

Topologia in $\mathbf{R}^n$

Cenni agli spazi metrici

ULTIMO AGGIORNAMENTO: 10 APRILE 2018

1. PRODOTTO SCALARE, NORMA, DISTANZA

Introduciamo in questo capitolo lo studio dello spazio ambiente a più dimensioni $\mathbf{R}^n$, anche se molte definizioni verranno date in un ambiente più generale. Se scriveremo “ $x \in \mathbf{R}^n$ ” intenderemo che $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ con $x_i \in \mathbf{R}$ per $i = 1, 2, \dots, n$. Vediamo ora cosa sono un *prodotto scalare*, una *norma*, una *distanza*.

Nel seguito V denota uno spazio vettoriale.

Un **prodotto scalare** è una funzione che denoteremo con $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definita in $V \times V$ e a valori reali, sinteticamente $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$, che soddisfa le seguenti proprietà per ogni $x, y, z \in V$, $\lambda \in \mathbf{R}$:

- (1) positività $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0$ sse x è il vettore nullo;
simmetria $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
linearità $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.

Una **norma** in V , che denoteremo con $\| \cdot \|$, è una funzione da V a $\mathbf{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà per ogni $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbf{R}$:

- (2) positività $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ sse x è il vettore nullo;
omogeneità $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
subadditività $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Vale anche la seguente proprietà, equivalente alla subadditività:

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \quad \text{per ogni } x, y \in V.$$

Per mostrare l'equivalenza supponiamo che per ogni $x, y \in V$ valga $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Consideriamo $\xi, \eta \in V$: scrivendo ξ come $(\xi - \eta) + \eta$ si ottiene

$$\|\xi\| = \|(\xi - \eta) + \eta\| \leq \|\xi - \eta\| + \|\eta\|$$

da cui

$$\|\xi\| - \|\eta\| \leq \|\xi - \eta\|.$$

Invertendo i ruoli di ξ ed η si ottiene anche che $\|\eta\| - \|\xi\| \leq \|(\xi - \eta)\|$, da cui la tesi. Viceversa, supponiamo che valga $|\|\xi\| - \|\eta\|| \leq \|(\xi - \eta)\|$ per ogni $\xi, \eta \in V$ e mostriamo che vale la subadditività. Consideriamo $x, y \in V$: si ha che, chiamando ξ il vettore $x + y$,

$$\|x + y\| \leq \|x + y - \eta\| + \|\eta\| \quad \text{per qualunque } \eta \in \mathbf{R}^n.$$

Scegliendo $\eta = y$ si conclude.

Una **distanza** è una funzione $d : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà per ogni $x, y, z \in V$:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\geq 0 \text{ e } d(x, y) = 0 \text{ se e solo se } x = y; && \text{(positività)} \\ (3) \quad d(x, y) &= d(y, x); && \text{(simmetria)} \\ d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y). && \text{(disuguaglianza triangolare)} \end{aligned}$$

Si osservi come da ogni prodotto scalare è possibile definire una norma nel modo seguente, che è detta norma indotta dal prodotto scalare: dato $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiamo

$$(4) \quad \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

EX - Si verifichi che l'oggetto così definito è effettivamente una norma.

Osservazione 1.1. - Attenzione! Non tutte le norme sono definite tramite un prodotto scalare. A tal proposito si veda l'Esempio 1.4.

Analogamente data una generica norma è possibile definire una distanza nel modo seguente:

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

EX - Si verifichi che l'oggetto così definito è effettivamente una distanza.

Osservazione 1.2. - Attenzione! Non tutte le distanze sono definite tramite una norma. Un esempio di distanza in $\mathbf{R}$ che non è indotta da una norma è $d(x, y) := \sqrt{|x - y|}$ (non è omogenea, non soddisfa cioè la proprietà di omogeneità).

EX - Dimostrare che $d(x, y) := \sqrt{|x - y|}$ è una distanza su $\mathbf{R}^n$ (suggerimento: usare il fatto che $|\cdot|$ lo è).

EX - Dimostrare che $\delta(x, y) := |x - y|^2$ non è una distanza su $\mathbf{R}^n$

(suggerimento: in $\mathbf{R}^2$ si considerino $x, y, \frac{x+y}{2}$).

In generale la funzione $\delta_p(x, y) := |x - y|^p$ non è una distanza se $p > 1$.

In $\mathbf{R}^n$, che è uno spazio vettoriale, considereremo implicitamente, se non diversamente specificato,

- la base euclidea $e_1, e_2, \dots, e_n$ dove $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ e 1 è all' i -esima posizione,
- il prodotto scalare tra $x, y \in \mathbf{R}^n$, che denoteremo con $x \cdot y$ oppure con il simbolo $\langle x, y \rangle$, definito come

$$(5) \quad x \cdot y := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

- la norma detta *modulo* o norma euclidea indotta da tale prodotto scalare e definita come

$$(6) \quad |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

- e la distanza indotta da tale norma definita da

$$(7) \quad d(x, y) := |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \quad x, y \in \mathbf{R}^n.$$

Si osservi come il modulo in $\mathbf{R}^n$ altro non sia che un'estensione del già noto modulo in dimensione 1. Infatti se si considera (6) con $n = 1$, cioè $|x|$ con $x \in \mathbf{R}$, si ottiene il modulo del numero reale x .

