

Capitolo 4

Campi vettoriali

ULTIMO AGGIORNAMENTO: 3 MAGGIO 2017

Ricordiamo che l'operatore divergenza agisce su un campo vettoriale F ed è definito come segue:

$$\operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x).$$

ESERCIZIO 4.1 - Dire se il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

è conservativo o meno e, in caso affermativo, calcolarne il potenziale.

ESERCIZIO 4.2 - Dire se il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{2x + y}{(x^2 + xy)^{2/3}}, \frac{x}{(x^2 + xy)^{2/3}} + 2y \right)$$

è conservativo o meno e, in caso affermativo, calcolarne il potenziale.

ESERCIZIO 4.3 - Dire se il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

è conservativo o meno e, in caso affermativo, calcolarne il potenziale.

ESERCIZIO 4.4 - Dimostrare che il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{2xz - y}{x^2 + y^2}, \frac{x + 2yz}{x^2 + y^2}, \log(x^2 + y^2) \right)$$

non è conservativo ma è dotato di potenziali locali.

ESERCIZIO 4.5 - Verificare che il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2} + 1, \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} + 3 \right)$$

è conservativo e determinarne i potenziali.

ESERCIZIO 4.6 - Verificare che il campo elettrico

$$F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$

è conservativo e a divergenza nulla e determinarne i potenziali.

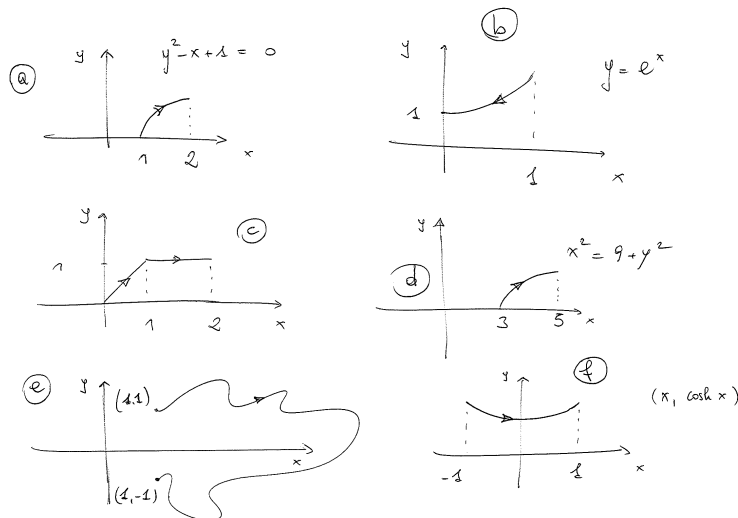
ESERCIZIO 4.7 - Per ognuno dei seguenti campi di vettori si dica se ammette potenziale (ove è definito) e in caso affermativo si determini tale potenziale:

1. $F(x, y) = (1 + y, 1 + x)$
2. $F(x, y) = (y^2 + 2xy + 2xy^2, x^2 + 2xy + 2x^2y)$
3. $F(x, y) = (e^x \cos y, -e^x \sin y)$
4. $F(x, y) = \left(\frac{e^x}{y}, -\frac{e^x}{y^2} \right)$
5. $F(x, y) = \left(\frac{2x + y}{(x^2 + xy)^{2/3}}, \frac{x}{(x^2 + xy)^{2/3}} + 2y \right)$
6. $F(x, y, z) = (y^\alpha z^\alpha, z^\alpha x^\alpha, x^\alpha y^\alpha)$ al variare di $\alpha > 0$

ESERCIZIO 4.8 - Si integri

1. $F(x, y) = (y, \log x)$ lungo la curva in figura *a*
2. $F(x, y) = \left(xy, -\frac{1}{1 + y} \right)$ lungo la curva in figura *b*
3. $F(x, y) = (e^y, y \sin x)$ lungo la curva in figura *c*

4. $F(x, y) = \left(-\frac{y}{x}, 1\right)$ lungo la curva in figura *d*
5. $F(x, y) = (x^2 - y, 1 - x)$ lungo la curva in figura *e*
6. $F(x, y) = (x, y)$ lungo la curva in figura *f*
 Si “disegni” il campo F . Si poteva evitare di fare il calcolo diretto?



ESERCIZIO 4.9 - Si dica per quali valori dei parametri reali a_j, b_j, c_j , $j = 1, 2, 3$, il campo

$$F(x, y, z) = \left(\frac{a_1 x + a_2 y + a_3 z}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{b_1 x + b_2 y + b_3 z}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{c_1 x + c_2 y + c_3 z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

ammette potenziale in $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

ESERCIZIO 4.10 - Dato il campo $F(x, y) = \left(\log(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2}, \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right)$ si verifichi che ammette un potenziale in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ che può essere esteso a tutto $\mathbf{R}^2$ in maniera continua.

ESERCIZIO 4.11 - Si determini il massimo aperto di $\mathbf{R}^3$ nel quale il seguente campo è conservativo

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= -\frac{xz}{(x^2 + y^2)^{1/2}(x^2 + y^2 + z^2)} \\ F_2(x, y, z) &= -\frac{yz}{(x^2 + y^2)^{1/2}(x^2 + y^2 + z^2)} \\ F_3(x, y, z) &= -\frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

e se ne trovi un potenziale.

