Successioni e serie di funzioni

Ultimo aggiornamento: 27 marzo 2019

Consideriamo in questo capitolo successioni e serie di funzioni di una variabile reale e vedremo vari tipi di convergenza.

1. Convergenza puntuale e convergenza uniforme

Si consideri una successione di funzioni

$$f_n : I \to \mathbf{R}, \qquad I \text{ sottoinsieme di } \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}$$

e una funzione

$$f : J \to \mathbf{R}, \qquad J \text{ sottoinsieme di } I.$$

Definizione 1.1. *Si dice che la successione* $(f_n)_n$ converge puntualmente *ad* f *in* x_o, $x_o \in J$, *se*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_o) = f(x_o)\,. \tag{1}$$

Si dice che la successione $(f_n)_n$ converge puntualmente *ad* f *in* $A \subset J$, *se*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \textit{per ogni } x \in A\,. \tag{2}$$

Si dice che la successione $(f_n)_n$ converge uniformemente *ad* f *in* $A \subset J$, *se*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0\,. \tag{3}$$

Osservazione 1.2. -

1. $\boxed{\textbf{Convergenza uniforme} \Longrightarrow \textbf{Convergenza puntuale}}$

Si osservi come la (1) sia semplicemente la convergenza di una successione numerica, la successione $(f_n(x_o))_n$, e (2) la stessa cosa valida però in ogni punto di un certo insieme A.
La (3) è invece una convergenza diversa, e risulta più forte di quella puntuale. Infatti si supponga vera la (3): fissato $x \in A$ si ha

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{y\in A} |f_n(y) - f(y)|$$

e passando al limite si ottiene che vale anche (2). Il viceversa è falso, come mostra il seguente esempio. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n : [0,1) \to \mathbf{R}, \qquad f_n(x) = x^n\,.$$

Si vede facilmente che il limite puntuale è la funzione nulla

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \qquad \text{per ogni } x \in [0,1)$$

però
$$\sup_{x\in[0,1)} |f_n(x)| = 1$$
che non converge a 0. Si osservi che, nonostante ciò,
$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| = \lim_{n\to+\infty} a^n = 0 \qquad \text{per ogni } a < 1,$$
per cui vi è convergenza uniforme di $(f_n)_n$ a zero in ogni intervallo $[0,a]$ con $a < 1$.

2. Se una successione converge (puntualmente o uniformemente) in un insieme A converge (puntualmente o uniformemente) in ogni sottoinsieme di A.

3. L'insieme J in cui è definita f può essere diverso dall'insieme I in cui sono definite le funzioni f_n. Prendendo la successione di funzioni
$$f_n : [0,2] \to \mathbf{R}, \qquad f_n(x) = x^n,$$
si vede che la funzione limite f esiste solamente per $x \in [0,1]$, infatti
$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ +\infty & \text{se } x \in (1,2]. \end{cases}$$

Commento sulle definizioni di convergenza - Vediamo di capire meglio la differenza tra convergenza puntuale e uniforme.
Si supponga che $(f_n)_n$ converga uniformemente in $A \subset \mathbf{R}$ ad una funzione f, cioè
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$
Questo è equivalente a dire che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N = N(\epsilon)$ tale che per ogni $n \geqslant N$ si ha
$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\,.$$
Si veda la Figura 1 per avere un'idea dal punto di vista grafico: la curva in neretto rappresenta il grafico della funzione limite f, i puntini i grafici di $f+\epsilon$ e $f-\epsilon$, la curva tratteggiata il grafico di una possibile f_n con $n \geqslant N(\epsilon)$.

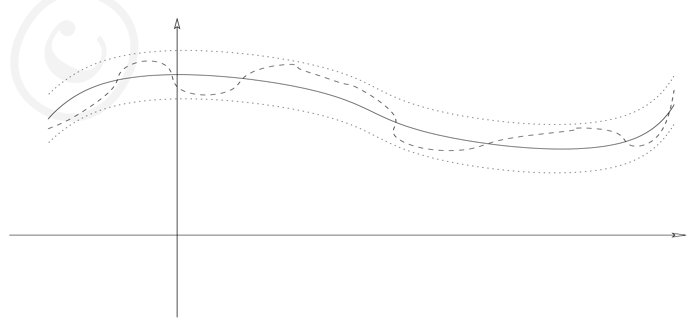


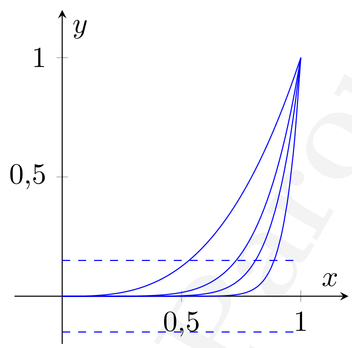
Figura 1.

La stessa cosa non è detto che accada se $(f_n)_n$ converge puntualmente in $A \subset \mathbf{R}$ ad una funzione f. Si consideri, ad esempio, la successione dell'esempio precedente, la successione

$$f_n : [0,1) \to \mathbf{R}\,, \qquad f_n(x) = x^n,$$

che converge puntualmente (! f_n definita in $[0,1)$) alla funzione nulla. Scegliendo $\epsilon < 1$ non è possibile avere che $\sup_{x\in[0,1)} |f_n(x)| < \epsilon$, come mostrato in Figura 2 (i tratteggi sono $f + \epsilon$ e $f - \epsilon$).

Figura 2



Abbiamo appena visto come la convergenza uniforme sia più forte di quella puntuale. Qualche volta però dalla convergenza puntuale si può dedurre anche quella uniforme, come esposto nel seguente risultato.

Teorema 1.3. *Siano $f, (f_n)_n$ funzioni definite in $[a,b]$ e a valori reali. Si supponga che*

i) f e f_n siano continue in $[a,b]$ per ogni $n \in \mathbf{N}$;

ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \qquad$ per ogni $x \in [a,b]$;

iii) $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \qquad$ oppure $\qquad f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$
per ogni $x \in [a,b]$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Allora $(f_n)_n$ converge uniformemente ad f in $[a,b]$.

Dimostrazione - Supponiamo, senza perdita di generalità, che valga ad esempio $f_n \geqslant f_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e quindi $f \leqslant f_n$. Per assurdo si supponga che la tesi non sia vera, e quindi che esistano $\epsilon > 0$ ed una successione di indici $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tali che

$$\sup_{x\in[a,b]} \big(f_{n_k}(x) - f(x)\big) > \epsilon.$$

Di conseguenza esiste una successione $(x_{n_k})_k \subset [a,b]$ tale che

$$f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k}) > \epsilon \qquad \text{per ogni } k \in \mathbf{N}\,.$$

Dalla compattezza di $[a,b]$ si può supporre, eventualmente estraendo un'ulteriore sottosuccessione, che $(x_{n_k})_k$ converga ad un punto $x_o \in [a,b]$.
Dalla monotonia di $(f_n)_n$, si ha che per ogni indice $m \leqslant n_k$ vale

$$f_m(x_{n_k}) - f(x_{n_k}) \geqslant f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k}) > \epsilon\,.$$

Dalla continuità di f e di f_m si ottiene, passando al limite per $k \to +\infty$, che

$$f_m(x_o) - f(x_o) > \epsilon.$$

Dalla arbitrarietà di m questo contraddice il fatto che $(f_m)_m$ converga puntualmente a f. $\square$

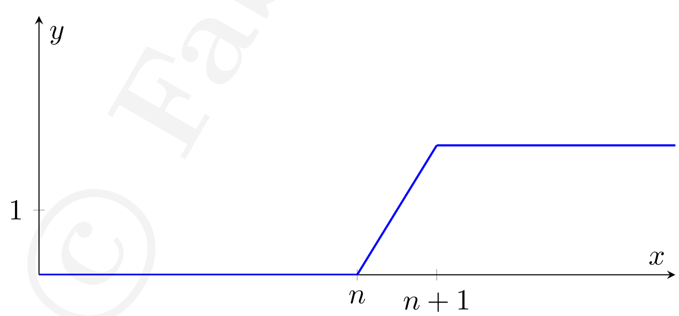
Osservazione 1.4. - Si osservi come l'ipotesi *i*) nel teorema precedente sia fondamentale. L'esempio, già visto, di $f_n(x) = x^n$ con $x \in [0,1]$ soddisfa le ipotesi *ii*) e *iii*), ma chiaramente non soddisfa il teorema.
Anche la compattezza dell'insieme di definizione della successione $(f_n)_n$ è fondamentale: si consideri nuovamente la successione $f_n(x) = x^n$ definita questa volta in $[0,1)$. La funzione limite f (la funzione nulla) è continua in $[0,1)$, ma la convergenza non è uniforme.
Altro controesempio che mostra come serva la compattezza: data

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0, \\ x & x \in [0,1], \\ 1 & x > 1, \end{cases}$$

definiamo

$$f_n(x) = f(x-n)$$

il cui grafico è mostrato in figura. Si ha che $f_{n+1} \leqslant f_n$ e che $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Ma f_n non converge uniformemente.



Teorema 1.5 (Continuità della funzione limite)**.** *Il limite uniforme di funzioni continue definite in I intervallo è continuo.*

Dimostrazione - Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni appartenenti a $C(I)$, I intervallo di $\mathbf{R}$ e si supponga che f_n convergano in I ad una funzione f.

Vogliamo vedere che f è continua in I. Si fissi $x_o \in I$ e $\varepsilon > 0$. Bisogna mostrare che esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x - x_o| < \delta,\ x \in I \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon\,.$$

Per ipotesi esiste un $\nu \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $x \in I$ si ha $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ per ogni $n \geqslant \nu$. Inoltre, dalla continuità delle f_n, si ha che esiste $\delta > 0$ tale che $|f_\nu(x) - f_\nu(x_o)| < \varepsilon/3$ se $|x - x_o| < \delta$. Quindi si ha

$$|f(x) - f(x_o)| \leqslant |f(x) - f_\nu(x)| + |f_\nu(x) - f_\nu(x_o)| + |f_\nu(x_o) - f(x_o)| < \varepsilon$$

per ogni x soddisfacente $|x - x_o| < \delta$. □

Osservazione 1.6. -

1. Se la convergenza è solo puntuale non è detto che la continuità passi al limite. Basta considerare, come nel punto 3. dell'Osservazione 1.2, $f_n : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = x^n$.

