Capitolo 3

Massimi e minimi di funzioni

Ultimo aggiornamento: 15 maggio 2018

Massimi e minimi su compatti o chiusi

Esercizio 3.1 - Si trovino i punti di massimo e minimo e i valori massimo e minimo della funzione $f : A \to \mathbf{R}$ dove $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} \leqslant 1\}$ e $f(x, y) = x^3 - y^2$.

Esercizio 3.2 - Si trovino i punti di massimo e minimo e i valori massimo e minimo della funzione $f : A \to \mathbf{R}$ dove $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ e $f(x, y) = x^3 + y^2$.

Esercizio 3.3 - Si trovino massimo e minimo della funzione $f(x, y) = x^2 - y^2 + e^{x^2+y^2}$ in $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant r\}$.

Esercizio 3.4 - Si trovino massimo e minimo della funzione $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-2x-y}$ in $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

Esercizio 3.5 - Si trovino massimo e minimo della funzione $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x^4 - y^4)$ in $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Esercizio 3.6 - Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

nell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Esercizio 3.7 - Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x,y) = |y-1|(2-y-x^2)$$

nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant 2 - x^2 - y^2\}$.

Esercizio 3.8 - Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geqslant 1 - x,\ y \leqslant \sqrt{x^2+1},\ y \geqslant \sqrt{x^2-1}\}$.

Esercizio 3.9 - Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

nell'insieme (non chiuso) $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geqslant 0,\ x \geqslant 0, y \leqslant 1-x\} \setminus \{(0,0)\}$.

Esercizio 3.10 - Siano dati tre punti P_1, P_2, P_3 nel piano. Si vogliono unire i tre punti con dei segmenti partenti da un quarto punto P in modo tale da minimizzare la somma delle lunghezze dei segmenti $\overline{P_1P}$, $\overline{P_2P}$, $\overline{P_3P}$.

Esercizio 3.11 - Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x,y) = \frac{1}{1 + x^2 + (y-1)^2}$$

nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{|x|}\}$.

Esercizio 3.12 - Si trovino il massimo e il minimo della funzione $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2y + 1$ nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leqslant 3\}$.

Esercizio 3.13 - Sia $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ una matrice simmetrica (a coefficienti reali). Data la forma bilineare

$$\langle Ax, y \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j y_i$$

massimizzare e minimizzare la funzione

$$f(x) = \frac{\langle Ax, x \rangle}{|x|^2} = \frac{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j x_i}{|x|^2}$$

definita per $|x| \neq 0$.

Massimi e minimi su compatti osservando le curve (o gli insiemi) di livello

Esercizio 3.14 - Rifare gli esercizi 3.1, 3.2 utilizzando lo studio degli insiemi di livello.

Esercizio 3.15 - Si trovino massimo e minimo della funzione $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$ nei seguenti insiemi: $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 1\,, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$, $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\,, -\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\}$, $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 4x^2 + \frac{64}{9}(y-\frac{5}{8})^2 = 1\}$, $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leqslant 2\}$, $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \leqslant y \leqslant x\}$.

Esercizio 3.16 - Si trovino massimo e minimo della funzione $f(x,y) = |x| - |y|$ in $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2+y^2 = 1\}$.

Esercizio 3.17 - Si trovino massimo e minimo della funzione $f(x,y) = \operatorname{arctg}\log(x^2+y^2)$ in $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2+4y^2 \geqslant 1\}$.

Esercizio 3.18 - Si trovino massimo e minimo della funzione $f(x,y) = (y-x^2)^3$ nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x+2 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}\}$.

Esercizio 3.19 - Si trovino massimo e minimo della funzione $f(x,y) = (x+y)^2$ nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 4\}$.

Esercizio 3.20 - Si trovino massimo e minimo della funzione $f(x,y) = x^2+2y^2$ nel rettangolo di vertici $(1,0), (e,0), (e,1), (1,1)$.

Esercizio 3.21 - Si trovino massimo e minimo della funzione $f(x,y) = x^2+2y^2$ nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$.

Esercizio 3.22 - Si trovino massimo e minimo della funzione $f(x,y) = (y-x^2)^3$ nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$.

Esercizio 3.23 - Si trovino massimo e minimo della funzione $f(x,y) = \log\frac{x^2}{x+y}$ nell'insieme compatto delimitato dal segmento di estremi $(1,0)$ e $(2,2)$, dal segmento di estremi $(1,0)$ e $(4,12)$ e dall'arco di parabola di equazione x^2-x con $x \in [2,4]$.

Esercizio 3.24 - Si trovino massimo e minimo della funzione $f(x,y) = \operatorname{arctg}\,[x^2+6x+9+y^2-4y+4]$ nel triangolo chiuso di vertici $(-1,-3)$, $(2,-3)$ e $(2,0)$.

Esercizio 3.25 - Si trovino massimo e minimo della funzione $f(x,y) = \operatorname{th}(|y| - e^x)$ nel triangolo chiuso di vertici $(0,0)$, $(1,2)$ e $(1,0)$.
[Ricordo: il simbolo th denota la tangente iperbolica, rapporto tra seno iperbolico e coseno iperbolico]

Esercizio 3.26 - Si trovino massimo e minimo della funzione $f(x,y) = y - g(x)$ nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$ dove $g(x) = \sqrt{x}$ per $x \geqslant 0$ e $g(x) = -\sqrt{-x}$ per $x < 0$.

Esercizio 3.27 - Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

nell'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 + 4z^2 \leqslant 4\,, x \geqslant 0\}$.

Massimi e minimi su illimitati e natura dei punti critici

Esercizio 3.28 - Determinare i punti critici della funzione $f(x, y) = \operatorname{senh}(x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2)$ all'interno dell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x|(1+(y-2)^2)-2 < 0\}$, studiarne la natura e stabilire se f ammette massimo e minimo.