Disuguaglianza di Schwarz - Verifichiamo che, dati V spazio vettoriale, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ prodotto scalare su V e $\| \cdot \|$ norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (si veda (4)), si ha

$$(8) \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{per ogni } x, y \in V$$

e vale

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \quad \text{se e solo se } x = \alpha y \quad \text{per qualche } \alpha \in \mathbf{R}$$

oppure uno dei due vettori è il vettore nullo.

Infatti per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha che

$$(9) \quad p(t) = \langle tx + y, tx + y \rangle \geq 0.$$

Svolgendo il prodotto scalare si ottiene il polinomio di secondo grado

$$p(t) = \|x\|^2 t^2 + 2\langle x, y \rangle t + \|y\|^2$$

che, avendo al più una sola radice reale, avrà necessariamente discriminante Δ non positivo, cioè

$$p(t) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Per la seconda parte della tesi si osservi che se uno dei due vettori è nullo la cosa è ovvia. Diversamente

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p \text{ ha una sola radice.}$$

In particolare $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$ è equivalente all'esistenza di $t \in \mathbf{R}$ per cui (si veda (9)) $tx + y = 0$, cioè

$$y = -tx.$$

Esempio 1.3. - Verifichiamo che la norma euclidea, cioè la funzione

$$x \mapsto |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$$

è effettivamente una norma. Che sia positiva e simmetrica è immediato. Rimane da verificare la subaddittività. Per far ciò vediamo utilizziamo il fatto che $x \cdot y$ definito in (5) è un prodotto scalare, cosa di facile verifica. A questo punto dalla disuguaglianza di Schwarz si ha che

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot (x + y) + y \cdot (x + y) \leq \\ &\leq |x| |x + y| + |y| |x + y| = (|x| + |y|) |x + y| \end{aligned}$$

da cui si conclude. Si intuisce come sia immediato verificare, quando si ha uno spazio vettoriale munito di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, che la quantità $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ sia una norma. Infatti in tal caso

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle \leq \\ &\leq \|x\| \|x + y\| + \|y\| \|x + y\| = (\|x\| + \|y\|) \|x + y\|. \end{aligned}$$

EX - Si dimostri che, dati V spazio vettoriale, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ prodotto scalare su V e $\|\cdot\|$ norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (si veda (4)), si ha

$$\|x\| = \max_{\substack{y \in V, \\ \|y\| = 1}} \langle x, y \rangle.$$

Esempio 1.4. - Vediamo un esempio di norma diversa da quella standard di $\mathbf{R}^n$ vista prima. È sufficiente considerare $\mathbf{R}^2$ con la norma $(x = (x_1, x_2))$, che chiameremo $\|\cdot\|_a$ (il pedice a serve solo ad identificare questa specifica norma, non ha alcun significato particolare)

$$\|x\|_a := \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2}.$$

Questa norma è legata ad un prodotto scalare, come nella formula (4), diverso da quello standard, cioè a

$$\langle x, y \rangle_a := x_1 y_1 + 2x_2 y_2$$

e tramite questa norma possiamo definire la distanza

$$d_a(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + 2(x_2 - y_2)^2}$$

Ma possiamo costruire una norma che non è associata ad alcun prodotto scalare. Ad esempio, sempre su $\mathbf{R}^2$, la famiglia di norme al variare di $p \in [1, +\infty)$ con $p \neq 2$

$$\|x\|_p := (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$$

alle quali possiamo associare la famiglia di distanze

$$d_p(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p)^{1/p},$$

non sono associate (da credere sulla fiducia) ad alcun prodotto scalare.

Con $p = 2$ si ritrova la distanza cosiddetta euclidea e $\|\cdot\|_2 = |\cdot|$.

La stessa cosa, cioè non è associata a nessun prodotto scalare, vale per la norma

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

alle quale possiamo associare la distanza

$$d_\infty(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

EX - Per esercizio si verifichi che norme analoghe a quelle definite nell'Esempio 1.4 possono essere definite anche in $\mathbf{R}^n$ e soddisfano le proprietà elencate in (2).

EX - Si mostri che, dato $x \in \mathbf{R}^2$, vale $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Esercizio 1.5. - Si trovino e si disegnino gli insiemi di $\mathbf{R}^2$ che soddisfano ($x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$)

$$\begin{aligned} d(x, 0) = |x| \leq 1, & \quad d_a(x, 0) = \|x\|_a \leq 1, \\ d_p(x, 0) = \|x\|_p \leq 1, & \quad d_\infty(x, 0) = \|x\|_\infty \leq 1, \end{aligned}$$

dove tali distanze sono state definite nell'esempio precedente.