2. Nel discutere la convergenza uniforme di una successione di funzioni il teorema appena visto può essere utile in negativo: data una successione di funzioni continue $(f_n)_n$ che converge puntualmente e si conosce che il limite puntuale non è continuo si può concludere che la convergenza non può essere uniforme.

Teorema 1.7 (Passaggio al limite sotto il segno d'integrale)**.** *Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni continue in I, uniformemente convergente in I ad una funzione f. Allora per ogni intervallo $[a, b] \subset I$ risulta*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Dimostrazione - Per il Teorema 1.5 f è continua, per cui tutti gli integrali in (4) sono definiti. Si fissi ora $\varepsilon > 0$: per ipotesi esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant \nu\,.$$

Allora

$$\Big|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\Big| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b M_n dx < \varepsilon(b - a)$$

per ogni $n \geqslant \nu$. Dall'arbitrarietà di ε si conclude. □

Osservazione 1.8. - Il risultato appena visto non può essere esteso a tutto l'insieme I, ma, in generale, vale solo su intervalli limitati.
Esempio: si considerino le funzioni costanti

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Chiaramente f_n convergono uniformemente a $f \equiv 0$ su tutto $\mathbf{R}$, ma altrettanto chiaramente

$$+\infty = \int_{\mathbf{R}} f_n(x)\,dx \quad \not\to_n \int_{\mathbf{R}} f(x)\,dx = 0\,.$$

Anche la convergenza uniforme è ottimale: se $(f_n)_n$ convergono solo puntualmente ad f il risultato può non essere vero.
Esempio: si considerino le funzioni $f_n : (0,+\infty) \to \mathbf{R}$ definite da

$$f_n(x) = \begin{cases} -2n^2\left(x - \frac{1}{n}\right) & x \in (0, 1/n], \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Chiaramente f_n convergono puntualmente a $f \equiv 0$ in $(0,+\infty)$, ma

$$1 = \int_0^1 f_n(x)\,dx \quad \not\to_n \int_0^1 f(x)\,dx = 0\,.$$

Che regolarità possiamo aspettarci per una funzione che è il limite uniforme di funzioni di classe C^1? Vediamo di rispondere con l'esempio che segue: si considerino le funzioni (che in realtà sono derivabili ben più di una volta)

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\,, \qquad x \in [-1,1]\,.$$

Il limite, puntuale ed uniforme, è dato dalla funzione $f(x) = |x|$. In conclusione, il limite uniforme di funzioni di classe C^1 (ma anche C^∞) è, a priori, solamente continuo. Per ereditare la regolarità anche sulla derivata ci vuole la convergenza uniforme anche sulla derivata, come mostra il seguente risultato.

Teorema 1.9 (Passaggio al limite sotto il segno di derivata). *Siano $(f_n)_n$ una successioni di funzioni $C^1(I)$, I intervallo di $\mathbf{R}$, $f, g : I \to \mathbf{R}$ due funzioni continue tali che*

$$\begin{aligned} &f_n \quad \textit{converge puntualmente a} \quad f \quad \textit{in } I, \\ &f_n' \quad \textit{converge uniformemente a} \quad g \quad \textit{in } I\,. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} f \quad &\textit{è derivabile in } I, \qquad f' = g, \\ (f_n)_n \quad &\textit{converge uniformemente ad } f \quad \textit{in } [a,b] \subset I \end{aligned}$$

per ogni $[a,b]$ intervallo chiuso e limitato contenuto in I.

Dimostrazione - Sia $[a,b] \subset I$ e contenente x_o. Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha, per x e x_o in $[a,b]$,

$$(5) \quad f_n(x) = f_n(x_o) + \int_{x_o}^x f_n'(t)\,dt \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}, \quad \text{per ogni } x \in [a,b]\,.$$

Passando al limite, usando le ipotesi e il Teorema 1.7 si ottiene

$$f(x) = f(x_o) + \int_{x_o}^{x} g(t)\, dt \qquad \text{per ogni } x \in [a, b]\,.$$

Dal Teorema fondamentale del calcolo integrale si deduce che f è derivabile e che $f' = g$. Inoltre

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x_o) - f(x_o)| + \int_{x_o}^{x} |f_n'(t) - f'(t)|\, dt$$

per cui passando all'estremo superiore per $x \in [a, b]$ e al limite per $n \to +\infty$ si conclude. $\square$

Osservazione 1.10. - Si osservi come, in generale, non si possa concludere che f_n convergano uniformemente in I.
Si consideri, ad esempio. $f_n(x) = x/n$. Si ha che f_n convergono puntualmente a zero in $\mathbf{R}$, $f_n' = 1/n$ convergono uniformemente a zero in $\mathbf{R}$, ma f_n convergono uniformemente solo sugli intervalli compatti (o limitati).

Osservazione 1.11. - Si osservi come sia sufficiente supporre la convergenza puntuale in un solo punto x_o per arrivare alla conclusione del teorema. Infatti possiamo enunciare il teorema come segue:
Siano $(f_n)_n$ una successioni di funzioni $C^1(I)$, I intervallo di $\mathbf{R}$, $x_o \in I$, $g : I \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che

$$\begin{aligned} &f_n(x_o) \quad \text{converge ad un numero} \quad \alpha, \\ &f_n' \quad \text{converge uniformemente a} \quad g \quad \text{in } I\,. \end{aligned}$$

Allora esiste una funzione $f \in C^1(I)$ tale che

$$\begin{aligned} f \quad &\text{è derivabile in } I, \qquad f' = g, \\ (f_n)_n \quad &\text{converge uniformemente ad } f \quad \text{in } [a, b] \subset I \end{aligned}$$

per ogni $[a, b]$ intervallo chiuso e limitato contenuto in I e tale che $x_o \in [a, b]$.
Per dimostrarlo è sufficiente considerare il limite in (5). Dal Teorema 1.7 si ottiene che, per ogni $x \in [a, b]$ esiste il limite del termine a destra di (5) ed è

$$\alpha + \int_{x_o}^{x} g(t)\, dt\,.$$

Quindi, sempre da (5), si deduce che esiste il limite $\lim_n f_n(x)$ e vale

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \alpha + \int_{x_o}^{x} g(t)\, dt\,.$$

Chiamando tale limite $f(x)$ si ottiene che

$$f(x) = \alpha + \int_{x_o}^{x} g(t)\, dt$$

da cui $f(x_o) = \alpha$, f è continua, derivabile con derivata continua e $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Per la convergenza uniforme si conclude come nella dimostrazione precedente.

2. Serie di funzioni

In questo paragrafo considereremo $(f_n)_n$ una successione di funzioni definite in I,

$$f_n : I \longrightarrow \mathbf{R}\,, \qquad n \in \mathbf{N}, \qquad I \text{ sottoinsieme di } \mathbf{R} \tag{6}$$

e studieremo la convergenza della serie $\sum_n f_n(x)$.
Come per le serie numeriche si può definire un'altra successione di funzioni, detta delle somme parziali, come segue

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

Quindi da un punto di vista formale per ogni x fissato si ha una serie numerica e $(S_n)_n$ rappresenta una successione di funzioni. La serie sarà denotata con

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x). \tag{7}$$

Definizione 2.1. *Diciamo che la serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

1) converge puntualmente *ad f in x_o, $x_o \in I$, se*
$$\lim_{n \to +\infty} S_n(x_o) = f(x_o)\,;$$
2) converge puntualmente *ad f in $A \subset I$, se*
$$\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = f(x) \qquad \textit{per ogni } x \in A\,;$$
3) converge uniformemente *ad f in $A \subset I$, se*
$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in A} |S_n(x) - f(x)| = 0\,.$$

Teorema 2.2 (Criterio di Cauchy per le serie di funzioni)**.** *La serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ converge puntualmente nel punto $x_o \in I$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n \geqslant \nu$ e per ogni $p \in \mathbf{N}$*

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x_o) \right| < \varepsilon\,.$$

La serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente in I se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n \geqslant \nu$ e per ogni $p \in \mathbf{N}$

$$\sup_{x \in I} \left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon\,.$$

Dimostrazione - Si adatti l'analoga dimostrazione per le serie numeriche. $\square$

Osservazione 2.3. - In maniera analoga al Teorema 2.4 del capitolo sulle serie numeriche si mostra che se la serie in (7) converge puntualmente in A allora $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ per ogni $x \in A$, cioè

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \quad \text{converge puntualmente in } A$$
$$\Downarrow$$
$$f_n \quad \text{converge puntualmente a zero in } A.$$

Usando il criterio di Cauchy appena visto (prendendo $p = 0$) si ottiene anche il seguente fatto:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \quad \text{converge uniformemente in } A$$
$$\Downarrow$$
$$f_n \quad \text{converge uniformemente a zero in } A.$$

Come per le serie numeriche si possono dare altre definizioni di convergenza, come quella assoluta. Vediamo per le serie di funzioni le seguenti definizioni.

Definizione 2.4. *Diciamo che la serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

1) converge assolutamente puntualmente *in $A \subset I$, se*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| \qquad \textit{converge puntualmente in } A\,;$$

2) converge assolutamente uniformemente *in $A \subset I$, se*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| \qquad \textit{converge uniformemente in } A\,;$$

3) converge totalmente *in $A \subset I$, se*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x)| \qquad \textit{converge in } A\,.$$

Osservazione 2.5. - È immediato che, come nel caso delle serie numeriche, se una serie di funzioni converge assolutamente puntualmente (risp. assolutamente uniformemente) allora converge puntualmente (risp. uniformemente).
Inoltre, è pure immediato per confronto che se la serie converge totalmente in A allora converge assolutamente puntualmente in A.

Vediamo ora un criterio che assicura la convergenza uniforme: possiamo sintetizzarlo dicendo che se una serie converge totalmente in un certo insieme allora converge anche uniformemente in tale insieme.