Esercizio 3.29 - Determinare i punti critici della funzione $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ in $\mathbf{R}^2$, studiarne la natura e stabilire se f ammette massimo e minimo in $\mathbf{R}^2$.

Esercizio 3.30 - Studiare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 + 2\,.$$

Esercizio 3.31 - Si consideri la funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^4 + y^2 + z^3 - 2xz$. Studiarne i punti critici.

Esercizio 3.32 - Studiare i punti critici della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + y^3 - 8x^3 - 6xy^2 + 12yx^2$.

Esercizio 3.33 - Studiare i punti critici della funzione $f(x, y, z) = \frac{3}{4}x^2 + 8y^2 + 7xy + z^4$.

Esercizio 3.34 - Studiare i punti critici della funzione $f(x, y) = y^2 - 4x^2y + 3x^4$.

Esercizio 3.35 - Si studi la natura dei punti critici della funzione $f(x, y) = 3x^6 + 4x^3 - 4x^3y - 2y + y^2 + 1$.

Esercizio 3.36 - Cercare i punti di massimo e minimo di $f(x, y) = xe^{-xy}$ nell'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 2x\}$,

Esercizio 3.37 - Si trovino, se esistono, i punti di massimo e minimo di $f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2$ nell'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + 4y - 6z + 5 = 0\}$.

Esercizio 3.38 - Si trovino, se esistono, i punti di massimo e minimo di

$$f(x, y) = \frac{2x - 2y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

in $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| \leqslant y \leqslant 1 + |x|\}$.

Soluzioni

Soluzione 3.1 - Per il teorema di Weierstrass f ammette sia massimo che minimo. All'interno si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y \end{cases}$$

che ha soluzione solo per $(x,y) = (0,0)$ che è all'interno di A.

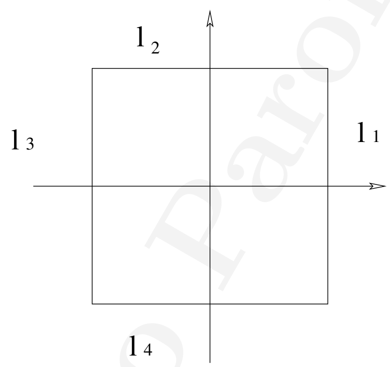

Figura 3.1:

Vediamo il bordo. Prendiamo in considerazione il lato l_1: parametrizziamo con la seguente funzione

$$\varphi : (-1,1) \to \mathbf{R}\,, \qquad \varphi(t) = (1,t)$$

e consideriamo $f \circ \varphi : (-1,1) \to \mathbf{R}$. Si ha

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi)(t) = \frac{d}{dt} f(\varphi(t)) = \frac{d}{dt} f(1,t) = \frac{d}{dt}(1 - t^2) = -2t = 0$$

per $t = 0$ che corrisponde al punto $(1, \varphi(0)) = (1,0)$. Chiaramente in casi semplici come questo si può considerare direttamente la funzione f ristretta all'insieme l_1 e derivare rispetto a y la funzione $f(1,y) = 1 - y^2$, ma in tal caso si presti molta attenzione! Bisogna sempre ricordare che alla base c'è una parametrizzazione e quindi non si possono sostituire le variabili con

leggerezza (si veda un esempio in cui si può cadere in inganno nell'Esercizio 3.6).
Analogamente si parametrizzano gli altri lati e derivando si ottengono i punti $(0, 1)$ sul lato l_2, $(-1, 0)$ sul lato l_3, $(0, -1)$ sul lato l_4. Abbiamo quindi i seguenti candidati:

$(0, 0)$	punto critico interno
$(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$	punti "critici" di bordo
$(1, 1)\,, (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$	vertici

A questo punto valutando la funzione f su tutti e nove i punti si trova che il punto di massimo è $(1, 0)$ e il valore massimo di f è $f(1, 0) = 1$, i punti di minimo sono $(-1, 1)$ e $(-1, -1)$ e il valore minimo di f è $f(-1, 1) = f(-1, -1) = -2$.

Soluzione 3.2 - Come nell'esercizio precedente si ottiene solamente il punto $(0, 0)$ stazionario per f. Vediamo il bordo: lo si può parametrizzare con la

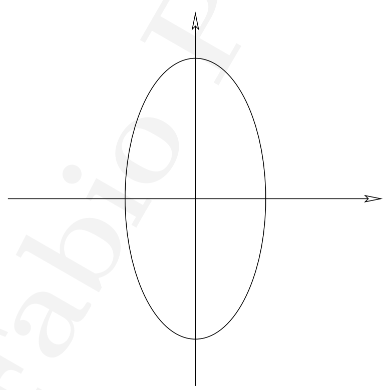

Figura 3.2:

funzione

$$\varphi(t) = \Big(\frac{1}{2}\cos t,\, \operatorname{sen} t\Big)$$

con $t \in [0, 2\pi)$ (in questo caso non è importante l'intervallo che si sceglie, si potrebbe considerare un qualunque intervallo $[a, a{+}2\pi)$, quindi se anche $t = 0$ fosse punto critico per $f \circ \varphi$ non va scartato perché cambiando l'intervallo di definizione di φ lo si può forzare ad essere un punto interno!!).

Deriviamo allora $f \circ \varphi(t) = \frac{1}{8}\cos^3 t + \operatorname{sen}^2 t$ e otteniamo

$$\operatorname{sen} t \cos t\Big(2 - \frac{3}{8}\cos t\Big) = 0$$

che si annulla se $\operatorname{sen} t = 0$, $\cos t = 0$ oppure $(2 - \frac{3}{8}\cos t) = 0$. Quest'ultmia non è mai 0 per cui rimangono i valori $t = 0$ corrispondente a $(1/2, 0)$, $t = \pi/2$ corrispondente a $(0, 1)$, $t = \pi$ corrispondente a $(-1/2, 0)$, $t = 3\pi/2$ corrispondente a $(0, -1)$. Si conlude valutando f in questi quattro punti e nell'origine per ottenere che $(-1/2, 0)$ è il punto di minimo ($-1/8$ il valore minimo), $(0, -1)$ e $(0, 1)$ i punti di massimo (1 il valore massimo).