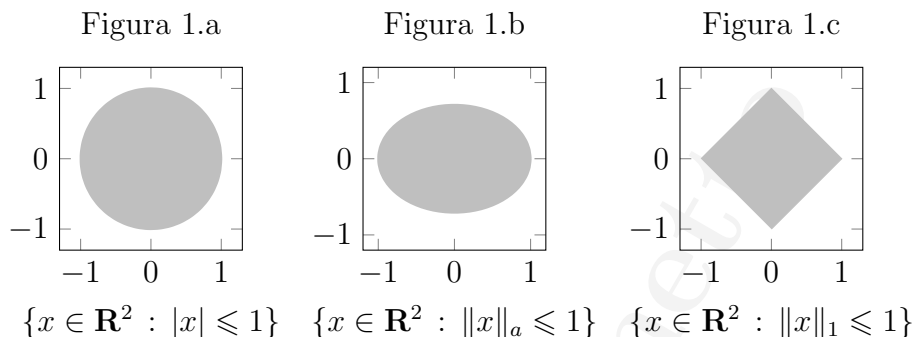
Il primo insieme è dato da dai punti di $\mathbf{R}^2$ che soddisfano

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

che rappresenta un cerchio di raggio 1. Il secondo insieme è dato da dai punti di $\mathbf{R}^2$ che soddisfano

$$\sqrt{x_1^2 + 2x_2^2} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1^2 + 2x_2^2 \leq 1.$$

che rappresenta un'ellisse. Alcuni esempi sono rappresentati nelle figure che seguono. Si veda anche la Figura 3 più in basso.



Esempio 1.6. - Alcuni esempi di spazi normati o metrici. Si verifichi per esercizio che lo sono.

1. $\mathbf{R}^n$ con la norma $|\cdot| = \|\cdot\|_2$ (si veda Esempio 1.4) è lo spazio dotato dell'usuale distanza, che chiameremo distanza euclidea.
2. $\mathbf{R}^n$ con la norma $\|\cdot\|_a$ o con una delle norme $\|\cdot\|_p$ definite nell'Esempio 1.4 (se $p = 2$ abbiamo l'usuale distanza).
3. L'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi con la norma $\|\cdot\|_2 = |\cdot|$.
4. L'insieme $C([a, b])$ delle funzioni continue dotato della norma

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

oppure lo stesso spazio dotato di una delle norme

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

sono esempi di spazi normati. Per chiarezza andrebbe specificato l'insieme, cioè andrebbe scritto $\|\cdot\|_{\infty, [a, b]}$ e $\|\cdot\|_{p, [a, b]}$, ma spesso quando è chiaro dal contesto l'insieme si omette per alleggerire la notazione.

Si osservi come la convergenza uniforme vista per successioni e serie di funzioni sia la convergenza rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$, cioè f_n converge uniformemente a f in $[a, b]$ equivale a dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty, [a, b]} = 0.$$

Si osservi che la norma $\|\cdot\|_\infty$ induce la distanza

$$d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

per cui $C([a, b])$ munito della distanza d_∞ è uno spazio metrico.

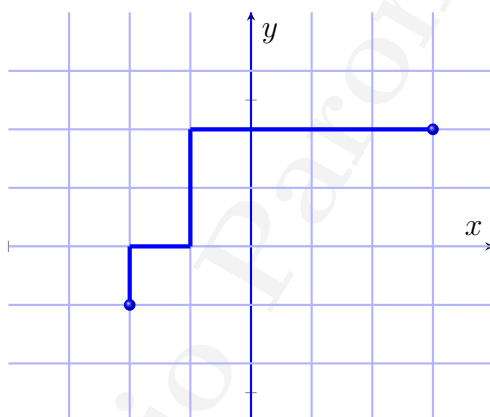
5. Come già osservato $\mathbf{R}$ munito della distanza $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ è uno spazio metrico non normato.

6. Un altro esempio di spazio metrico potrebbe essere il seguente: il reticolato mostrato in Figura 2 con la distanza

$$d_1(x, y) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

Si noti che fra due punti in questo caso ci sono molti percorsi che realizzano la distanza minima.

Figura 2



Se non esplicitamente detto, in $\mathbf{R}^n$ considereremo sempre la distanza euclidea.

2. SUCCESSIONI IN $\mathbf{R}^n$

Una successione in $\mathbf{R}^n$ è una funzione $x : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}^n$, dove per convenzione si denota l'elemento $x(h)$ con x_h ($h \in \mathbf{N}$) e solitamente anziché scrivere $x : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}^n$ si scrive $(x_h)_{h \in \mathbf{N}}$.

Definizione 2.1. Una successione $(x_h)_{h \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{R}^n$ si dice:

1. *limitata* se esiste $r > 0$ tale che $|x_h| < r$ per ogni $h \in \mathbf{N}$;
2. *convergente* ad un elemento $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$, e scriveremo

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} x_h = \bar{x},$$

se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $h_0 \in \mathbf{N}$ tale che $|x_h - \bar{x}| < \varepsilon$ per ogni $h \geq h_0$.

Osservazione 2.2. - Si osservi che per $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ si ha

$$(10) \quad |y_j| \leq |y| \leq \sqrt{n} \max_{i=1, \dots, n} |y_i| \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, n.$$

Quanto scritto sopra potrebbe essere riscritto come ($\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_2$ definite nell'Esercizio 1.4)

$$\|y\|_\infty \leq \|y\|_2 \leq \sqrt{n} \|y\|_\infty.$$

Due norme $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ in $\mathbf{R}^n$ (o entrambe definite in uno stesso spazio vettoriale V) si dicono equivalenti se esistono due costanti positive α, β tali che

$$\alpha \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta \|x\|_a \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}^n \quad (\text{o } x \in V).$$

Si mostri che le norme $\|\cdot\|_p$ con $p \in [1, +\infty]$ sono equivalenti tra loro in $\mathbf{R}^n$.