Teorema 2.6 (Criterio di Weierstrass)**.** *Siano I e $(f_n)_n$ come in* (6)*. Supponiamo esista una successione $(M_n)_n$ di numeri reali tali che*

$$\sup_{x\in I}|f_n(x)| \leqslant M_n \quad \textit{per ogni } n \in \mathbf{N} \qquad \textit{e} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} M_n < +\infty.$$

Allora la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente e uniformemente (*assolutamente*)*.*

Dimostrazione - Che la serie converga totalmente è ovvio dal criterio del confronto per le serie numeriche. Quindi si ha anche la convergenza assoluta puntuale, dal confronto con quella totale, e da quella assoluta si ha la convergenza puntuale semplice. Quindi esiste la somma della serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \qquad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}\,.$$

Per quanto riguarda la convergenza uniforme: si fissi innanzitutto $\varepsilon > 0$. Dal criterio di Cauchy per le serie numeriche si ha che esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n \geqslant \nu$ si ha che

$$\sum_{k=n}^{n+p} M_k < \varepsilon \qquad \text{per ogni } p \in \mathbf{N}\,.$$

Poiché vale

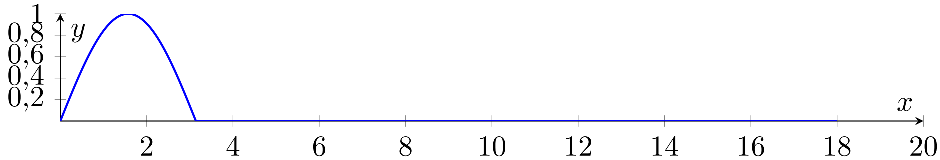
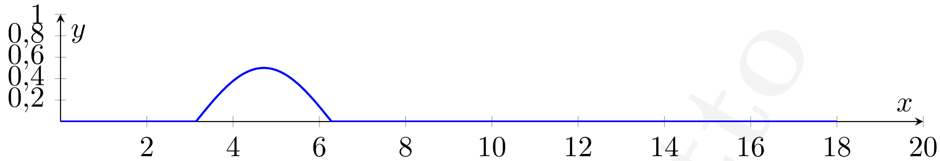
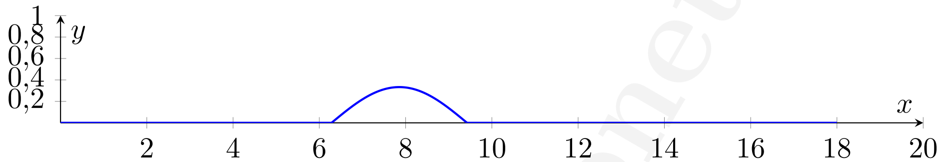
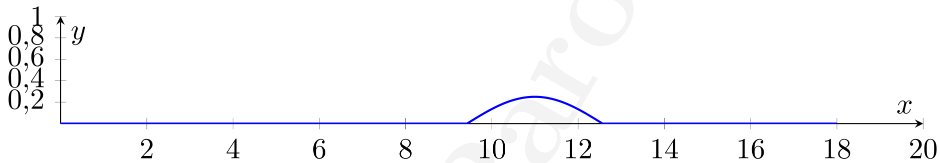
$$\sup_{x\in I}\left|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)\right| \leqslant \sup_{x\in I}\sum_{k=n}^{n+p}|f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p}\sup_{x\in I}|f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} M_k < \varepsilon\,,$$

dal Teorema 2.2 si conclude. □

La convergenza totale è uno strumento molto utile per lo studio della convergenza uniforme di serie di funzioni, ma è molto più forte della convergenza uniforme. Può quindi capitare che vi sia convergenza uniforme anche se non vi è convergenza totale. Per capire bene la differenza tra i due tipi di convergenza vediamo un esempio.

Esempio 2.7. - Si consideri la successione di funzioni ($n \geqslant 1$), alcune delle quali sono riportate in figura,

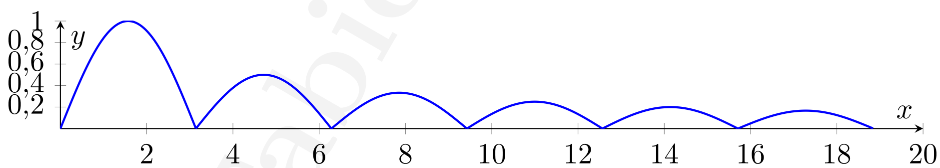
$$f_n : [0, +\infty) \to \mathbf{R}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\,|\mathrm{sen}\, x| & \text{se } x \in [(n-1)\pi, n\pi], \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sommando le f_n è evidente che si ottiene la funzione

$$f(x) = \frac{1}{n}|\operatorname{sen} x| \qquad \text{per } x \in [(n-1)\pi, n\pi]$$

il cui grafico è



D'altra parte è pure evidente che $\sup\limits_{x \geqslant 0} f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ e che $\sum\limits_{n} \dfrac{1}{n} = +\infty$, per cui vi è convergenza puntuale, assoluta, uniforme della serie alla funzione f, ma non convergenza totale!

Passiamo ora a vedere l'analogo di alcuni risultati visti nel paragrafo per le successioni. Rienunciamo i fatti più importanti, che risultano semplicemente corollari dei corrispondenti risultati principali, per cui le dimostrazioni sono lasciate per esercizio o accennate.

Continuità del limite - Data una successione $(f_n)_n$ di funzioni continue in $I \subset \mathbf{R}$, se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in I ad una funzione f, allora f è continua in I.

Integrazione per serie - Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni continue in I tale che $\sum_n f_n$ sia uniformemente convergente in I ad una funzione f. Allora per ogni intervallo $[a,b] \subset I$ risulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx. \tag{8}$$

Dimostrazione - Si applichi il Teorema 1.7 alla successione $(S_n)_n$, dove $S_n := \sum_{k=0}^{n} f_k$. □

Derivazione per serie - Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni $C^1(I)$, I intervallo di $\mathbf{R}$, $f : I \to \mathbf{R}$ una funzione continua tali che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \quad \text{converge puntualmente a} \quad f \quad \text{in } I,$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n' \quad \text{converge uniformemente} \quad \text{in } I\,.$$

Allora

$$f \quad \text{è derivabile in } I,$$
$$\sum_n f_n \quad \text{converge uniformemente ad } f \quad \text{in } [a,b] \subset I$$

per ogni $[a,b]$ intervallo chiuso e limitato contenuto in I e inoltre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \qquad x \in I\,. \tag{9}$$

Dimostrazione - Si applichi il Teorema 1.9 a $S_n := \sum_{k=0}^{n} f_k$. □

Serie a termini positivi - Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni positive e continue definite in $A \subset \mathbf{R}$. Osserviamo che in questo caso la successione

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$$

soddisfa

$$S_{n+1}(x) \geqslant S_n(x) \qquad \text{per ogni } x \quad \text{e per ogni } n \in \mathbf{N}.$$

Se sappiamo che il limite puntuale di $\{S_n\}_n$ è una funzione continua $f : A \to \mathbf{R}$, allora dal Teorema 1.3 si deduce immediatamente che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \qquad \text{converge uniformemente a } f \text{ in } [a,b] \text{ per ogni } [a,b] \subset A.$$

Attenzione! Ciò vale a priori solo sugli intervalli chiusi e limitati, come già mostrato nell'Osservazione 1.4.

3. Serie di potenze reali e complesse

Vedremo in questo paragrafo particolari serie di funzioni, dette serie di potenze. Per questo particolare tipo di serie vedremo anche il caso di funzioni a variabile complessa.

Una serie di potenze, reale o complessa, è una particolare serie di funzioni $\sum f_n$ dove f_n è una funzione tipo "potenza intera". Tutti i risultati e le definizioni che vedremo saranno enunciati per serie a termini complessi e valgono, ovviamente, anche per serie a termini reali.

Definizione 3.1 (Serie di potenze)**.** *Dati* $z_o \in \mathbf{C}$ *e* $(a_n)_n \subset \mathbf{C}$*, si dice* serie di potenze di centro z_o e coefficienti $(a_n)_n$ *la serie di funzioni*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_o)^n, \qquad z \in \mathbf{C} \tag{10}$$

con la convenzione che $(z - z_o)^0 = 1$ *anche per* $z = z_o$*.*

Osservazione 3.2. - L'insieme di convergenza di una serie di potenze non è mai vuoto, contiene sempre almeno il punto z_o. Può capitare che sia fatto da un solo punto, come nel caso (la serie in questo caso è reale)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n!\, x^n .$$

Spesso una serie di potenze è scritta nella forma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, cioè si suppone che il centro sia 0. Chiaramente è solo un fatto di semplicità e ci si può sempre ridurre a questo caso con una traslazione. Anche noi qualche volta supporremo $z_o = 0$ per semplicità.

Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_o)^n$ si consideri la quantità

$$\ell := \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$$

e la quantità

$$\rho := \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} & \text{se } \ell \in (0, +\infty)\,, \\ +\infty & \text{se } \ell = 0\,, \\ 0 & \text{se } \ell = +\infty\,. \end{cases} \tag{11}$$

Teorema 3.3 (Proprietà delle serie di potenze)**.** *Si consideri una serie di potenze come in* (10) *e sia* $\rho \in [0, +\infty]$ *la quantità definita in* (11)*. Allora: se* $\rho = 0$ *la serie converge solo per* $z = z_o$*. Se* $\rho \neq 0$ *si ha*

i) *la serie converge assolutamente in* $\{ z \in \mathbf{C} \,|\, |z| < \rho \}$*;*

ii) *la serie converge totalmente in* $\{ z \in \mathbf{C} \,|\, |z| \leqslant r \}$ *con* $0 < r < \rho$*;*

iii) *la serie non converge in* $\{ z \in \mathbf{C} \,|\, |z| > \rho \}$*.*

Dimostrazione - Useremo il criterio della radice, o meglio il suo corollario, per le serie numeriche. Si consideri la serie (a termini reali)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n||z|^n \, .$$

Per $\rho \in (0, +\infty)$ si ha che (si osservi che $|z^n| = |z|^n$)

$$\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n||z^n|} = |z| \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{\rho} \, .$$

Dal criterio della radice si ha che la serie data converge assolutamente (e quindi anche semplicemente) se

$$\frac{|z|}{\rho} < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |z| < \rho \, ;$$

d'altra parte se $|z| > \rho$, cioè se

$$\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n||z^n|} > 1 \, ,$$

si ha che $\lim_{n \to +\infty} a_n z^n$ non è zero, per cui la serie $\sum a_n z^n$ non può convergere.
Per provare il punto *ii*) si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \, r^n \, .$$

Si osservi che $M_n := |a_n| \, r^n$ soddisfa $M_n \geqslant |a_n \, z^n|$. Sempre dal criterio della radice si ha

$$\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n| \, r^n} = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{M_n} = \frac{r}{\rho} < 1,$$

per cui la serie $\sum M_n$ converge e dal Teorema 2.6 si deduce che la serie converge totalmente e quindi anche uniformemente in $\big\{ z \in \mathbf{C} \, \big| \, |z| \leqslant r \big\}$.
I casi $\rho = 0$ e $\rho = +\infty$ sono simili e lasciati per esercizio. $\square$