Soluzione 3.6 - L'insieme in questione è un cerchio. Le derivate parziali della funzione f poste uguali a zero

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

forniscono il punto $(0, 0)$ interno ad E. Ora dobbiamo parametrizzare il bordo $\partial E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
!!! Si può essere tentati dall'inserire nell'espressione di f la quantità $1 - x^2$ al posto di y^2 e considerare così

$$\tilde{f}(x) = 2x^2 - 1\,.$$

Annullando le derivate di $\tilde{f}$ si ottiene la soluzione $x = 0$ che corrisponde ai due punti $(0, 1)$ e $(0, -1)$.
Analogamente si potrebbe sostituire a x^2 la quantità $1 - y^2$ e studiare la funzione

$$\hat{f}(y) = 1 - y^2$$

ottenendo i due punti $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.
Se invece parametrizziamo il bordo con

$$\varphi(\vartheta) = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$$

e consideriamo

$$f(\varphi(\vartheta)) = \cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta$$

derivando si ottiene

$$4\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta = 0$$

per cui si hanno le soluzioni $\operatorname{sen}\vartheta = 0$ o $\cos\vartheta = 0$ che corrispondono ai punti quattro $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ e $(-1,0)$, due di massimo, due di minimo.
Perché in questo modo abbiamo trovato quattro punti, mentre per $\tilde{f}$ e $\hat{f}$ solamente due?
Concludendo l'esercizio si ottiene che $(0,1)$ e $(0,-1)$ sono punti di minimo e $(1,0)$ e $(-1,0)$ sono punti di massimo.

Soluzione 3.10 - Indichiamo con (x,y) un generico punto P del piano e i tre punti dati

$$P_1 = (x_1, y_1), \quad P_2 = (x_2, y_2), \quad P_3 = (x_3, y_3).$$

Vogliamo minimizzare

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{j=1}^{3} d(P_j, P) = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + \\ &\quad + \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} + \sqrt{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}. \end{aligned}$$

Derivando si ottiene

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{x - x_j}{\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}} \\ f_y(x,y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{y - y_j}{\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}} \end{cases}$$

Accoppiando queste due equazioni otteniamo

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{P - P_j}{d(P, P_j)} = (0,0)$$

e chiamando $v_j(x,y)$ il vettore $\frac{P-P_j}{d(P,P_j)}$ si ha

$$v_1 + v_2 + v_3 = (0,0)\,. \tag{3.1}$$

La risposta è quindi che l'unico punto stazionario è dato da $P = (x,y)$ in modo tale che i tre vettori di lunghezza 1 v_1, v_2, v_3 soddisfino l'uguaglianza (3.1), il che significa che i tre vettori sono disposti in modo tale da formare tre angoli di 120°. Vediamo una dimostrazione di questo fatto: senza perdita di generalità possiamo supporre che uno dei tre vettori sia $(-1,0)$ (è sempre possibile ruotare v_1, v_2, v_3 in modo che venga soddisfatta tale richiesta) e vediamo come sono distribuiti gli altri due rispetto a questo. Siano allora

$$v_1 = (-1,0), \qquad v_2 = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta), \qquad v_2 = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$$

con ϑ, α incogniti. Inserendo queste scritture in (3.1) si ottiene che

$$\begin{cases} \cos\vartheta + \cos\alpha = 1 \\ \operatorname{sen}\vartheta + \operatorname{sen}\alpha = 0 \end{cases}$$

Si ricava che $\vartheta = \pi/3$, $\alpha = 5\pi/3$ e cioè ricaviamo che il punto P è posizionato all'interno del triagolo che ha come vertici i tre punti P_1, P_2, P_3 e in modo tale che i segmenti unenti P ai punti P_j, $j = 1,2,3$ formino tre angoli di 120° (o $2\pi/3$).
Infine poiché il limite all'infinito di f è $+\infty$ tale punto sarà di minimo.

Soluzione 3.11 - L'insieme E, in Figura 3.3, non è compatto, quindi l'esistenza del massimo e del minimo non è garantita. Annullando le derivate si ottiene il punto critico $(0,1)$. Si vede facilmente che

$$f(x,y) \leqslant f(0,1) \qquad \text{per ogni } (x,y) \in \mathbf{R}^2 \tag{3.2}$$

(studiare l'hessiana per esercizio).
All'infinito: poiché $y \leqslant 1/|x|$ si ha che $(y-1)^2 \leqslant (1/|x|-1)^2$ quindi

$$\frac{1}{1+x^2+(\frac{1}{|x|}-1)^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2+(y-1)^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Se si considera quindi il limite per $|(x,y)| \to +\infty$ in E si hanno due possibilità: o $|x| \to +\infty$ (e $y \to 0$) oppure $y \to +\infty$ (e in questo caso $|x| \to 0$). Nel primo dei due casi dalla stima di sopra si ottiene che $f(x,y) \to 0$. Nel secondo caso possiamo stimare la f come segue, visto che $|x| \leqslant 1/y$:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{y^2}+(\frac{1}{|x|}-1)^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2+(y-1)^2} \leqslant \frac{1}{1+(y-1)^2}\,.$$

Conlcusione:

$$\lim_{\substack{|(x,y)| \to +\infty \\ (x,y) \in E}} f(x,y) = 0$$

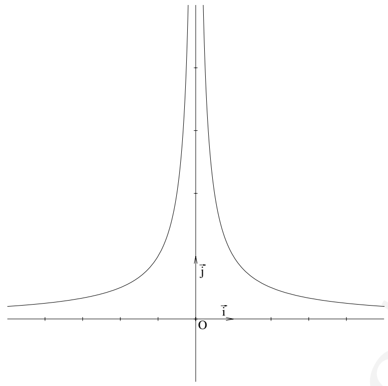

Figura 3.3:

(in realtà $\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y) = 0$! mostrarlo per esercizio). Poiché f è sempre positiva, il limite all'infinito è zero e inoltre dalla stima (3.2) si conclude che la funzione ha un punto di massimo assoluto in $(0,1)$ e non ha minimo.