Osservazione 2.3. - L'osservazione precedente ha come conseguenza il seguente fatto: una successione

$$(x_h)_h \quad \text{è convergente a} \quad \bar{x}$$

$$\Updownarrow$$

$$(x_h^i)_h \quad \text{è convergente a} \quad \bar{x}^i \quad \text{per ogni } i \in \{1, \dots, n\}$$

dove, per evitare confusione, in questo caso denotiamo con y^i la i -esima componente di un punto $y \in \mathbf{R}^n$.

Infatti si supponga che $(x_h)_h$ sia convergente a $\bar{x}$, quindi, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $h_0 \in \mathbf{N}$ tale che $|x_h - \bar{x}| \leq \varepsilon$ per ogni $h \geq h_0$. Si ha

$$|x_h^i - \bar{x}^i| \leq |x_h - \bar{x}| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } i \in \{1, \dots, n\}$$

e quindi $(x_h^i)_h$ converge a $\bar{x}^i$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Viceversa si supponga che $(x_h^i)_h$ converga a $\bar{x}^i$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. Per ogni ε ed ogni $i = 1, \dots, n$ esiste $h_i \in \mathbf{N}$ tale che

$$|(x_h^i)_h - \bar{x}^i| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } h \geq h_i, i = 1 \dots n.$$

Chiamiamo h_0 il massimo fra $h_1, h_2, \dots, h_n$. Allora

$$|(x_h^i)_h - \bar{x}^i| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } h \geq h_0 \quad \text{per ogni } i = 1 \dots n.$$

A questo punto si ha

$$|x_h - \bar{x}| \leq \sqrt{n} \max_{i=1, \dots, n} |x_h^i - \bar{x}^i| \leq \sqrt{n} \varepsilon \quad \text{per ogni } h \geq h_0$$

il che conclude la dimostrazione.

A questo punto, ragionando componente per componente, molti fatti visti per le successioni a valori reali valgono anche per successioni a valori in $\mathbf{R}^n$. Vediamone alcuni:

1. una successione $(x_h)_{h \in \mathbf{N}}$ è limitata se e solo se lo sono le sue componenti;
2. se una successione è convergente allora è limitata;
3. il limite di una successione $(x_h)_h$ è unico;
4. se $(x_h)_h$ converge a x e $(y_h)_h$ converge a y allora $(x_h + y_h)_h$ converge a $x + y$;
5. se $(x_h)_h$ converge a x allora $(\lambda x_h)_h$ converge a λx per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$.

In particolare vale anche il seguente risultato, analogo al caso unidimensionale.

Teorema 2.4. *Ogni successione di Cauchy in $\mathbf{R}^n$ ammette limite in $\mathbf{R}^n$.*

Dimostrazione - Ragionare componente per componente. □

Esempio 2.5. - Consideriamo le seguenti successioni in $\mathbf{R}^2$:

(1) se definiamo

$$x_h = \left(\frac{1}{h}, \frac{h+1}{h} \right),$$

dato che la prima componente, $\frac{1}{h}$, converge a 0 e la seconda, $\frac{h+1}{h}$, converge ad 1, si avrà che la successione converge al punto $(0, 1) \in \mathbf{R}^2$;

(2) se definiamo

$$x_h = \left((-1)^h, \frac{1}{h} \right)$$

non converge in quanto la successione delle prime componenti, $(-1)^h$, non converge.

Analogamente la definizione di successione estratta sarà data in modo analogo alla definizione di successione estratta in $\mathbf{R}$, e cioè tramite una funzione $k : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ crescente, da cui la successione estratta $(x_{h_k})_{h \in \mathbf{N}}$ è data da $x_{h_k} = x_{k(h)}$.

3. TOPOLOGIA IN $\mathbf{R}^n$

Cominciamo ora a definire alcuni insiemi ed alcune proprietà degli insiemi che ci saranno utili nel seguito.

Definizione 3.1 (Intorno sferico). *Si chiamano intorno sferico aperto ed intorno sferico chiuso del punto $x_o \in \mathbf{R}$ di raggio $r > 0$ oppure palla*

aperta, o palla chiusa, di centro x_o e raggio r gli insiemi

$$B_r(x_o) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid d(x, x_o) < r\}, \quad \bar{B}_r(x_o) = \{x \in \mathbf{R}^n : d(x, x_o) \leq r\}$$

mentre viene detta sfera di centro x_o e raggio $r > 0$ l'insieme

$$S_r(x_o) = \{x \in \mathbf{R}^n : d(x, x_o) = r\}.$$

Si noti che $\bar{B}_r(x) = B_r(x) \cup S_r(x)$. Spesso, se chiaro dal contesto, scriveremo solamente B_r , $\bar{B}_r$ e S_r e diremo semplicemente “intorno” o “palla”, oppure “intorno aperto” o “palla aperta”, per intorno sferico aperto, “intorno chiuso” o “palla chiusa” per intorno sferico chiuso.

