Funzioni implicite: funzioni scalari di due variabili.

1. Dire se il luogo degli zeri della seguente funzione $f(x,y) = e^{x-y} + x^2 - y^2 - e(x+1) + 1$ definisce implicitamente una funzione $y(x)$ in un intorno di $(0,-1)$. Si dimostri che $x = 0$ è punto di minimo relativo per y.

2. Si dimostri che il luogo degli zeri della seguente funzione $f(x,y) = e^{x-y} + x^2 - y^2 - e(x+1) + 1$ non può definire implicitamente una funzione $x(y)$ in un intorno di $(0,-1)$.

3. Dire se il luogo degli zeri della seguente funzione $f(x,y) = x^2y + e^{x+y} + 4 - e$ definisce implicitamente una funzione $y(x)$ in un intorno di $(2,-1)$. Si trovi la retta tangente al grafico della funzione y in tale punto.

4. Sia g una funzione in $C^2(\mathbf{R})$ tale che $g(0) = 0$, $g'(0) = g''(0) = 2$. Si verifichi che l'insieme di livello 1 di
$$f(x,y) = y^3 + y + \lambda g(x) + 1 \qquad \lambda \in \mathbf{R}$$
è una curva cartesiana $(x, y(x))$ in un intorno del punto $(0,0)$. Si scriva poi il polinomio di Taylor fino al secondo ordine di $y(x)$ in 0.

5. Data la funzione $f(x,y) = x^2 + \log(1+xy) + ye^{2y}$ dire se $f(x,y) = 0$ definisce una funzione implicita $y(x)$ in un intorno di $(0,0)$. Dire se $x = 0$ risulta essere critico per la funzione y ed eventualmente quale sia la sua natura.

6. Data la funzione $f(x,y) = x + x^6 + y^2\sqrt{y^2+1}$ dire se $f(x,y) = 0$ definisce una funzione implicita $x(y)$ in un intorno di $(0,0)$. Dire se $y = 0$ risulta essere critico per la funzione x ed eventualmente quale sia la sua natura.

7. Data la funzione $f(x,y) = (x+y)e^{xy} + xy - 1$ dire se $f(x,y) = 0$ definisce una funzione implicita $y(x)$ in un intorno di $(0,1)$. Se ne calcoli lo sviluppo di Taylor al secondo ordine.

8. Si verifichi per quali valori di $a \in \mathbf{R}$ l'espressione $xy^2 + y + \operatorname{sen}(xy) + a(e^x - 1) = 0$ definisce una funzione implicita $y(x)$ in un intorno di $(0,0)$; dopodiché si calcoli
$$\lim_{x \to 0} \frac{y(x) + ax}{x^2}\,.$$

9. Disegnare il grafico qualitativo (localmente) della funzione implicita $y(x)$ definita da $e^{xy} + x - y - e = 0$ intorno al punto $(1,1)$.
Dire se se è possibile definire una funzione implicita $x(y)$ ed eventualmente disegnarne localmente intorno a $y = 1$ il grafico.

10. Disegnare il grafico qualitativo (localmente) della funzione implicita $y(x)$ definita da $3xy^2 - x^3y + 3xy - 48 = 0$ intorno al punto $(2,3)$.

11. Disegnare il grafico qualitativo (localmente) della funzione implicita $y(x)$ definita da $y^2 + \log(x,y) + \frac{4}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x) - 1 = 0$ intorno a $(1,1)$.

12. Verificare che l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $g(x)$ con $f(x, y) = xe^y + ye^x$ in un intorno di $(0, 0)$. Scrivere lo sviluppo di Taylor al second'ordine per g in 0.

13. Verificare che, detto Γ_c l'insieme di livello c della funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ è, almeno localmente, una curva regolare per ogni $c \in \mathbf{R}$, tranne al più due valori. Trovare i due valori.

14. Data la funzione $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$F(x, y) = (\cos y)(\log x) + (y - \pi)^2,$$

si dica se l'equazione $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $f = f(y)$ tale che $F(f(y), y) = 0$ in un intorno del punto $(1, \pi)$. Si verifichi che il punto π è stazionario per f e se ne studi la natura.