Definizione 3.4 (Raggio di convergenza)**.** *Data una serie di potenze* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *si definisce raggio di convergenza la quantità definita in* (11)*. Per semplicità spesso si scrive*

$$\rho = \frac{1}{\ell}$$

qualunque sia il valore di ℓ*, con la convenzione che quando* $\ell = 0$ $\rho = +\infty$*, quando* $\ell = +\infty$ $\rho = 0$*.*

Osservazione 3.5. - Qualche volta può essere utile, per calcolare il raggio di convergenza di una serie di potenze, anche il criterio del rapporto, quando la serie è a termini non nulli, cosicché $|a_n| \neq 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Ricordiamo infatti (si veda il Teorema 2.20 nel capito "Serie numeriche") che se esiste il limite del rapporto $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ allora esiste anche il limite $\sqrt[n]{|a_n|}$ (e sono uguali). In particolare $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

Osservazione 3.6. - Si osservi come nel Teorema 3.3 per un valore di z per cui $|z| = \rho$ nulla viene detto, e nulla si può sapere in generale a priori.
Esempio: si consideri la serie (a termini complessi)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \, z^n \, . \tag{12}$$

Il raggio di convergenza è chiaramente 1. Si deducono le due seguenti cose:
i) la serie converge nel disco, o nel cerchio, $D = \big\{ z \in \mathbf{C} \, \big| \, |z| < 1 \big\}$;
ii) la serie non converge in $\mathbf{C} \setminus D$.
Per quanto riguarda i punti della circonferenza identificata da $|z| = 1$, a priori non si può dire nulla. Ad esempio considerando $z = 1$ e $z = -1$ si ottengono due serie (reali) che hanno comportamenti diversi, precisamente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Si osservi che in realtà è possibile studiare in dettaglio la serie (12) nel cerchio $C := \big\{ z \in \mathbf{C} \, \big| \, |z| = 1 \big\}$. Infatti usando il criterio di Dirichlet visto nel paragrafo 4 del capitolo sulle serie numeriche e procedendo in maniera simile all'Esempio 4.4 si ha che

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z^k \right| = \left| \frac{z - z^{n+1}}{1 - z} \right| \leqslant \frac{2}{|1 - z|}$$

per cui dal criterio di Dirichlet si conclude che la serie (12) converge per ogni $z \in C$ tranne che per $z = 1$.
Più in generale vale il seguente fatto: data una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ a termini reali soddisfacente le ipotesi i), ii), iii) del criterio di Dirichlet si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, z^n$$

e si supponga che il raggio di convergenza sia pari a 1. Si vuole capire in che punti del cerchio C la serie converge. Proprio come sopra si ha che

$$\left| \sum_{k=0}^{n} z^k \right| = \left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| \leqslant \frac{2}{|1 - z|}$$

per cui per tutti i punti $z \in C$, tranne al più $z = 1$, si conclude che la serie converge. Per $z = 1$ ci si riduce ad una serie reale a termini positivi, per cui la si può studiare più facilmente con uno dei criteri a disposizione.

Osservazione 3.7. - Se si studia una serie di potenze a termini reali lo studio della convergenza risulta più semplice. Infatti i punti nei quali non si ricavano informazioni dal Teorema 3.3 sono sempre e solo due, per cui la verifica può essere fatta analizzando i due casi. Ad esempio, considerando la stessa serie vista nell'osservazione precedente, ma a termini reali,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\, x^n\,, \qquad x \in \mathbf{R}\,,$$

dal teorema si deduce che converge in $(-1, 1)$ e non converge in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Gli unici punti che rimangono esclusi da questa analisi possono essere studiati separatamente. Si conclude che la serie converge puntualmente in $[-1, 1)$ e non converge in $(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$. Dal Teorema 3.3 si conclude anche che la serie $\sum \frac{1}{n}\, x^n$ converge totalmente, e quindi uniformemente in ogni intervallo $[a, b] \subset (-1, 1)$. Si può dire qualcosa in più? Sì. Infatti dal criterio di Leibniz per una serie a segni alterni $\sum (-1)^n a_n$ si sa che

$$\left| \sum_{n=k+1}^{+\infty} (-1)^n a_n \right| \leqslant a_{k+1}\,.$$

Nel nostro esempio, detta f la somma della serie in $[-1, 1)$, si ha per $x \in [-1, 0]$

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n \frac{|x|}{n} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{|x|}{n} - \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n \frac{|x|}{n} \right| = \\ &= \left| \sum_{n=k}^{+\infty} (-1)^n \frac{|x|}{n} \right| \leqslant \frac{|x|}{k+1}. \end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore su x e poi al limite per $k \to +\infty$ si ottiene

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{x\in[-1,0]} \left| f(x) - \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n \frac{|x|}{n} \right| \leqslant \lim_{k\to+\infty} \sup_{x\in[-1,0]} \frac{|x|}{k+1} \leqslant \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1} = 0,$$

per cui si ha convergenza uniforme in $[-1, 0]$. Riassumendo la serie $\sum \frac{1}{n}\, x^n$:

converge puntualmente in $[-1, 1)$,
converge assolutamente in $(-1, 1)$,
converge uniformente in $[-1, b]$ per ogni $b < 1$ (e $b > -1$),
converge totalmente in $[a, b]$ per ogni $[a, b] \subset (-1, 1)$.

Più in generale (rispetto a quanto visto nell'osservazione precedente) vale il seguente risultato.

Teorema 3.8 (Criterio di Abel)**.** *Si consideri una serie di potenze* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *e si supponga che la serie converga in un punto* $z_o \in \mathbf{C}$*. Allora la serie converge uniformemente nel segmento* $[0, z_o] := \big\{ z \in \mathbf{C} \,\big|\, z = t\, z_o,\ t \in [0, 1] \big\}$.

Dimostrazione - Senza dimostrazione. $\square$

3.1. Caso reale - Funzioni analitiche - Serie di Taylor.

Approfondiamo in questo sottoparagrafo il caso in cui una serie di potenze sia a termini reali, cioè del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_o)^n, \qquad\qquad x, x_o \in \mathbf{R}\,, \quad (a_n)_n \subset \mathbf{R}\,.$$

Ovviamente quanto visto precedentemente si applica anche alle serie a termini reali. In questo caso, utilizzando i risultati visti nei paragrafi precedenti per serie di funzioni reali, possiamo affermare il seguente risultato.

Teorema 3.9. *Sia $\rho \in (0, +\infty]$ il raggio di convergenza di una serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_o)^n \tag{13}$$

a termini reali convergente ad una funzione f nell'intervallo I. Allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, (x - x_o)^{n-1} \qquad e \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\, (x - x_o)^{n+1}$$

hanno lo stesso raggio di convergenza ρ di (13)*; inoltre $f \in C^1(x_o - \rho, x_o + \rho)$ e, detta F una primitiva di f, valgono le seguenti uguaglianze per ogni $x \in (x_o - \rho, x_o + \rho)$:*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, (x - x_o)^{n-1}\,,$$
$$F(x) - F(x_o) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\, (x - x_o)^{n+1}\,.$$

Osservazione 3.10. - Si noti come, nel caso ρ sia finito e, per semplicità, x_o sia 0, l'intervallo I possa essere solamente uno dei quattro intervalli: $(-\rho, \rho)$, $[-\rho, \rho)$, $(-\rho, \rho]$, $[-\rho, \rho]$.

Dimostrazione - Sia, senza perdita di generalità, $x_o = 0$. La dimostrazione è immediata e segue dai risultati **Integrazione per serie** e **Derivazione per serie** enunciati alla fine del paragrafo 2. Infatti la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ converge in $(-\rho, \rho)$ e quindi, dal Teorema 3.3, uniformemente in $[-r, r]$ per ogni $r \in (0, \rho)$. Allora in $[-r, r]$ è possibile integrare (tra 0 e x) e derivare termine a termine e passare al limite ottenendo la tesi in $[-r, r]$. Infatti, ad esempio, derivando termine a termine si ottiene la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$$

che ha lo stesso raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, a_n\, x^n$, per cui in particolare converge puntualmente in $(-\rho, \rho)$ e uniformemente in $[-r, r]$ per ogni

$r \in (0, \rho)$. Dalla convergenza uniforme si deduce che f è derivabile, la sua derivata è continua e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \qquad \text{per } x \in [-r, r].$$

Per l'arbitrarietà di r si ottiene la convergenza in $(-\rho, \rho)$. Analogamente si procede per la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\,(x - x_o)^{n+1}$. $\square$

Osservazione 3.11. - Osserviamo <u>due</u> cose: la prima, che induttivamente si ricava che in realtà

$$f \in C^\infty(x_o - \rho, x_o + \rho)$$

e che per $x \in (x_o - \rho, x_o + \rho)$ si ha

$$f^{(h)}(x) = \sum_{n=h}^{+\infty} n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-h+1)\, a_n\, (x - x_o)^{n-h}\,. \tag{14}$$

La seconda, che gli insiemi di convergenza di f, f' ed F possono essere diversi, nonostante il raggio di convergenza sia lo stesso.