Definizione 3.2 (Insieme aperto e chiuso). *Un insieme $A \subset \mathbf{R}^n$ è aperto se per ogni $x_o \in A$ esiste un intorno aperto di centro x_o contenuto in A , cioè esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_o) \subset A$.*

Un insieme $A \subset \mathbf{R}^n$ è chiuso se il complementare di A , che si denota con A^c , è aperto, dove con complementare di un insieme A indichiamo l'insieme

$$A^c := \mathbf{R}^n \setminus A = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x \notin A\}.$$

Definizione 3.3. *Dato $E \subset \mathbf{R}^n$ e $x \in \mathbf{R}^n$, si dice che:*

1. x è punto interno ad E se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset E$;
2. x si dice esterno ad E se x è interno ad E^c , cioè se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \cap E = \emptyset$.

Un punto x che non è né interno né esterno si dice punto di bordo o di frontiera. Denoteremo con:

3. $\overset{\circ}{E}$ l'insieme dei punti interni ad E ;
4. ∂E l'insieme dei punti di frontiera di E ;
5. $\bar{E} = E \cup \partial E$ la chiusura di E .

Osservazione 3.4. - Dato un qualunque insieme E si ha che $\overset{\circ}{E}$ è sempre un insieme aperto ed è il più grande insieme aperto contenuto in E ; $\bar{E}$ è sempre un insieme chiuso ed è il più piccolo insieme chiuso che contiene E .

Osservazione 3.5. - Per ogni $E \subset \mathbf{R}^n$ si ha $\overset{\circ}{E} \subset E \subset \bar{E}$. Da ciò si deduce anche che la chiusura di E può essere definita anche come $\bar{E} = \overset{\circ}{E} \cup \partial E$.

Osservazione 3.6. - Dato un punto $x_o \in \partial E$ si ha che ogni palla $B_r(x_o)$ soddisfa

$$B_r(x_o) \cap E \neq \emptyset \quad \text{e} \quad B_r(x_o) \cap E^c \neq \emptyset.$$

Teorema 3.7. Sia $E \subset \mathbf{R}^n$. Allora

- E è aperto se e solo se $E = \overset{\circ}{E}$;
- E è chiuso se $\bar{E} = E$.

Dimostrazione - Senza dimostrazione. □

Teorema 3.8. Un insieme C è chiuso se e solo se ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset C$, $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ di Cauchy, converge ad un elemento di C .

Dimostrazione - Sia C chiuso e sia $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una successione di Cauchy. Allora $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge a $x \in \mathbf{R}^n$. Se x non appartenesse a C allora x apparterebbe al suo complementare C^c , che è aperto. Di conseguenza esisterebbe $B_r(x) \subset C^c$ e quindi $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ non potrebbe convergere a x . Viceversa, supponiamo che ogni successione di Cauchy contenuta in C converga ad un elemento di $x \in C$ e mostriamo che C è chiuso. Consideriamo $y \in \bar{C}$, cioè $y \in \overset{\circ}{C}$ oppure $y \in \partial C$. In entrambi i casi per ogni n esiste $x_n \in C$ tale che

$$|y - x_n| < \frac{1}{n}.$$

Allora $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ è una successione di Cauchy contenuta in C e per ipotesi converge ad un elemento di C . Concludiamo che $y \in C$, e poiché y era stato scelto in $\bar{C}$ ed in maniera arbitraria si conclude che $\bar{C} = C$. □

Definizione 3.9 (punto di accumulazione - punto isolato). Dato un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$, diremo che un punto $x_0 \in \mathbf{R}^n$ è di accumulazione per E se

$$\text{per ogni } r > 0 \quad B_r(x_0) \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset;$$

diremo che $x_0 \in E$ è un punto isolato se

$$\text{esiste } r > 0 \text{ tale che} \quad B_r(x_0) \cap E = \{x_0\}.$$

Si osservi che se x_0 è un punto isolato dell'insieme E si ha che per un certo raggio r

$$B_r(x_0) \cap (E \setminus \{x_0\}) = \emptyset,$$

cioè x_0 è l'unico punto dell'intersezione tra $B_r(x_0)$ ed E . Se invece x_0 è di accumulazione si ha che per ogni $r > 0$ l'insieme $B_r(x_0) \cap (E \setminus \{x_0\})$

non è vuoto. Poiché prima di intersecare con la palla $B_r(x_0)$ priviamo l'insieme E del punto x_0 un punto di accumulazione può appartenere o meno all'insieme E . D'altra parte ci sono anche punti che appartengono ad un insieme, ma che non sono punti di accumulazione (quelli isolati).

Osservazione 3.10. - Si fissi un punto $x_o \in \mathbf{R}^n$ ed un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$:
 - se x_o è isolato per E allora $x_o \in \partial E$;
 - se $x_o \in \partial E$, ma x_o non è isolato per E , allora x_o è di accumulazione per E ;
 - se x_o è di accumulazione per E allora $x_o \in \overset{\circ}{E}$ oppure $x_o \in \partial E$, ma non è isolato per E .

Esempio 3.11. - Consideriamo l'insieme $E = (0, 1] \cup \{2\}$. L'insieme dei punti di accumulazione di E è $[0, 1]$, e si noti che $0 \notin E$; 2 è un punto isolato di E e non è di accumulazione per E .