ESERCIZIO 4.12 - Si calcoli l'integrale del campo $F(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 - 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \right)$

lungo i seguenti cammini:

- la circonferenza centrata nell'origine e di raggio $1/2$;
- la porzione della circonferenza centrata nell'origine e di raggio $1/2$ che sta nel semipiano $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq 0\}$;
- il segmento che unisce i due punti $(-3, 3)$ e $(3, 3)$.

ESERCIZIO 4.13 - Si determinino tutte le funzioni $F \in C^1(\mathbf{R}^3; \mathbf{R})$ soluzioni del sistema

$$\begin{cases} D_x F(x, y, z) = \frac{y^2 - x^2 + 1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \\ D_y F(x, y, z) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \\ D_z F(x, y, z) + F(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} \end{cases}$$

ESERCIZIO 4.14 - Dato il campo di vettori in $\mathbf{R}^n$ definito da $(\alpha > 0)$

$$F(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{|x|^\alpha} (x_1, \dots, x_n)$$

si dica per quali valori di α vale l'equazione $\operatorname{div} F = 0$.
Si confronti con l'ESERCIZIO 4.6.

Soluzioni

Soluzione 4.1 - Se si considera il cammino chiuso $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, si ottiene che

$$\int_{\gamma} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = 2\pi,$$

e quindi il campo risulta non essere conservativo. Otteniamo però che $\operatorname{rot} F = 0$, quindi F ammette potenziale locale ϕ ; per calcolare tale potenziale bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

che ha per soluzione, integrando la prima rispetto a x e sostituendo nella seconda, la funzione

$$\phi(x, y) = -\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) + c.$$

Il campo ammette quindi potenziale locale, ma il dominio è dato da $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ che non è semplicemente connesso; per rendere il campo conservativo, dovremmo rendere il dominio semplicemente connesso, cosa che può essere fatta se consideriamo il dominio

$$D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0\} \quad \text{o più in generale} \quad \mathbf{R}^2 \setminus S$$

dove S è una qualunque semiretta uscente dall'origine. Consideriamo per semplicità il dominio D : un potenziale C^1 (verificare che è C^1 !) in D è dato allora dalla funzione

$$\phi = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) & y > 0 \\ \pi/2 & x < 0, y = 0 \\ -\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) + \pi & y < 0. \end{cases}$$

Soluzione 4.2 - Notare che il dominio del campo è dato da

$$\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) : x = 0 \text{ o } y = -x\},$$

che è semplicemente connesso anche se non connesso. Quindi per vedere se il campo è conservativo basta e serve che si abbia $\text{rot } F = 0$, cosa facilmente verificata. Per trovare il potenziale locale ϕ , bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2x + y}{(x^2 + xy)^{2/3}} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{(x^2 + xy)^{2/3}} + 2y \end{cases}$$

che ammette per soluzione la funzione

$$\phi(x, y) = 3(x^2 + xy)^{2/3} + y^2 + c$$

con la costante c che può assumere valori diversi su ogni componente connessa.

Soluzione 4.3 - È facile vedere che il dominio naturale di F è $\mathbf{R}^2$ e che le derivate incrociate sono uguali, per cui il campo è conservativo. Per valutare un potenziale utilizziamo il fatto che per un campo conservativo l'integrale $\int_{\gamma} F \cdot ds$ su γ cammino che unisce due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è indipendente dal cammino γ . Possiamo fissare quindi arbitrariamente un punto, per comodità l'origine, e il potenziale in un generico punto (x, y) sarà dato dall'integrale lungo quel cammino di F . Per semplicità scegliamo il cammino che unisce l'origine a (x, y) dato da

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \gamma(t) = (tx, ty).$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \int_{\gamma} F \cdot ds = \int_0^1 \left[\frac{2tx}{1 + t^2x^2 + t^2y^2}x + \frac{2ty}{1 + t^2x^2 + t^2y^2}y \right] dt = \\ &= \log(1 + t^2x^2 + t^2y^2) \Big|_0^1 = \log(1 + x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Soluzione 4.4 - Si noti che preso il cammino chiuso $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ si ha

$$\int_{\gamma} F \cdot ds = 2\pi,$$

e quindi il campo non è conservativo. Però si ha che $\operatorname{rot} F = 0$, e quindi il campo ammette potenziale locale, che si ricava essere

$$\phi(x, y, z) = z \log(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) + c.$$

Soluzione 4.5 - Il dominio è semplicemente connesso e $\operatorname{rot} F = 0$, quindi il campo è conservativo. Il potenziale infine è dato dalla funzione

$$\phi(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 + z^2) + y + 3z + c.$$

Soluzione 4.6 - Il dominio è semplicemente connesso e $\operatorname{rot} F = (0, 0, 0)$, quindi il campo è conservativo, e il potenziale è dato da

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + c.$$

Facendo i calcoli si verifica facilmente che per il campo F ha divergenza nulla.