Soluzione 3.12 - Annullando le derivate parziali si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

per cui l'unico punto stazionario è $(0,-1/2)$ che appartiene a D. Sul bordo parametrizzato con $\vartheta \mapsto (\sqrt{3}\cos\vartheta, \sqrt{3/2}\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$ la funzione diventa

$$3\cos^2\vartheta + 3\,\mathrm{sen}^2\vartheta + 2\sqrt{\frac{3}{2}}\,\mathrm{sen}\,\vartheta + 1$$

la cui derivata si annulla per $\cos\vartheta = 0$, cioè per $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$ che corrispondono ai punti $(0,\sqrt{3/2})$ e $(0,-\sqrt{3/2})$ dell'insieme D. Valutando la funzione nei tre punti ottenuti si ha

$$\begin{aligned} &f(0,-1/2) = \frac{1}{2}\,, \\ &f(0,\sqrt{3/2}) = 4 + 2\sqrt{\frac{3}{2}}\,, \\ &f(0,-\sqrt{3/2}) = 4 - 2\sqrt{\frac{3}{2}} = 4 - \sqrt{6} > \frac{1}{2}\,, \end{aligned}$$

per cui il punto $(0, -1/2)$ di D è il punto di minimo, il punto $(0, \sqrt{3/2})$ di D è il punto di massimo.
Si sarebbe potuto studiare il punto interno valutando la matrice hessiana:

$$H_{\tilde{f}}(u, v) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, per cui $(0, -1/2)$ è di minimo (locale, ma a posteriori anche assoluto).

Risolviamo l'esercizio anche studiando le curve di livello di f. La quantità

$$x^2 + 2y^2 + 2y + 1$$

può essere riscritta

$$x^2 + 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

per cui risolvere $f(x, y) = c$ con $c \in \mathbf{R}$, cioè trovare l'insieme di livello c della funzione f, è equivalente a risolvere

$$x^2 + 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = c\,, \qquad\qquad c \geqslant \frac{1}{2}$$

che sono ellissi, come le curve tratteggiate in Figura 3.4 (l'ellisse in neretto rappresenta il bordo di D). Per $c < 1/2$ l'insieme di livello c è l'insieme vuoto.

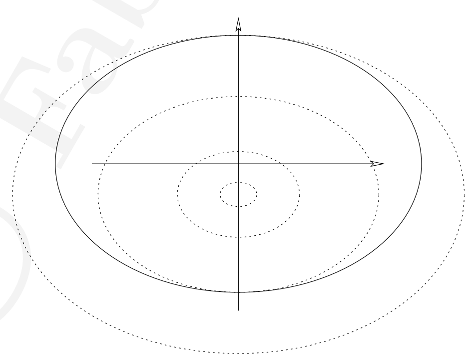

Figura 3.4:

Soluzione 3.13 - Si osservi innanzitutto che la funzione f può essere ridefinita sulla ipersfera in $\mathbf{R}^n$

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| = 1\}$$

dato che

$$f(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{|x|^2} = \left\langle A\frac{x}{|x|}, \frac{x}{|x|}\right\rangle$$

e quindi

$$f(\alpha x) = f(x) \qquad \text{per ogni } \alpha \neq 0\,.$$

Per cui il problema è equivalente a quello di massimizzare e minimizzare la quantità $\langle Ax, x\rangle$ in S^{n-1}. Poiché S^{n-1} è compatto e $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ è continua tale problema ammette sia massimo che minimo.
Noi comunque cosidereremo per convenienza la funzione f definita in $\mathbf{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.
Derivando la funzione f rispetto a x_k si ha:

$$\tfrac{\partial}{\partial x_k} \textstyle\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j x_i = 2 \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j$$

$$\tfrac{\partial}{\partial x_k}(x_1^2 + \ldots + x_n^2) = 2x_k$$

quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{2|x|^2 \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j - 2x_k \langle Ax, x\rangle}{|x|^4} = \frac{2\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j - 2x_k f(x)}{|x|^2}$$

per ogni $k = 1, \dots n$. Di conseguenza, annullando le derivate, si ha

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j - x_k f(x) = 0 \qquad \text{per ogni } k = 1, \dots n$$

e ciò è equivalente a dire che

$$Ax = f(x)x$$

cioè x è un autovettore e $f(x)$ è un autovalore. Senza bisogno di trovare le soluzioni deduciamo che sicuramente $f(x)$ è un autovalore, quindi il minimo valore assunto da f è il minimo autovalore di A e il massimo valore assunto da f è il massimo autovalore di A.

Quando si vedrà il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (nel corso di Analisi III) si provi a risolvere questo esercizio con tale metodo.