Esempio: si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\, x^n$ che ha raggio di convergenza 1 e sia $f(x)$ la sua somma. Se integriamo e deriviamo termine a termine otteniamo altre due serie. Si osservi come le tre serie in gioco abbiano tutte raggio di convergenza 1, ma insiemi di convergenza diversi:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\, x^n && \text{converge in } [-1, 1), \\
f'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n && \text{converge in } (-1, 1), \\
F(x) - F(0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}\, x^{n+1} && \text{converge in } [-1, 1].
\end{aligned}$$

Si osservi anche come, conoscendo la somma di una di queste serie, si possono ricavare la somma anche delle altre. Infatti

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{in } (-1, 1)\,.$$

Allora, integrando tra 0 e x, si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\, x^n = -\log(1-x)$$

e, integrando quest'ultima espressione,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}\, x^{n+1} = (1-x)\log(1-x) - (1-x) + 1\,.$$

Data una serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_o)^n$ la cui somma è f da quanto appena visto si ricava che f è infinitamente derivabile, almeno in un intorno di x_o e, da (14), si ha che

$$f^{(h)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+h)!}{k!}\, a_{k+h}\, (x-x_o)^k$$

da cui

$$f^{(h)}(x_o) = h!\, a_h\,. \tag{15}$$

Definizione 3.12 (Serie di Taylor)**.** *Dati un intervallo $I \subset \mathbf{R}$, x_o interno ad I e $f \in C^\infty(I)$, si dice* serie di Taylor di f di punto iniziale x_o *la serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}\, (x-x_o)^n\,. \tag{16}$$

Definizione 3.13 (Funzione analitica e funzione sviluppabile in serie di Taylor)**.** *Sia $I \subset \mathbf{R}$ un intervallo aperto e $x_o \in I$. Una funzione $f \in C^\infty(I)$ è detta*

<u>sviluppabile in serie di Taylor di centro x_o nell'intervallo I</u> *se la serie* (16) *converge ad f in tutto l'intervallo I;*

<u>analitica reale nell'intervallo I</u> *se per ogni $x_o \in I$ esiste $\rho > 0$ tale che f è sviluppabile in serie di Taylor in $(x_o-\rho, x_o+\rho) \subset I$.*

Osservazione 3.14. -
1. Ogni serie di potenze è la serie di Taylor di qualcuno (banalmente, della funzione somma della serie di potenze), come mostra (15).
2. Di ogni funzione C^∞ si può scrivere la serie di Taylor in un punto x_o; ciononostante, non è detto che una funzione C^∞ sia analitica.
Esempio: si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Si verifichi per esercizio che $f \in C^\infty(\mathbf{R})$. Valutando le derivate di f si ottiene

$$f^{(k)}(0) = 0 \qquad \text{per ogni } k \in \mathbf{N}\,.$$

Per cui la serie di Taylor di f nel punto 0 è la serie che ha tutti i coefficienti nulli. Ma la definizione di analiticità (o sviluppabilità) richiede che esista un raggio di convergenza positivo (o un intervallo aperto nel quale la serie converga).

A questo punto ci chiediamo quando la serie di Taylor centrata in un punto x_o di una funzione $f \in C^\infty$ converge ad f in un intervallo aperto.

Teorema 3.15 (Criterio di sviluppabilità in serie di Taylor)**.** *Siano $I \subset \mathbf{R}$ un intervallo aperto, $x_o \in I$ e $f \in C^\infty(I)$. Se esistono $L, M > 0$ tali che*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M L^n \qquad \textit{per ogni } x \in I, \ \textit{per ogni } n \in \mathbf{N}\,,$$

allora f è sviluppabile in serie di Taylor centrata in x_o in I.

Dimostrazione - La dimostrazione segue dalla formula di Taylor con resto di Lagrange: si fissi $x_o \in I$. Per ogni altro $x \in I$ esiste un punto η, compreso tra x e x_o, tale che

$$f(x) = f(x_o) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x - x_o)^{n+1}\,.$$

Dalle ipotesi sulle derivate si ottiene

$$\left| f(x) - f(x_o) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n \right| \leqslant M \frac{L^{n+1}}{(n+1)!}|x - x_o|^{n+1}.$$

Poiché per ogni x fissato $\lim_{n\to+\infty} M \frac{L^{n+1}}{(n+1)!}|x - x_o|^{n+1} = 0$ si deduce che

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}\,(x - x_o)^k = f(x) \qquad \text{per } x \in I\,.$$

Si osservi anche che, se I è limitato, diciamo per semplicità $[x_o - \rho, x_o + \rho]$, si ottiene che la serie di Taylor converge non solo puntualmente, ma anche uniformemente. $\square$

Esercizio 3.16. - Si verifichi che la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è sviluppabile in serie di Taylor in ogni intervallo $(0, a)$ e $(b, 0)$ con $a > 0, b < 0$. Dopodiché si scriva lo sviluppo nei punti $2, -3$ e si trovi il raggio di convergenza delle serie ottenute.
È possibile predire il raggio di convergenza dello sviluppo in serie di Taylor della funzione f in un generico punto $x_o \neq 0$?

Le derivate sono date da

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2}\,, \\ f''(x) &= 2\,\frac{1}{x^3}\,, \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= (-1)^k\, k!\, \frac{1}{x^{k+1}}\,. \end{aligned}$$

Si consideri ora un intervallo $[\varepsilon, a)$ con $\varepsilon > 0$ arbitrario. Si ha che

$$\left| f^{(k)}(x) \right| \leqslant k! \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^k .$$

Una stima come la condizione sufficiente del Teorema 3.15 non può valere, nemmeno considerando $[\varepsilon, a)$ anziché $(0, a)$. Nonostante ciò si può mostrare che f ammette uno sviluppo convergente a f. Calcolando lo sviluppo nel punto 2 si ottiene

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(2)}{k!} (x-2)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \, \frac{1}{2^{k+1}} (x-2)^k .$$

Riscrivendo il generico termine come segue

$$(-1)^k \, \frac{1}{2^{k+1}} (x-2)^k = \frac{1}{2} \left((-1) \frac{x-2}{2} \right)^k$$

ci si accorge che la serie ottenuta diventa

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2-x}{2} \right)^k$$

Tale serie converge se

$$\left| \frac{2-x}{2} \right| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 < x < 4$$

e converge a (è una serie geometrica)

$$\frac{1}{2} \, \frac{1}{1 - \frac{2-x}{2}} = \frac{1}{2} \, \frac{2}{x} = \frac{1}{x} .$$

Quindi si è mostrato che lo sviluppo di Taylor converge nell'intervallo $(0, 4)$ alla funzione f.
Si mostri che lo sviluppo in -3 converge a f nell'intervallo $(-6, 0)$ e lo sviluppo in un generico punto $x_o \neq 0$ converge a f in $(0, 2x_o)$ se $x_o > 0$ e in $(2x_o, 0)$ se $x_o < 0$ (in questo caso $|x_o|$ è il raggio di convergenza).

Osservazione 3.17. - Si osservi come la funzione f definita in (17) non possa soddisfare le ipotesi del Teorema 3.15 in un intorno di 0. Verificarlo non è semplice (non è difficile, ma estremamente lungo e noioso), ma l'idea è la seguente.
È ovvio che, poiché tutte le derivate di f si annullano in 0, queste siano limitate in un intorno di 0. Il problema è che, fissato un intorno $[-a, a]$ di 0, se si trova una costante M_n tale che

$$\left| \frac{d^n f}{dx^n}(x) \right| \leqslant M_n \qquad\qquad x \in [-a, a]$$

si ha che $\lim_n M_n \to +\infty$. Diversamente, se si trova una costante M per cui

$$\left| \frac{d^n f}{dx^n}(x) \right| \leqslant M \qquad\qquad x \in [-a_n, a_n]$$

si ha che $\lim_n a_n \to 0$.

Esempio 3.18. - A questo punto, presa una funzione C^∞ e calcolatene le sue derivate in un punto, è immediato dedurre che la serie di Taylor converge (in un qualche intervallo da stabilire) posto che valga una stima di limitatezza sulle derivate come nelle ipotesi del teorema appena visto.
Ciò facendo si possono verificare i seguenti sviluppi e gli insiemi di convergenza di tali sviluppi (che faremo nell'origine, ma che potrebbero essere fatti anche in altri punti):

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbf{R},$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}, \qquad x \in \mathbf{R},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Dal calcolo della serie geometrica e di alcune sue varianti (nel secondo caso la ragione è $-x$, nel terzo è $-x^2$) e sfruttando integrazione, o derivazione, termine a termine si possono calcolare i seguenti (e altri) sviluppi:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad x \in (-1,1),$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \qquad x \in (-1,1),$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^{2n}, \qquad x \in (-1,1),$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n, \qquad x \in (-1,1],$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}, \qquad x \in [-1,1].$$

Inoltre ricordiamo anche

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \qquad x \in (-1,1),$$

valido per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \notin \mathbf{N}$, e

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot(\alpha-n+1)}{n!}\,.$$

Si osservi come nel caso in cui $\alpha \in \mathbf{N}$ la funzione $x \mapsto (1+x)^\alpha$ è un polinomio.

EX - Studiare in dettaglio gli sviluppi appena visti.

Esercizio 3.19. - Vediamo in dettaglio un esempio dei precedenti, il primo, lo sviluppo della funzione esponenziale.

Primo esercizio: studiare la convergenza di $\sum_n \frac{x^n}{n!}$.
Si ha che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$, per cui il raggio di convergenza della serie è $+\infty$. Si osservi che tale serie converge totalmente e uniformemente sui compatti (o sugli insiemi limitati), grazie al Teorema 3.3.
Si osservi come non si possa avere convergenza uniforme in $\mathbf{R}$ e nemmeno in $(-\infty, a]$ o in $[b, +\infty)$: le somme parziali

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{sono un polinomio, qualunque sia } N \in \mathbf{N}$$

e in particolare

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} \left| e^x - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \right| = +\infty, \qquad \sup_{x\in(-\infty,0]} \left| e^x - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \right| = +\infty.$$

Oppure: se la serie convergesse uniformemente in $\mathbf{R}$ o su una semiretta si avrebbe che $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ convergerebbe uniformemente a zero (si veda l'Osservazione 2.3). Ma questo non è vero. Come sopra infatti:

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} \left| \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \right| = +\infty, \qquad \sup_{x\in(-\infty,0]} \left| \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \right| = +\infty.$$

Secondo esercizio: mostrare che lo sviluppo di Taylor centrato in 0 della funzione esponenziale converge alla funzione esponenziale.
Valutando le derivate di e^x in 0 si ha

$$\left.\frac{d^n}{dx^n}\right|_{x=0} e^x = 1$$

per cui il suo sviluppo di Taylor in 0 è $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Fissiamo un intervallo $[a, b]$ che contenga lo 0. È facile vedere che

$$\left| \left.\frac{d^n}{dx^n}\right|_{x=0} e^x \right| \leqslant e^b \qquad \text{per } x \in [a, b]\,.$$

Dal criterio di sviluppabilità, il Teorema 3.15, si ha che la serie di Taylor converge ad e^x in $[a, b]$. Poiché l'intervallo scelto è arbitrario ed in ogni intervallo è possibile ripetere il ragionamento si conclude che la convergenza (puntuale) vale in $\mathbf{R}$.
Come osservato nel primo punto si ha convergenza totale ed uniforme su tutti gli intervalli limitati $[a, b]$.