Definizione 3.12 (Insiemi limitati e insiemi compatti). *Diremo che un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$ è limitato se esiste $r > 0$ tale che $E \subset B_r(0)$, o equivalentemente se esiste $r > 0$ tale che $|x| < r$ per ogni $x \in E$.*

Un insieme $K \subset \mathbf{R}^n$ viene detto compatto se è chiuso e limitato.

Un insieme $K \subset \mathbf{R}^n$ è compatto per successioni se da ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset K$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbf{N}}$ convergente ad un elemento $x \in K$.

Teorema 3.13 (Heine-Borel). *Un insieme $K \subset \mathbf{R}^n$ è compatto se e solo se è compatto per successioni.*

Dimostrazione - Dimostrazione analoga a quella in dimensione 1 (si ragiona componente per componente). $\square$

Proposizione 3.14. *Un punto $x \in \mathbf{R}^n$ è un punto di accumulazione per $E \subset \mathbf{R}^n$ se e solo se esiste una successione $(x_h)_{h \in \mathbf{N}} \subset E$ con $x_h \neq x$ per ogni $h \in \mathbf{N}$ e tale che x_h converge a x .*

Attenzione! Non ci sono solamente insiemi aperti o chiusi, ci sono insiemi che non sono né aperti né chiusi (come mostrato in qualcuno degli esempi che seguono).

Esempio 3.15. - Vediamo alcuni esempi.

1. Se fissiamo $a, b \in \mathbf{R}$ con $a < b$, allora (a, b) è aperto, $[a, b]$ è chiuso, $(a, b]$ e $[a, b)$ non sono né aperti né chiusi; in tutti i casi l'insieme dei punti di frontiera è dato da $\{a, b\}$; in tutti i casi la parte interna è data da (a, b) ; in tutti i casi la chiusura è data da $[a, b]$;

2. $E = \mathbf{R}^n$ è aperto, così come $E^c = \emptyset$ è aperto. Si osservi che $\partial E = \emptyset$. Quindi $\mathbf{R}^n$ è sia aperto che chiuso; questo è l'unico insieme di $\mathbf{R}^n$ con tale proprietà.
3. $E = \mathbf{Q}$ visto come sottoinsieme di $\mathbf{R}$: abbiamo che $\overset{\circ}{E} = \emptyset$, $\bar{E} = \partial E = \mathbf{R}$; quindi $\mathbf{Q}$ non è né aperto né chiuso.
4. Sia $E = B_r(x)$ oppure $E = \bar{B}_r(x)$: in entrambi i casi si ha che $\overset{\circ}{E} = B_r(x)$, $\bar{E} = \bar{B}_r(x)$ e $\partial E = S_r(x)$.
5. Gli insiemi in Figura 1 sono tutti chiusi e hanno come frontiera rispettivamente gli insiemi $\{x \in \mathbf{R}^2 : |x| = 1\}$, $\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_a = 1\}$, $\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_p = 1\}$ con $p \in [1, +\infty]$, che sono le curve blu evidenziate in Figura 3.
Gli insiemi (dove la disuguaglianza è stretta!) $\{x \in \mathbf{R}^2 : |x| < 1\}$, $\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_a < 1\}$, $\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_p < 1\}$ con $p \in [1, +\infty]$ sono aperti.
6. Si consideri l'insieme

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x \in [2, 5]\}$$

cioè un intervallo di $\mathbf{R}$. Di questo sappiamo che la parte interna è $(2, 5)$, che la frontiera è $\{2, 5\}$, la chiusura $[2, 5]$ (si veda l'esempio al punto 1.). Consideriamo il segmento, evidenziato in Figura 4.a

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in [2, 5], y = 0\}.$$

Apparentemente è lo stesso segmento di prima, ma questa volta è visto come sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$. Tale insieme ha come parte interna l'insieme vuoto $\emptyset$, come frontiera esattamente l'insieme S e come chiusura ancora S ed è un insieme chiuso. L'insieme

$$T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in (2, 5), y = 0\}$$

non è né aperto né chiuso.

7. In generale, data una funzione $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ continua (vedremo la definizione di continuità più avanti) ed una costante $c \in \mathbf{R}$ gli insiemi

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) > c\} \quad \text{e} \quad \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) < c\}$$

sono aperti, mentre gli insiemi

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) \geq c\} \quad \text{e} \quad \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) \leq c\}$$

sono chiusi. Ad esempio, gli insiemi al punto 5. nei quali f è una delle norme. Altro esempio, data $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ si consideri

la funzione $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x, y) = y - f(x)$; allora gli insiemi

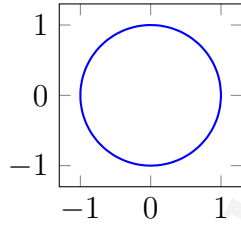
$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid g(x, y) \leq 0\} &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \leq f(x)\}, \\ \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid g(x, y) \geq 0\} &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq f(x)\}, \end{aligned}$$

rispettivamente sottografico e sopragrafico di f , sono chiusi.

Analogamente i corrispondenti insiemi con le disuguaglianze strette sono aperti.

