati da $1/n^2$, nella seconda no! Alcuni infatti sono zero. I coefficienti della seconda serie sono infatti

$$a_n = \begin{cases} 1/n & \text{se } n = k^2 \text{ con } k \in \mathbf{N}\,, \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Il comportamento però è lo stesso: infatti la prima converge totalmente in $[-1, 1]$; e la serie converge sia in -1 che in 1. Per lo studio della seconda si può usare semplicemente il criterio della radice, valutando

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^2}/n^2} = \lim_{n\to\infty} |x|^n \sqrt[n]{1/n^2}$$

si ottiene che la serie converge (assolutamente) per $|x| \leqslant 1$ e non converge per $|x| > 1$. La convergenza in $[-1, 1]$ è totale.
A proposito della seconda serie si veda anche l'Osservazione 1.24.4 delle dispense di teoria di Analisi II (Albanese-Leaci-Pallara).

Soluzione 1.72 - Si osservi che i termini di questa serie sono "alcuni" dei termini della serie $\sum_k \frac{1}{k} x^k$. Infatti i coefficienti a_n sono dati da

$$a_n = \begin{cases} 1/n & \text{se } n = k^k \text{ con } k \in \mathbf{N}\,, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per cui

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{1/n} & \text{se } n = k^k \text{ con } k \in \mathbf{N}\,, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di conseguenza il limite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ non esiste. Possiamo trattare la serie come una serie numerica, fissando x e valutando

$$\sqrt[n]{\left|\frac{x^{n^n}}{n^n}\right|} = \frac{x^{n^{n-1}}}{n}\,.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene che la serie converge per $x \in [-1, 1]$.
Alternativamente, per chi conoscesse il *limsup* e che il raggio di convergenza è dato dal reciproco di $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, si ha che $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k^k]{k^k} = \lim_{h\to\infty} \sqrt[h]{h} = 1$. Il raggio quindi è 1. Per $x = 1$ e $x = -1$ la serie converge e quindi l'insieme di convergenza è $[-1, 1]$. La convergenza è anche totale.
Si veda anche l'Osservazione 1.24.4 delle dispense di teoria di Analisi II (Albanese-Leaci-Pallara).

Soluzione 1.73 - Questo è un esempio in cui il limite di $a_n = (2+\operatorname{sen} n\pi/2)^n$ non esiste. Si ha che

$$2 + \operatorname{sen} n\pi/2 \quad \text{può assumere i valori } 1, 2, 3\,.$$

Si ha però che

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(2 + \operatorname{sen} n\pi/2)^n} = 3$$

e quindi il raggio di convergenza è $1/3$.
Si osservi come se si fissa $x > 1/3$ si ha che per infiniti valori di $n \in \mathbf{N}$

$$(2 + \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2})^n x^n > 1\,.$$

Soluzione 1.74 - Poiché per $t > 0$

$$\frac{1}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}$$

serie la quale converge per $t > 0$, si ha che

$$\frac{t^2}{e^t - 1} = \frac{1}{e^t}\,\frac{t^2}{1 - e^{-t}} = \frac{1}{e^t}\sum_{n=0}^{+\infty} t^2\, e^{-nt}.$$

Si osservi come tale serie converga anche per $t = 0$ (a zero) e uniformemente in $[0, +\infty)$. Infatti derivando la funzione $f_n(t) = t^2\, e^{-nt}$ (che si annulla in $t = 0$ e decresce a zero per $t \to +\infty$) e annullando la sua derivata si ottiene il punto di massimo

$$t_n = \frac{2}{n}$$

nel quale la funzione f_n assume il valore

$$\frac{1}{e^2}\,\frac{4}{n^2}.$$

Per cui $0 \leqslant f_n(t) \leqslant 4/(e\, n)^2$ in $[0, +\infty)$ e la serie quindi converge totalmente e uniformemente in $[0, +\infty)$. Dall'ultima osservazione del secondo paragrafo (Serie di funzioni) del capitolo *Successione e serie di funzioni* si ha che

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t}\, e^{-nt}\, dt.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^c \frac{t^2}{e^t}\, e^{-nt}\, dt &= \int_0^c t^2\, e^{-(n+1)t}\, dt = -\, t^2\, \frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}\bigg|_0^c + 2 \int_0^c t\, \frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}\, dt = \\ &= -\, c^2\, \frac{e^{-(n+1)c}}{n+1} + 2 \int_0^c t\, \frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}\, dt \end{aligned}$$

e poiché

$$\begin{aligned} \int_0^c t\, e^{-(n+1)}\, dt &= -\, t\, \frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}\bigg|_0^c + \int_N^c \frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}\, dt = \\ &= -\, c\, \frac{e^{-(n+1)c}}{n+1} - \frac{e^{-(n+1)c}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

mandando $c \to +\infty$ si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t}\, e^{-nt}\, dt = \frac{2}{(n+1)^3}$$

per cui sommando su n

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t}\, e^{-nt}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)^3} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Si provi con la stessa tecnica che

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^k}{e^t - 1}\, dt = k! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \qquad \text{con } k \in \mathbf{N},\ k \geqslant 2.$$

Si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^k}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{e^t}\, e^{-nt}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^k\, e^{-(n+1)t}\, dt$$

e

$$\int_0^{+\infty} t^k\, e^{-(n+1)t}\, dt = \frac{k}{n+1} \int_0^{+\infty} t^{k-1}\, e^{-(n+1)t}\, dt.$$

Induttivamente si ha

$$\int_0^{+\infty} t^k\, e^{-(n+1)t}\, dt = \frac{k!}{(n+1)^{k-1}} \int_0^{+\infty} t\, e^{-(n+1)t}\, dt = \frac{k!}{(n+1)^{k+1}}$$

per cui infine la tesi.
Con la stessa tecnica è possibile calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt\ ?$$

In realtà non vi è convergenza totale della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} t\, e^{-nt}$ in $[0, +\infty)$ come si può verificare facilmente (il massimo è assunto in $1/n$ dove la serie diventa $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{ne}$). Ma in $[a, +\infty)$ c'è convergenza totale.
Allora, volendo, si può scrivere come una serie numerica la quantità

$$\int_a^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt\, .$$

Infatti

$$\int_a^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^{+\infty} \frac{t}{e^t}\, e^{-nt}\, dt$$

e similmente a prima si ottiene

$$\int_a^{+\infty} \frac{t}{e^t}\, e^{-nt}\, dt = a\, \frac{e^{-(n+1)a}}{n+1} + \frac{e^{-(n+1)a}}{(n+1)^2}\, .$$

Quindi per ogni $a > 0$ si ha

$$\int_a^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[a\, \frac{e^{-(n+1)a}}{n+1} + \frac{e^{-(n+1)a}}{(n+1)^2} \right].$$