Monotonia della successione $(1 + x\,n^{-1})^n$ **-** Un modo semplice, anche se forse non è il più naturale, di vedere la monotonia della successione $(1 + x\,n^{-1})^n$, $n \in \mathbf{N}$, è quella di usare la disuguaglianza delle medie: dati n numeri $a_1, \dots a_n \geqslant 0$ si ha che

(18) $$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \qquad \text{e l'uguaglianza vale se e solo se } a_j \text{ sono tutti uguali.}$$

Fissiamo $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$: si ha che scegliendo $a_1 = \ldots = a_n = 1 + \frac{x}{n}$ e $a_{n+1} = 1$ si deduce dalla disuguaglianza (18) che

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{N} \quad \text{se } x > 0 \\ &\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \qquad \text{definitivamente} \quad \text{se } x < 0\,. \end{aligned}$$

Infatti: innanzitutto si osservi che la disuguaglianza è stretta perché gli a_i non sono tutti uguali (se $x \neq 0$) e la disuguaglianza (18) vale a patto che $a_i \geqslant 0$: è sufficiente quindi considerare $x \geqslant -n$ per poter utilizzare la disuguaglianza (18). Da ciò si ottiene che per ogni $x \in \mathbf{R}$ definitivamente valgono

$$a_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqslant \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{e} \quad b_n := \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \geqslant \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)^{-(n+1)}.$$

Dalla monotonia si deduce che $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ ammettono limite. Dal confronto $a_n < b_n$ si deduce che $(a_n)_n$ è superiormente limitata e che $(b_n)_n$ è inferiormente limitata e quindi che $\lim_n a_n$ e $\lim_n b_n$ sono entrambi finiti.

Limite della successione $(1 + x\,n^{-1})^n$ **-** Si è già visto (nel primo corso di analisi) che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = e \qquad \text{dove} \quad a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Da ciò si ricava anche che

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\,.$$

Infatti

$$\frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

e passando al limite si conclude.
Vediamo ora che

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

È sufficiente considerare la parte intera di x, denotata con $[x]$, e scrivere

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

A questo punto si ottiene

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\right]^{\frac{[x]}{[x]+1}} = e, \\ &\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\right]^{\frac{[x]+1}{[x]}} = e, \end{aligned}$$

da cui la tesi. Analogamente

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}.$$

A questo punto si consideri

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n.$$

Si ottiene che

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^a = e^a\,.$$

che converge in quanto n/a è una particolare successione che tende a $+\infty$ se $a > 0$, a $-\infty$ se $a < 0$.

Il numero di Nepero - Si è già visto che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x, \qquad x\in\mathbf{R}\,.$$

Anche la serie vista nell'esempio precedente ha lo stesso limite, cioè

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x\,, \qquad x\in\mathbf{R},$$

quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x \tag{19}$$

e in particolare

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = e.$$

Il numero e, approssimato alle prime cifre decimali (è irrazionale) è

$$e = 2,71828182...$$

Stimiamo la velocità di convergenza di $\sum_n \frac{1}{n!}$ a e. Denotiamo con s_n la somma $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$:

$$\begin{aligned} e - s_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(n+1)!}{k!} \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)^k} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n!}\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n!}\frac{1}{n} \end{aligned} \tag{20}$$

dove l'ultima disuguaglianza deriva dal fatto che $(n+1)^2 = n(n+2)+1$.
Si osservi che già per $n=5$ si ha che

$$e - \sum_{n=0}^{5}\frac{1}{n!} < \frac{1}{600} = 0,001\bar{6};$$

sommando un altro termine si ha

$$e - \sum_{n=0}^{6}\frac{1}{n!} < 0,00023\ldots\,.$$

Diversamente, per $n=5$ e $n=6$ la successione $(1+1/n)^n$ fornisce

$$\left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = 2,48832\,, \qquad \left(1+\frac{1}{6}\right)^6 = 2,5216...$$

Il numero e è irrazionale - Dalla disuguaglianza $e - s_n \leqslant \frac{1}{n!}\frac{1}{n}$ (si veda (20)) segue che il numero di Nepero non può essere un razionale. Infatti se lo fosse, supponiamo per assurdo sia del tipo $e = p/q$ con $p, q \in \mathbf{N}$, si avrebbe

$$e - s_q < \frac{1}{q!}\frac{1}{q}.$$

Poiché $s_q = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}$ si ha che $q!s_q$ è un numero intero, per cui moltiplicando per $q!$ la disuguaglianza di sopra si ottiene

$$q!(e - s_q) \in \mathbf{N} \qquad \text{e} \qquad 0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q},$$

il che è impossibile.

Osservazione 3.20. - Si noti come negli sviluppi delle funzioni seno e coseno compaiano solamente i termini con la stessa parità, i termini pari per la funzione coseno (che è una funzione *pari*), dispari per la funzione seno (che è una funzione *dispari*).

Esercizio 3.21. - Infine concludiamo con un esempio che mostra come in qualche caso si possa scrivere la serie di potenze anche di una funzione di cui non si conosce l'espressione analitica. È il caso della funzione

$$G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt\,.$$

Sfruttando la convergenza uniforme sui compatti dello sviluppo della funzione esponenziale possiamo scrivere

$$\begin{aligned} G(x) \ &= \int_0^x e^{-t^2}\, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}\, dt = \\ &\overset{\text{C.U.}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{n!}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}\, \frac{1}{2n+1}\, x^{2n+1}\,. \end{aligned}$$

dove nel passaggio segnato con C.U. abbiamo sfruttato la convergenza uniforme della serie nell'intervallo $[0, x]$ o $[x, 0]$, a seconda del segno di x.
Si noti che $x \mapsto e^{-x^2}$ è una funzione pari, mentre la G risulta dispari.

4. Cenni alle funzioni di una variabile complessa

Una funzione di variabile complessa è semplicemente una funzione

$$f : D \to \mathbf{C}, \qquad D \subset \mathbf{C}\,.$$

Per noi D sarà sempre un insieme aperto. Analogamente a $\mathbf{R}^n$, dati $a \in C$ e $\rho > 0$ si definisce

$$B_\rho(a) = \big\{ z \in \mathbf{C} \,\big|\, |z - a| < \rho \big\}\,.$$

Si fissi $z_o \in D$. La funzione f si dirà continua in z_o se

$$\lim_{\substack{z \to z_o, \\ z \in D}} f(z) = f(z_o) \tag{21}$$

o equivalentemente se, preso $\epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$z \in B_\delta(z_o) \cap D, \qquad \Longrightarrow \qquad f(z) \in B_\epsilon\big(f(z_o)\big)\,.$$

La funzione f si dirà derivabile in z_o se il seguente limite esiste ed è un numero complesso

$$\lim_{\substack{z \to z_o, \\ z \in D}} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}\,. \tag{22}$$

In tal caso si scrive

$$\lim_{\substack{z \to z_o, \\ z \in D}} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} = f'(z_o).$$

La funzione f si dirà derivabile in $\Omega \subset D$ se è derivabile in ogni punto di Ω.
Si faccia attenzione al seguente fatto: scrivendo $z = x + iy$ e $z_o = x_o + iy_o$ ($x, y, x_o, y_o \in \mathbf{R}$), dire che $z \to z_o$ in D significa $|z - z_o| \to 0$, cioè

$$\big|x - x_o + i(y - y_o)\big| = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} \to 0\,.$$

Di conseguenza il limite in (22) è un limite nella variabile complessa z, ma può essere visto come un limite nelle due variabili reali x e y.

Regole di derivazione - È bene sapere (le verifiche sono analoghe al caso reale) che le regole di derivazione sono le stesse che per le funzioni reali: in particolare le formule per la derivazione della somma, del prodotto e della composizione di due funzioni sono le stesse che le funzioni reali e analogamente le derivate di tutte le (naturali estesioni) di funzioni elementari.
Esempio: la derivata di $f(z) = z^n$ è $g(z) = nz^{n-1}$ se $n \in \mathbf{N}$, ma anche $n \in \mathbf{Z}$ se si esclude dal dominio di f l'origine.

Definizioni di convergenza - Abbiamo già visto cosa significa, per una serie a termini complessi, convergere e convergere assolutamente. Si consideri ora una successione di funzioni complesse $(f_n)_n$, $f_n : D \to \mathbf{C}$, D aperto di $\mathbf{C}$. Diremo che la serie $\displaystyle\sum_n f_n$

- *converge puntualmente* ad una funzione f in $A \subset D$ se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) \qquad \text{converge a } f(z) \quad \text{per ogni } z \in A\,;$$

- *converge uniformemente* ad una funzione f in $A \subset D$, se

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{z \in A} \Big| \sum_{k=0}^{n} f_k(z) - f(x) \Big| = 0\,;$$

- *converge totalmente* in $A \subset I$ se la serie a termini reali

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{z\in A} |f_n(z)| \qquad \text{converge in } A.$$

Risultati di convergenza - Vale il criterio di Weierstrass anche per serie a termini complessi e la dimostrazione è analoga al caso reale già visto.

Teorema 4.1 (Criterio di Weierstrass)**.** *Data una serie* $\sum_n f_n$ *con* $(f_n)_n$ *successione di funzioni complesse definite in* $D \subset \mathbf{C}$*, si supponga che esista una successione* $(M_n)_n$ *di numeri reali tali che*

$$\sup_{z\in D} |f_n(z)| \leqslant M_n \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N} \qquad e \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} M_n < +\infty.$$

Allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ *converge totalmente e uniformemente in* D*.*

Definizione 4.2 (Funzione olomorfa)**.** *Una funzione complessa derivabile in* D *che abbia anche derivata continua in* D *è detta* olomorfa*.*

La definizione di derivata appena vista, che in apparenza è del tutto simile a quella per una funzione scalare di variabile reale, nasconde qualcosa di molto più profondo.
Infatti (cosa che non dimostriamo) se una funzione $f : D \to \mathbf{C}$ è olomorfa in D è infinitamente derivabile in D e inoltre vale il teorema che segue.