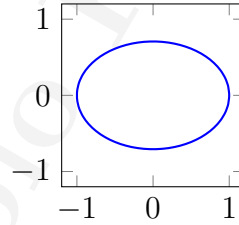
8. L'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y < 0\}$ (in Figura 4.b è la parte tratteggiata di cerchio che sta anche nel sopragrafico della parabola) non è né aperto né chiuso, perché la frontiera non è tutta contenuta in E (e questo fa sì che non sia chiuso), ma lo è in parte (e questo fa sì che non sia aperto).
9. L'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y = 0\}$ mostrato in Figura 5 è chiuso.

Figura 3.a



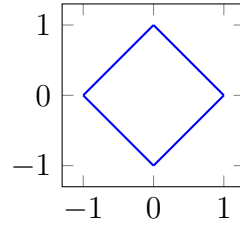
$$\{x \in \mathbf{R}^2 : |x| = 1\}$$

Figura 3.b



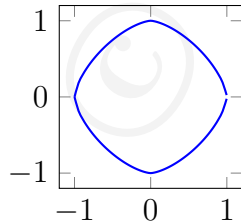
$$\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_a = 1\}$$

Figura 3.c



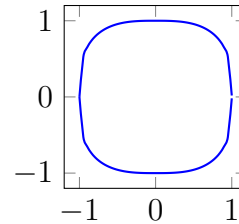
$$\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_1 = 1\}$$

Figura 3.d - $p < 2$



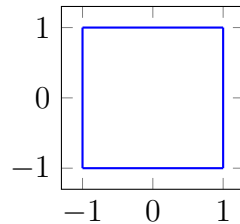
$$\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_p = 1\}$$

Figura 3.e - $p > 2$



$$\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_p = 1\}$$

Figura 3.f



$$\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_\infty = 1\}$$

Figura 4.a

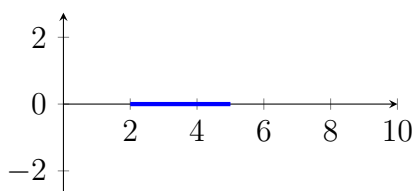


Figura 4.b

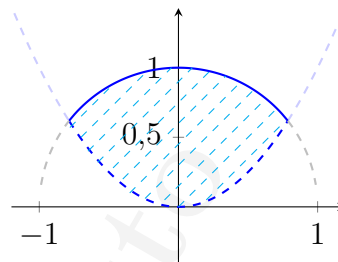
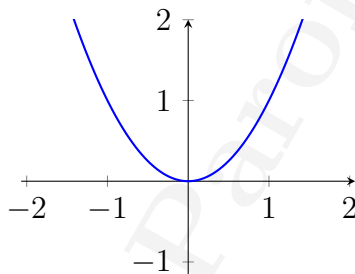


Figura 5



Osservazione 3.16. - Si osservi che se f non è continua (anche se non abbiamo ancora visto la definizione) non vale quanto detto nell'Esempio 3.15.7. Ad esempio, presa la funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x) = 0$ per $x < 0$ e $f(x) = 1$ per $x \geq 0$ si ha che

$$D = \{x \in \mathbf{R}^n \mid y \geq f(x)\} \quad \text{non è chiuso,}$$

$$B = \{x \in \mathbf{R}^n \mid y < f(x)\} \quad \text{non è aperto.}$$

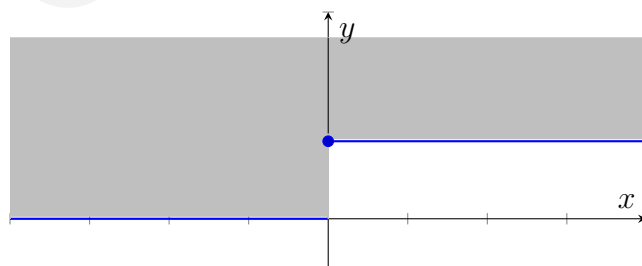
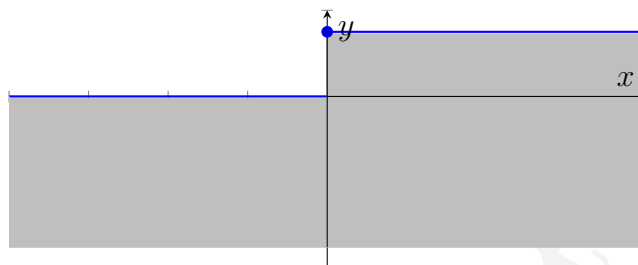
Figura 6.a - Insieme D 

Figura 6.b - Insieme B 

Nella seguente proposizioni sono elencate le principali proprietà degli aperti e dei chiusi sotto le operazioni di unione e intersezione.

Proposizione 3.17. *Supponiamo di avere due famiglie, una $\mathcal{A}$ fatta di insiemi aperti e una $\mathcal{C}$ fatta di insiemi chiusi. Allora*

1. *l'insieme*

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x \in A \text{ per qualche } A \in \mathcal{A}\} \quad \text{è aperto,}$$

l'insieme

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x \in C \text{ per ogni } C \in \mathcal{C}\} \quad \text{è chiuso;}$$

2. *dato un numero finito di insiemi $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ e $C_1, \dots, C_m \in \mathcal{C}$, l'insieme*

$$A_1 \cap \dots \cap A_k \quad \text{è aperto,}$$

l'insieme

$$C_1 \cup \dots \cup C_m \quad \text{è chiuso.}$$

Dimostrazione - Senza dimostrazione. □

Esempio 3.18. - Si osservi che l'intersezione arbitraria di insiemi aperti non è in genere aperta; si considerino, ad esempio, gli insiemi aperti

$$A_n = (-1/n, 1/n) \subset \mathbf{R}.$$

Si ha che

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} A_n = \{0\}$$

e quest'ultimo è un insieme chiuso.