Soluzione 3.18 - L'insieme E è quello in Figura 3.5, quelle tratteggiate sono curve di livello (parabole). Risolveremo il problema senza fare calco-

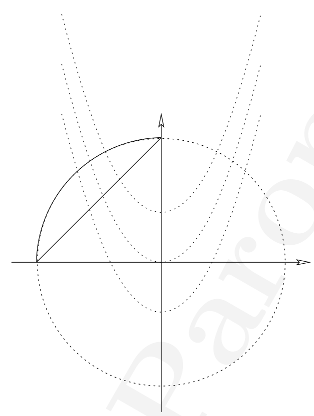

Figura 3.5:

li, ma osservando gli insiemi di livello della funzione (svolgere per esercizio i calcoli, anche per confronto, studiando il gradiente, la matrice hessiana e studiando sul bordo il comportamento della funzione come di solito).
Fissiamo $c \in \mathbf{R}$ e vediamo dove $f(x, y) = c$: la risposta è l'insieme Γ_c rappresentato dall'intersezione di E con la parabola di equazione (si veda anche la Figura 3.5)

$$y = x^2 + \sqrt[3]{c}$$

Chiaramente il valore massimo (rispettivamente il minimo) che assume f è il massimo c (rispettivamente il minimo c) per cui Γ_c non è vuoto (cioè il massimo c per cui la parabola $y = x^2 + \sqrt[3]{c}$ interseca l'insieme E). Concludendo: il minimo sarà assunto nel vertice di E dato dal punto $(-2, 0)$ e il massimo nel vertice di E dato dal punto $(0, 2)$.
Per calcolare i valori basta valutare la funzione in questi due punti o trovare i valori di c per cui le parabole passano per questi punti (farlo per esercizio!!).
Per concludere i valori minimo e massimo sono rispettivamente -64 e 8.

Soluzione 3.19 - La funzione è continua su un compatto, quindi sicuramente ammette massimo e minimo. L'insieme su cui è definita f e tre suoi insiemi di livello sono disegnati in Figura 3.6 (le linee tratteggiate allo stesso modo fatto parte dello stesso insieme di livello). Si fissi $c \in \mathbf{R}$ e si denoti

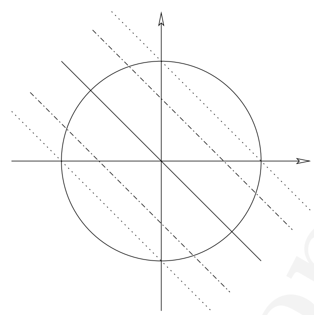

Figura 3.6:

con $\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$. Chiaramente per $c < 0$ l'insieme Γ_c è il vuoto, per $c = 0$ si ha che $\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = -x\}$, per $c > 0$ $\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = -x + \sqrt{c}\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = -x - \sqrt{c}\}$. Per cui il minimo di f è 0 assunto in tutto l'insieme $\Gamma_0 \cap E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = -x, [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\}$, il massimo è assunto dove l'insieme di livello interseca E sul bordo e precisamente nei punti $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ (trovare le equazioni dell rette!). Il valore massimo è $f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 8$.

Soluzione 3.21 - L'insieme E è una corona circolare e gli insiemi di livello sono delle ellissi (si veda Figura 3.7), come si può facilmente ricavare ponendo

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 = c\,, \qquad c \geqslant 0\,.$$

Minore è il valore c e minori sono i semiassi dell'ellisse, l'insieme sul quale la funzione assume il valore costante c. Per cui i punti di minimo sono $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ dove l'ellisse descritta da $x^2 + 2y^2 = 1$ interseca la parte di bordo di E data dal cerchio di raggio 1 (quindi il valore minimo è 1), i punti di massimo sono $(0, 2)$ e $(0, -2)$ dove l'ellisse descritta da $x^2 + 2y^2 = 8$ interseca la parte di bordo di E data dal cerchio di raggio 2 (quindi il valore minimo è 8).

Soluzione 3.26 - Le curve di livello sono date dall'equazione (si veda la figura 3.8)

$$y = g(x) + c\,, \qquad c \in \mathbf{R}\,.$$

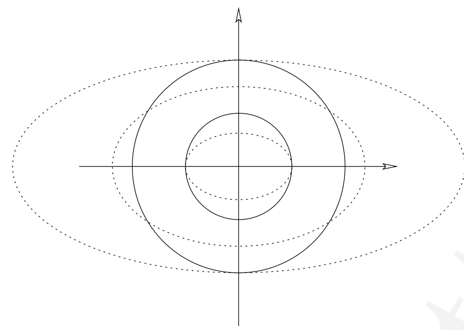

Figura 3.7:

Man mano che aumentiamo il valore di c le curve traslano lungo l'asse y.

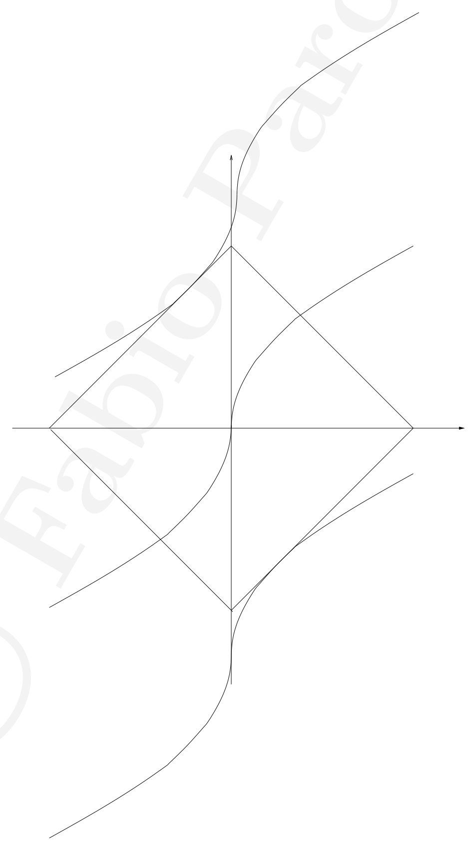

Figura 3.8:

Per trovare il punto di massimo è sufficiente imporre che la curva di livello c sia tangente al bordo dell'insieme E. Cerchiamo x imponendo che la curva $y = g(x) + c$ sia tangente alla retta $y = x + 1$ per un qualche valore di x compreso tra -1 e 0. Per far ciò imponiamo

$$g'(x) = 1\,, x \in (-1, 0)\,, g(x) + c = x + 1\,.$$

Si ricava che

$$\frac{1}{2\sqrt{-x}} = 1$$

da cui $x = -1/4$. Imponiamo ora che $-\sqrt{1/4} + c = -1/4 + 1$ e troviamo che $c = 5/4$. Il valore massimo è quindi $5/4$ assunto nel punto che ha come prima coordinata $-1/4$. L'altra si ricava dall'uguaglianza $y = x+1$: il punto di massimo è quindi $(-1/4, 3/4)$.
Analogamente si ricava che $(1/4, -3/4)$ è il punto di minimo e il valore minimo è $-5/4$.