Definizione 4.3 (Funzione analitica complessa)**.** *Una funzione* $f : D \to \mathbf{C}$*,* D *sottoinsieme aperto di* $\mathbf{C}$*, è* analitica complessa in D *se per ogni* $z_o \in D$ *e per ogni* $B_\rho(z_o) \subset D$ *si ha che*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_o)}{n!} (z - z_o)^n \qquad z \in B_\rho(z_o)\,. \tag{23}$$

Teorema 4.4. *Una funzione* $f : D \to \mathbf{C}$ *olomorfa in* D*,* D *sottoinsieme aperto di* $\mathbf{C}$*, è analitica in* D*.*

Dimostrazione - Senza dimostrazione. □

Osservazione 4.5. - Si noti la differenza tra funzione analitica reale e analitica complessa, di seguito abbreviate con a.r. e a.c.. Date $f : I \to \mathbf{R}$, I

intervallo aperto di $\mathbf{R}$, e $g : D \to \mathbf{C}$, D aperto di $\mathbf{C}$,

$$
\begin{aligned}
f \text{ a.r. in } I \text{ se per ogni } x_o \in I \quad \underline{\text{esiste}}\ B_\rho(x_o) \subset I \text{ tale che}\\
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}\,(x - x_o)^n \qquad\quad x \in B_\rho(x_o),\\
g \text{ a.c. in } D \text{ se per ogni } z_o \in D \text{ e } \quad \underline{\text{per ogni}}\ B_\rho(z_o) \subset D \text{ si ha che}\\
g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_o)}{n!}\,(z - z_o)^n \qquad\quad z \in B_\rho(z_o)\,.
\end{aligned}
$$

Per comprendere la differenza vediamo il seguente esempio: siano

$$
f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in I = \mathbf{R}\,, \qquad\quad g(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad z \in D = \mathbf{C} \setminus \{i, -i\}.
$$

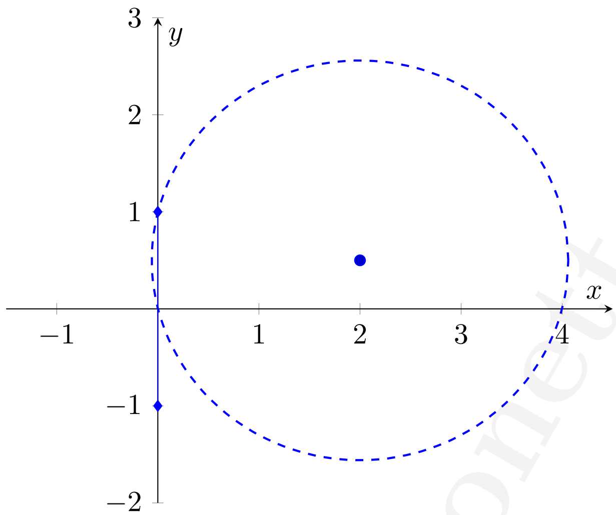
Le due funzione sono (sulla fiducia) f analitica reale in I e g analitica complessa in D. Questo significa che per ogni $x_o \in \mathbf{R}$ esiste un intorno aperto del punto x_o nel quale lo sviluppo di Taylor di f converge ad f in tale intorno. Ad esempio, scelto $x_o = 0$, abbiamo già visto che vale

$$
\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^{2n}, \qquad\quad \text{per } x \in (-1, 1) = B_1(0)\,.
$$

In questo caso non è vero che per ogni $\rho > 0$ lo sviluppo di f converge ad f in $B_\rho(0)$. In particolare lo sviluppo considerato non converge nel punto 1. Nonostante ciò nel punto $x_o = 1$ è possibile sviluppare f e tale sviluppo convergerà in un certo intorno di 1 (e così è vero per ogni altro punto di $\mathbf{R}$).
Analizziamo ora la funzione g: innanzitutto si osservi che il dominio D è il dominio massimale nel quale è possibile definire $(1 + z^2)^{-1}$, poiché per $z = i$ e $z = -i$ tale espressione non è definita.
In questo caso in ogni punto $z_o \in D$ lo sviluppo di g converge in $B_\rho(z_o)$ dove

$$
\rho = \min\{|z_o - i|, |z_o + i|\}\,,
$$

cioè ρ è la distanza tra z_o e il più vicino tra i e $-i$ a z_o. La figura che segue può aiutare a capire: i punti marcati con due diamanti rappresentano i e $-i$, mentre il centro della circonferenza tratteggiata è un punto z_o scelto arbitrariamente attorno al quale si considera lo sviluppo (23).

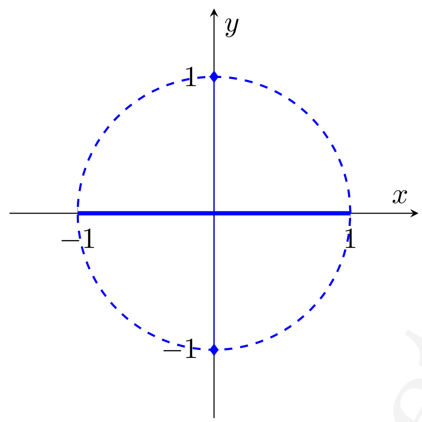


In questo caso, e in particolare nel caso illustrato in figura, poiché ogni serie di potenze converge in un disco e non converge al di fuori di tale disco, l'ostruzione del punto i, nel quale g non è definita, impedisce che lo sviluppo di g effettutato in z_o converga al di fuori del disco tratteggiato, ma convergerà all'interno di tale disco e, ovviamente, su tutti i dischi ad esso concentrici e di raggio minore.

Qual è la differenza tra il caso reale e quello complesso? Come mai lo sviluppo di f centrato in 0 converge solo in $(-1, 1)$ e non su tutto $\mathbf{R}$ visto che apparentemente non vi sono ostruzioni?
La risposta non si vede se si guarda solo il campo reale, bisogna guardare le cose nel campo complesso e guardare la funzione g: lo sviluppo in $z = 0$ della funzione g è

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}, \qquad \text{per } z \in B_1(0)\,,$$

(verificare che converge in $\{z \in \mathbf{C} \,\big|\, |z| < 1\}$ e non converge in $\{z \in \mathbf{C} \,\big|\, |z| > 1\}$). E non potrebbe essere diversamente, visto che in i e in $-i$ vi è una singolarità di g. Questa ostruzione si trasferisce in maniera naturale anche ad f e al suo sviluppo di Taylor, che altro non sono che le restrizioni rispettivamente di g e del suo sviluppo all'asse reale.
Nella figura che segue sono evidenziati il disco di convergenza (bordo a parte) della serie complessa e l'intersezione di tale disco con l'asse reale che è l'insieme di convergenza (bordo a parte) della serie reale.



Curiosità - Guardando lo sviluppo di Taylor in 0 della funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ nel campo reale, il quale ha raggio di convergenza 1, ci si potrebbe aspettare che spostando il centro dello sviluppo il raggio di convergenza diminuisca. Abbiamo capito dal fatto che la funzione $g(z) = \frac{1}{1+z^2}$ è analitica complessa che questo non è vero e, anzi, il raggio di convergenza di f (della funzione reale) in realtà aumenta se spostiamo il centro dello sviluppo da 0 ad un altro punto.
Mostriamo quello che dovrebbe essere lo sviluppo di $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ in un punto $x_o \in \mathbf{R}$ (il condizionale è d'obbligo, i termini sono stati valutati con un programma al calcolatore):

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\big((n+1)\vartheta\big)}{|x_o+i|^{n+1}} (x-x_o)^n \tag{24}$$

dove i rappresenta l'unità immaginaria e

$$\vartheta \in (0,\pi) \qquad \text{è quell'angolo per cui } x_o + i = |x_o+i| e^{i\vartheta}.$$

La quantità $|x_o+i| = |x_o-i|$ è un numero reale e rappresenta proprio la distanza del numero x_o dal numero $-i$ o da i nel piano complesso. Si osservi che per $x_o = 0$ si ha che $\vartheta = \pi/2$ e la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\big((n+1)\frac{\pi}{2}\big)}{|i|^{n+1}}\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}\,.$$

Il raggio di convergenza della serie (24) è dato dal reciproco di

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\big|\operatorname{sen}\big((n+1)\vartheta\big)\big|}{|x_o+i|^{n+1}}} = \frac{1}{|x_o+i|} \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\big|\operatorname{sen}\big((n+1)\vartheta\big)\big|}.$$

Una cosa non facile da vedere è che $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\big|\operatorname{sen}\big((n+1)\vartheta\big)\big|} = 1$ per ogni $\vartheta \in (0,\pi)$. Dando per buono questo fatto si deduce che il raggio di convergenza della serie in (24) è dato da

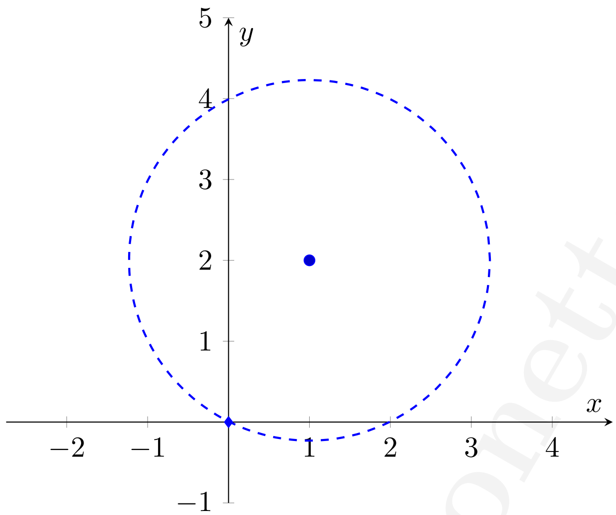
$$\rho = |x_o + i|.$$

Si osservi come questa quantità è minima (per x_o reale) proprio per $x_o = 0$, quindi lo sviluppo in 0 è quello che ha raggio di convergenza minore possibile fra tutti gli sviluppi di f.

Esercizio 4.6. - Si dica qual è il raggio di convergenza dello sviluppo nel punto $z_o \neq 0$ della funzione $g(z) = \frac{1}{z}$.
Dall'Esercizio 3.16 si ricava che lo sviluppo di g è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{z_o^{k+1}} (z-z_o)^k$$

che converge se $|z-z_o| < |z_o|$, cioè nella palla centrata in z_o di raggio $|z_o|$, come mostrato nella figura che segue.



Osservazione 4.7. - Si osservi che data una funzione $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, analitica complessa, allora la sua restrizione all'asse reale, non solo è analitica in $\mathbf{R}$, ma è sviluppabile in serie di Taylor in $\mathbf{R}$!

Osservazione 4.8. - Si osservi come la funzione $f \in C^\infty$ definita in (17) sia la restrizione all'asse reale di

$$g(z) = \begin{cases} e^{-1/z^2} & \text{se } z \neq 0, \\ 0 & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

La funzione g non è nemmeno continua nell'origine (e quindi men che meno olomorfa). Infatti scrivendo $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbf{R}$ e valutando i due limiti

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0,$$
$$\lim_{y\to 0} g(iy) = \lim_{y\to 0} e^{1/y^2} = +\infty$$

si ottengono due risultati diversi, per cui (21) non può valere. Conseguentemente g non può essere sviluppata in serie di potenze nell'origine.