Soluzione 3.28 - La funzione $\operatorname{senh} t = (e^t - e^{-t})/2$ è strettamente crescente per cui i punti critici, e la loro natura, sono gli stessi per la funzione

$$g(x, y) = x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2\,.$$

Attenzione: a questo punto è possibile studiare la funzione g anziché f perché $\operatorname{senh} t$ è *strettamente* crescente e quindi la sua derivata è sempre diversa da zero, se fosse solamente crescente (non decrescente) ciò non sarebbe possibile. Un'altra cosa: se si avesse una funzione strettamente decrescente il ragionamento può essere applicato comunque, con l'attenzione che la natura dei punti viene mutata, un punto di massimo per g sarebbe un minimo per f e viceversa.
Vediamo ora di capire com'è fatto l'insieme E. La disequazione $|x|(1 + (y - 2)^2) - 2 < 0$ è equivalente a

$$|x| < \frac{2}{1 + (y-2)^2}\,,$$

per cui l'insieme E è un insieme illimitato come quello in Figura 3.9. Per ricavarlo si noti che la diseguaglianza denota la parte interna alle due curve di equazione $x = \frac{2}{1+(y-2)^2}$ e $x = -\frac{2}{1+(y-2)^2}$.
Veniamo ai conti: posto il gradiente di g uguale a $(0, 0)$ si trovano i punti

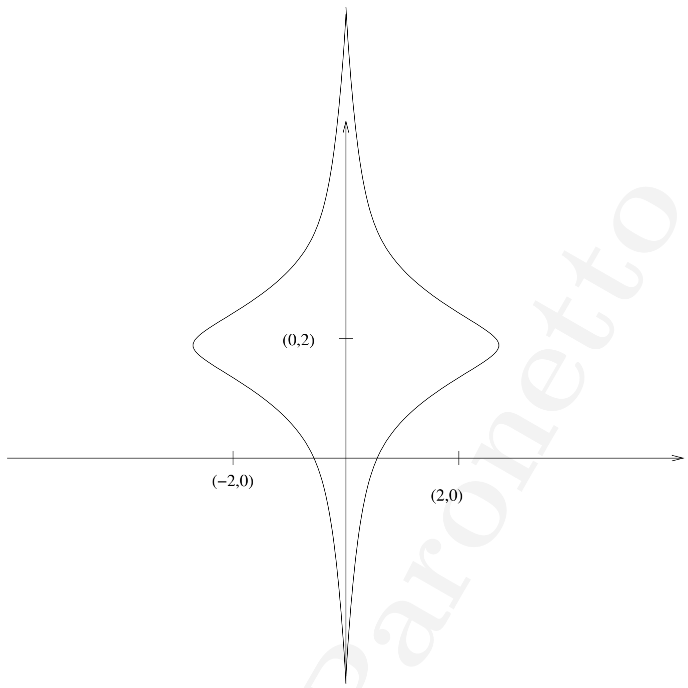

Figura 3.9:

$(0,0), (0,2), (\sqrt{2},0), (\sqrt{2},2), (-\sqrt{2},0), (-\sqrt{2},2)$. Attenzione: i punti $(-\sqrt{2},0)$ e $(\sqrt{2},0)$ non appartengono ad E, per cui non ci interessano.
Calcolando le derivate seconde si ottiene che la matrice hessiana è

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 8 & 0 \\ 0 & 6y - 6 \end{pmatrix}$$

Questo è il caso più fortunato: la matrice è diagonale per cui conosciamo già gli autovalori il cui segno ci fornisce le informazioni sulla natura dei punti:

$$H_g(0,0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di massimo locale}$$

$$H_g(0,2) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di sella}$$

$$H_g(\pm\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{punti di sella}$$

$$H_g(\pm\sqrt{2},2) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{punti di minimo locale}$$

La funzione f ammette massimo e minimo su $\mathbf{R}^2$? (assoluti). NO! Infatti

$$\lim_{|x|\to+\infty} g(x,0) = +\infty\,, \qquad \lim_{y\to-\infty} g(0,y) = -\infty\,,$$

per cui poiché il seno iperbolico va a $-\infty$ a $-\infty$ e a $+\infty$ a $+\infty$ anche f risulta illimitata sia dal basso che dall'alto.

Soluzione 3.29 - Annullando il gradiente si arriva alle equazioni

$$\begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x^9 = x \\ y^3 = x \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x(x^8-1) = 0 \\ y^3 = x \end{cases}$$

per cui le soluzioni sono $(0,0),(1,1),(-1,-1)$. La matrice hessiana è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo il punto $(0,0)$:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Valutiamo il segno degli autovalori: anche se Δ_1, il determinante del minore principale 1×1 (di fatto il termine $[H_f(0,0)]_{11}$ della matrice) è nullo, si

ha che $\Delta_2 = -16$ è anche il determinante della matrice nonché il prodotto degli autovalori: ne deduciamo che necessariamente uno è positivo e l'altro negativo per cui $(0,0)$ è di sella.
Per quanto riguarda il punto $(1,1)$ si ha che

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

che si può verificare essere definita positiva, per cui $(1,1)$ è di minimo locale. Si può calcolare anche il determinante che è positivo, da cui si deduce che il prodotto dei due autovalori è positivo $(144-16)$, per cui si potrebbero avere due autovalori positivi o due negativi. Ma un altro invariante è la traccia, la somma degli elementi sulla diagonale, che è anche la somma degli autovalori. La traccia è 24 per cui se la somma degli autovalori è positiva deduciamo che il segno dei due autovalori non può essere altro che positivo. Lo stesso vale per il punto $(-1,-1)$.
Per concludere si vede che

$$\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y) = +\infty$$

per cui la funzione non ammette massimo e ammette due punti di minimo assoluto.

Soluzione 3.30 - Anullando il gradiente si ottiene

$$\begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 4x^3 + 4y^3 = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava che $x = -y$ e quindi dalla seconda $4y(y^2 - 2) = 0$. Per cui le soluzioni sono $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. La matrice hessiana è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Si ha che

$$H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

che è definita positiva, per cui i due punti sono di minimo locale, ma

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

ha determinante 0 e quindi almeno uno dei due autovalori è 0. La traccia è -8, il determinante è 0 e quindi un autovalore è -8. Si può concludere per il momento solamente che il punto in questione non è di minimo.
Come fare per stabilire la natura del punto $(0,0)$? Un modo possibile è studiare il segno di f per capire se il punto in questione è di sella: si osservi che

$$f(x,x) = 2x^4 + 2$$

e quindi $(0,0)$ risulta di minimo per f ristretta alla retta $x = y$. Sapendo che un autovalore è negativo si può concludere che il punto $(0,0)$ è di sella.
Alternativamente senza conoscere gli autovalori (senza sapere in particolare che uno dei due è negativo) si può restringere f ad un'altra curva, per esempio la retta $x = -y$. Infatti

$$f(x,-x) = 2x^4 - 8x^2 - 2$$

ha un massimo in $x = 0$ ($\frac{d}{dx}(2x^4 - 8x^2 - 2)|_{x=0} = 0$, $\frac{d^2}{dx^2}(2x^4 - 8x^2 - 2)|_{x=0} = -8$). Anche in questo caso si conclude che $(0,0)$ è un punto di sella per f.

Soluzione 3.31 - Al solito si calcolino le derivate parziali e le si annullino. Si ottiene

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 4y^3 + 2y = 0 \\ 3z^2 - 2x \end{cases}$$

da cui si ottengono i punti $(0,0,0)$ e $(2/3, 0, 2/3)$. La matrice hessiana è data da

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 12y^2 + 2 & 0 \\ -2 & 0 & 6z \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Valutando i determinanti dei minori pricipali: $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 4$, $\Delta_3 = -8$. La matrice non è definita positiva e il prodotto degli autovalori (Δ_3) è negativo: gli autovalori potrebbero essere tutti negativi oppure due positivi e uno negativo. Abbiamo che $\Delta_1 > 0$ e $\Delta_2 > 0$, ma questo non ci aiuta a concludere. Se Δ_1 fosse stato negativo avremmo potuto concludere che la matrice è definita negativa. Un altro invariante è la *traccia* della matrice, ossia la somma degli elementi sulla diagonale che corrisponde alla somma degli autovalori: poiché la somma è 4 si può dedurre che i tre autovalori non possono essere tutti negativi. Conclusione: $(0,0,0)$ non è né di massimo, né di minimo ed è quindi di sella.

$$H_f(2/3,0,2/3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

i cui minori hanno determinanti $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 4$, $\Delta_3 = 8$, per cui il punto $(2/3,0,2/3)$ è di minimo locale.

Soluzione 3.32 - Le derivate prime di f sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -24x^2 + 24xy + 2x - 2y - 6y^2\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2y - 2x + 3y^2 - 12xy + 12x^2$$

che si annullano in $(0,0)$, unico punto critico. Studiamo le derivate seconde. La matrice hessiana in $(0,0)$ è

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante nullo: almeno uno dei due autovalori è nullo. In realtà solo uno visto che la traccia è positiva, ma questo non ci aiuta a capire la natura del punto. Gli autovalori dovrebbero essere 0 e 4 dato che il determinante è 0 e la traccia 4, ma in dimensione più alta non è possibile determinare gli autovalori in questo modo (se conosco la somma e il prodotto di n numeri posso determinare gli n numeri solo se $n = 2$). Calcoliamo allora il polinomio caratteristico e le sue radici:

$$P(\lambda) = (2-\lambda)(2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 4\lambda\,.$$

Le radici effettivamente sono 0 e 4. L'autospazio relativo all'autovalore 4 si trova facilmente risolvendo

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

che fornisce la retta $x + y = 0$. Restringere a tale retta la funzione f non ci fornisce alcuna informazione, se non quella che f ristretta a tale retta ha un minimo, cosa però che già sappiamo poiché tale retta è l'autospazio

corrispondente ad un autovalore positivo.
Si faccia per esercizio questa (inutile) verifica valutando la quantità $f(x,-x)$ e derivandola rispetto a x due volte in $x=0$.
Il problema ora è capire la natura del punto $(0,0)$ e per fare ciò può aiutare restringere f prima a delle rette, se ciò non bastasse si vedrà qualche altra curva. L'unica retta che possiamo escludere è proprio la retta $x+y=0$.
Un primo tentativo che si può fare è considerare la retta che rappresenta il nucleo della matrice hessiana di f in $(0,0)$, retta che si ottiene risolvendo