EX - Predire il raggio di convergenza (in $\mathbf{R}$) dello sviluppo di Taylor in 0 della funzione reale

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a} \qquad \text{con } a \in \mathbf{R}, a > 0$$

senza fare i conti. Dopodiché calcolarsi lo sviluppo in 0 e studiare la serie di potenza così ottenuta.
Fare la stessa cosa con

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 8}$$

per quanto riguarda lo sviluppo di Taylor in $x = 2$.

5. Funzioni seno, coseno, esponenziale e logaritmo complessi

Veniamo ora alla definizione di alcune importanti funzioni complesse. Considerate le tre serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad z \in \mathbf{C},$$

si osservi che tutte hanno raggio di convergenza infinito. Ha quindi senso definire, per ogni $z \in \mathbf{C}$, la loro somma. Si definiscono

$$\begin{aligned} e^z = \exp(z) &:= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \\ \cos z &:= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \\ \operatorname{sen} z &:= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Quando $z \in \mathbf{R}$ si ritrovano gli sviluppi visti in $\mathbf{R}$ e le analoghe funzioni reali. La funzione esponenziale soddisfa le proprietà elencate nel seguente enunciato.

Teorema 5.1. *La funzione esponenziale appena definita soddisfa:*

i) $e^{z+w} = e^z e^w$ *per ogni* $z, w \in \mathbf{C}$*;*
ii) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ *per ogni* $z \in \mathbf{C}$*;*
iii) $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ *per ogni* $x \in \mathbf{R}$*.*

Dimostrazione - Vediamo il punto *i*). Poiché

$$e^z \cdot e^w = \left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\lim_{m\to+\infty} \sum_{h=0}^{m} \frac{w^h}{h!}\right),$$

fissiamo $m, n \in \mathbf{N}$, supponiamo che $m \geqslant n$ e valutiamo il prodotto:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{h=0}^{m} \frac{w^h}{h!}\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right)\left[\left(\sum_{h=0}^{n} \frac{w^h}{h!}\right) + \left(\sum_{h=n+1}^{m} \frac{w^h}{h!}\right)\right]. \tag{25}$$

Cominciamo a valutare il primo termine del prodotto a destra:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{h=0}^{n} \frac{w^h}{h!}\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{w^h}{h!} = \sum_{j=0}^{2n} \sum_{h+k=j} \frac{z^k}{k!}\frac{w^h}{h!} =$$

$$= \sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j} j!\frac{z^k}{k!}\frac{w^{j-k}}{(j-k)!} =$$

$$= \sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} z^k w^{j-k} = \sum_{j=0}^{2n} \frac{(z+w)^j}{j!}$$

Passando al limite nel secondo termine di (25) prima per $m \to +\infty$, poi per $n \to +\infty$, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{h=n+1}^{+\infty} \frac{w^h}{h!}\right) = 0.$$

A questo punto, passando al limite nel primo termine per $n \to +\infty$, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{2n} \frac{(z+w)^j}{j!} = e^{z+w}.$$

ii) Si noti che per l'Osservazione 3.2 del capitolo sulle serie numeriche si ha

$$\overline{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \lim_{n\to+\infty} \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}}$$

e quindi

$$\overline{e^z} = \lim_{n\to+\infty} \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z^k}}{k!} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!} = e^{\overline{z}}.$$

iii) Infine per $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$e^{ix} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!} = \lim_{n\to+\infty} \left[\sum_{2k\leqslant n} \frac{i^{2k}x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{2k+1\leqslant n} \frac{i^{2k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\sum_{2k\leqslant n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{2k+1\leqslant n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]$$

da cui la tesi. □

Ci poniamo ora la seguente domanda: la funzione esponenziale complessa è iniettiva (come accade per la corrispondente funzione reale)? Vediamo di fare un semplice calcolo: consideriamo $z, w \in \mathbf{C}$ e supponiamo che

$$z = x + iy, \quad w = s + it, \qquad \text{con } x, y, s, t \in \mathbf{R}.$$

Allora

$$e^z = e^w \quad \Longleftrightarrow \quad e^{x+iy} = e^{s+it} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{x-s} = e^{i(t-y)}.$$

Quest'uguaglianza è vera se e solo se

(26) $$e^{x-s} = \cos(t-y) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}(t-y) = 0.$$

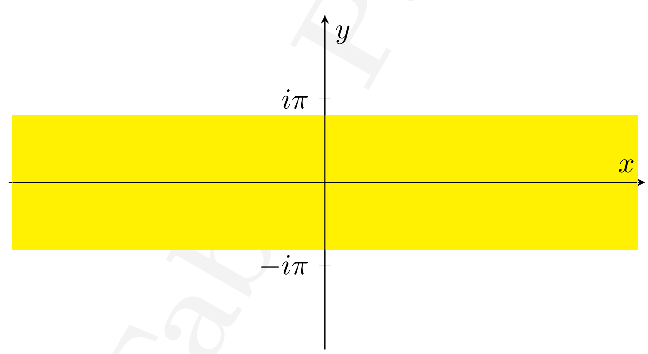
La seconda uguaglianza è vera se

$$t - y = k\pi \qquad \text{per qualche } k \in \mathbf{N}$$

e quindi y e t non necessariamente uguali. Poiché per tali scelte di t e y si ha $\cos(t-y) = (-1)^k$, la prima uguaglianza è vera se k è pari e $x = s$. A questo punto per avere l'iniettività dobbiamo limitare y e t ad un intervallo non chiuso di ampiezza 2π (ad esempio $[0, 2\pi)$) così necessariamente $y = t$.

Noi sceglieremo per comodità l'intervallo $(-\pi, \pi)$ escludendo entrambi gli estremi, cosa che sarà più chiara tra breve. Quindi nella striscia evidenziata nella figura che segue, insieme che chiameremo S, la funzione esponenziale è invertibile:

$$S := \big\{ z \in \mathbf{C} \,\big|\, z = a + ib,\ a \in \mathbf{R},\ -\pi < b < \pi \big\}.$$



Consideriamo ora il seguente insieme: la semiretta

$$\Sigma := \big\{ z \in \mathbf{C} \,\big|\, \operatorname{Im}(z) = 0, \operatorname{Re}(z) \leqslant 0 \big\} = \big\{ z \in \mathbf{C} \,\big|\, z = a, a \in \mathbf{R}, a \leqslant 0 \big\}.$$

Possiamo definire la funzione argomento, abbreviata con arg, nel modo seguente: per ogni $z \in \mathbf{C} \setminus \Sigma$ esiste un unico $\vartheta \in (-\pi, \pi)$ tale che

(27) $$z = \rho\, e^{i\vartheta}.$$

Si definisce

$$\arg : \mathbf{C} \setminus \Sigma \to (-\pi, \pi), \qquad \arg(z) = \vartheta \quad \text{se vale (27)}.$$

A questo punto, proprio usando la forma polare (27), si noti che possiamo scrivere

(28) $$z = |z|\, e^{i \arg(z)}\,.$$

Da questa scrittura si può vedere che la funzione complessa

$$f : S \to \mathbf{C} \setminus \Sigma, \qquad f(z) = e^z,$$

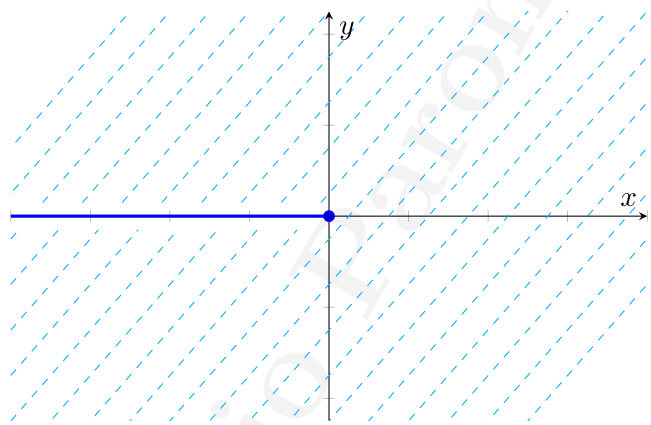
che abbiamo già visto essere iniettiva, risulta anche suriettiva. Infatti per ogni $z \in \mathbf{C} \setminus \Sigma$ è sufficiente considerare

$$w = \log|z| + i \arg(z) \in S$$

per avere che

$$e^w = e^{\log|z| + i \arg(z)} = |z|\, e^{i \arg(z)} = z.$$

Insieme $\mathbf{C} \setminus \Sigma$



Ora possiamo definire il logaritmo complesso come l'inversa della funzione complessa biiettiva

$$f : S \to \mathbf{C} \setminus \Sigma, \qquad f(z) = e^z.$$

Definiamo quindi f^{-1}, che chiameremo $\log_{\mathbf{C}}$, utilizzando la scrittura (28), come segue

$$\log_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \setminus \Sigma \to S, \qquad \log_{\mathbf{C}} z := \log|z| + i \arg(z).$$

Facciamo notare che la funzione esponenziale risulta iniettiva anche se si considera la striscia

$$\tilde{S} := \left\{ z \in \mathbf{C} \,\middle|\, z = a + ib,\ -\pi \leqslant b < \pi \right\}$$

e inoltre risulta suriettiva anche la funzione

$$\tilde{f} : \tilde{S} \to \mathbf{C} \setminus \{0\}, \qquad \tilde{f}(z) = e^z.$$

La scelta di considerare f anziché $\tilde{f}$ è dovuta essenzialmente alla volontà di ottenere come inversa, cioè il logaritmo definito sopra, una funzione continua.

Osservazione 5.2. - Si osservi che le funzioni seno, coseno, esponenziale e logaritmo complesse coincidono tutte con le rispettive funzioni reali quando l'argomento è reale.
In particolare il logaritmo complesso, che per scelta è definito in $\mathbf{C} \setminus \Sigma$, ristretto ai numeri reali risulta:

$\log_{\mathbf{C}}$ non definito per $x \in \mathbf{R}$, $x \leqslant 0$,

$\log_{\mathbf{C}}$ definito per $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$ e $\quad \underline{\log_{\mathbf{C}} x} := \log|x| + i\arg(x) = \underline{\log x}$.