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che fornisce la retta $y=x$, ma, lo ripetiamo, questa è *una* scelta fra le infinite possibili. Valutiamo

$$f(x,x) = -x^3$$

che non è convessa, per cui il punto $(0,0)$ non è di minimo. Se la funzione fosse più complicata si studia derivando per $x=0$ la funzione $f(x,x)$ (farlo per esercizio: la derivata prima è zero, la seconda pure, la terza finalmente è -6 il che implica che $x=0$ è un flesso).
Se per curiosità vogliamo vedere il comportamento di f lungo tutte le rette consideriamo dapprima le rette del tipo $y=\alpha x$ e otteniamo

$$f(x,\alpha x) = (12\alpha+\alpha^3-8-6\alpha^2)x^3+(1+\alpha^2-2\alpha)x^2 = (\alpha-2)^3x^3+(\alpha-1)^2x^2$$

e derivando due volte in zero

$$\frac{d^2}{dx^2}(f(x,\alpha x)) = 2(\alpha-1)$$

da cui si deduce che la restrizione di f lungo le infinite rette corrispondenti a $\alpha<1$ risulta concava. Si osservi che la retta corrispondente ad $\alpha=1$ non l'abbiamo ritrovata, ed infatti tale restrizione non è concava, come già visto, ma ha un flesso.
Per completare lo studio, a questo punto inutile, di f ristretta alle rette consideriamo $x=0$ e la funzione diventa

$$f(0,y) = y^2+y^3$$

che nuovamente è concava in un intorno di $y=0$.
Attenzione! questo modo di procedere funziona solo in negativo! Se restringendo la funzione ad una qualunque retta o a tutte le rette si trovasse

una funzione convessa non potremmo concludere nulla. A tal proposito si vedano gli esercizi 3.34 e 3.35.

Soluzione 3.33 - Derivando f si ottiene che l'unico punto critico è $(0,0,0)$. La matrice hessiana in quel punto è data da

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 3/2 & 7 & 0 \\ 7 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

che ha determinante nullo, per cui almeno uno degli autovalori è nullo, e traccia positiva, per cui non conosciamo il segno dei due autovalori (potrebbero essere tutti e due positivi oppure uno positivo e l'altro nullo, non entrambi negativi). Il polinomio caratteristico è dato da

$$P(\lambda) = \lambda[(3/2 - \lambda)(16 - \lambda) - 49]$$

che si annulla per $\lambda = 0$ e per le soluzioni di $(3/2 - \lambda)(16 - \lambda) - 49 = 0$. Risolvendo si ottengono due soluzioni, una positiva e una negativa (si osservi come tutte le entrate della matrice siano positive anche se un autovalore è negativo). Concludiamo che lungo una curva la funzione è concava, lungo un'altra è convessa e quindi il punto in questione è di sella.

Soluzione 3.34 - Dai conti si ricava che $(0,0)$ è l'unico punto critico e che la matrice hessiana di f in $(0,0)$ è la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se proviamo a restringere f lungo la retta $y = 0$, nucleo della matrice, troviamo che tale restrizione ammette minimo in 0. Poiché l'altro autovalore è positivo si potrebbe essere tentati di conludere che tale punto è di minimo. Se restringiamo f a tutte le rette per l'origine troviamo ancora che tali restrizioni ammettono minimo nell'origine. Ma ciò non basta. Ad esempio, si verifica che la restrizione della funzione alla curva $y = 2x^2$ è negativa.
Infatti la funzione è $f(x,y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$ e quindi è chiaramente positiva se $y > 3x^2$ e per $y < x^2$ (è il prodotto di due quantità che hanno lo stesso segno), ma per $x^2 < y < 3x^2$ le due quantità $y - x^2$ e $y - 2x^2$ hanno

segno discorde (e si annulla lungo le due curve $y = x^2$ e $y = 2x^2$) per cui in tale regione la funzione è negativa. Si conclude che in un qualunque intorno dell'origine f assume valori sia positivi che negativi e si annulla nell'origine. Di conseguenza il punto è di sella, anche se la restrizione a tutte le rette ammette minimo nell'origine.

Soluzione 3.35 - La funzione ha un solo punto critico, $(0, 1)$, che risulta di sella (non basta restringere f a tutte le rette per $(0, 1)$, e nemmeno a tutte le parabole!).

Soluzione 3.36 - L'insieme E è illimitato (quello tratteggiato in Figura 3.10) e le derivate parziali non si annullano mai contemporaneamente su E. Infatti

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{-xy}(1 - xy) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -x^2 e^{-xy} \end{cases}$$

e la derivata rispetto a y non è mai zero all'interno di E! Vediamo sul bordo:

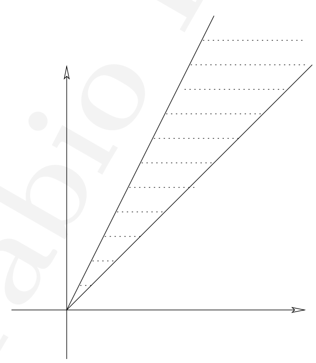

Figura 3.10:

parametrizzando il bordo con le curve $t \mapsto (t, t)$ e $t \mapsto (t, 2t)$ con $t \in (0, +\infty)$ si ottiene prima

$$\frac{d}{dt} f(t, t) = \frac{d}{dt} t e^{-t^2} = e^{-t^2}(1 - 2t^2)$$

che si annulla per $t = 1/\sqrt{2}$ che corrisponde al punto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, poi

$$\frac{d}{dt} f(t, 2t) = \frac{d}{dt} t e^{-2t^2} = e^{-t^2}(1 - 4t^2)$$

che si annulla per $t = 1/2$, che corrisponde al punto $(1/2, 1)$. Vediamo all'infinito: poiché in E

$$x^2 \leqslant xy \leqslant 4x^2 \Rightarrow -4x^2 \leqslant -xy \leqslant -x^2$$

si ha che

$$xe^{-4x^2} \leqslant f(x,y) \leqslant xe^{-x^2}$$

per cui

$$\lim_{\substack{|(x,y)| \to +\infty \\ (x,y) \in E}} f(x,y) = 0\,.$$

Esaminiamo i candidati, i due punti trovati e il vertice:

$$\begin{aligned} &f(0,0) = 0\,, && \text{minimo} \\ &f(1/2,1) = \tfrac{1}{2}e^{-1/2}\,, && \text{massimo} \\ &f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}\,. && \end{aligned}$$