Analogamente l'unione arbitraria di insiemi chiusi non è in genere chiusa; si considerino, ad esempio, gli insiemi chiusi

$$C_n = [-1 + 1/n, 1 - 1/n] \subset \mathbf{R}.$$

Si ha che

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} C_n = (-1, 1)$$

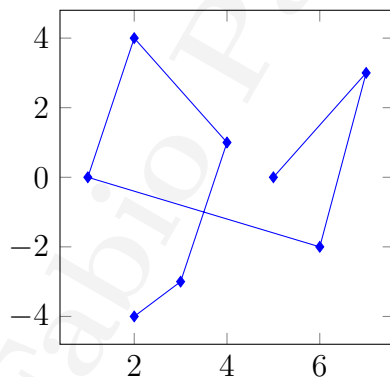
e quest'ultimo è un insieme aperto.

Segmento e poligonale - Dati due punti $x, y \in \mathbf{R}^n$ si dice segmento, e si denota con $[x, y]$, l'insieme

$$[x, y] = \{z \in \mathbf{R}^n \mid z = (1 - t)x + ty, t \in [0, 1]\}.$$

Dati k punti (ordinati) $x_0, x_1, \dots, x_k$ in $\mathbf{R}^n$ chiamiamo poligonale l'unione (ordinata) dei segmenti $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, k$ e la denoteremo con $P(x_0, x_1, \dots, x_k)$. Ad esempio, dati i punti nel piano $x_0 = (2, -4)$, $x_1 = (3, -3)$, $x_2 = (4, 1)$, $x_3 = (2, 4)$, $x_4 = (1, 0)$, $x_5 = (6, -2)$, $x_6 = (7, 3)$, $x_7 = (5, 0)$, la poligonale che unisce, nell'ordine, $x_0, x_1, \dots, x_7$ è la curva il cui sostegno è nella figura che segue.

Figura 7 - Esempio di poligonale



Insieme connesso per poligonalità - Diremo che un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$ è *connesso per poligonalità* se per ogni coppia di punti $x, y \in E$ esiste una poligonale di vertici $x_0, x_1, \dots, x_k$ dove $x_0 = x$, $x_k = y$, tutta contenuta in E .

Se un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$ è connesso per poligonalità ed è aperto diremo semplicemente che è *connesso*. Si può dimostrare che ogni aperto di $\mathbf{R}^n$ può essere scritto come unione, disgiunta, di aperti connessi. Ciascuno di questi aperti viene detto componente connessa. Chiaramente se E è aperto e connesso ha una sola componente connessa.

Si osservi che per essere connesso per poligonalità non è necessario che un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$ sia aperto. Ad esempio $\{x \in \mathbf{R}^n : |x|^2 \leq 1\}$ è chiuso e connesso per poligonalità.

Insieme convesso - Diciamo che un insieme E è *convesso* se per ogni coppia di punti $x, y \in E$ il segmento $[x, y]$ è contenuto in E .

Insieme stellato - Diciamo che un insieme E è *stellato rispetto ad un punto* $x_0 \in E$ se per ogni punto $x \in E$ il segmento $[x_0, x]$ è contenuto in E .

Ovviamente un insieme stellato è anche connesso per poligionali.

Esempio 3.19. - Gli insiemi in Figura 1 sono insiemi connessi, convessi e stellati.

L'insieme in Figura 8.a è connesso, stellato, ma non convesso.

L'insieme in Figura 8.b non è connesso (ha due componenti connesse).

Figura 8.a

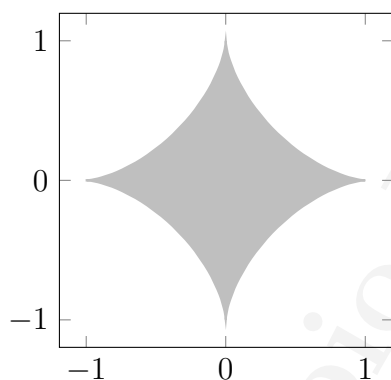
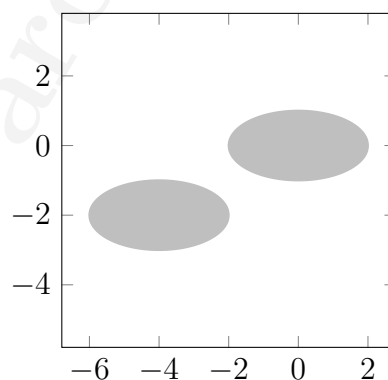


Figura 8.b



4. LIMITI

Veniamo ora allo studio delle funzioni di più variabili, e più precisamente alla definizione di limite e continuità per funzioni di più variabili.

Definizione 4.1. Data una funzione $f : E \rightarrow \mathbf{R}^k$ con $E \subset \mathbf{R}^n$ e x_0 punto di accumulazione per E , diremo che $f(x)$ tende ad un vettore $l \in \mathbf{R}^k$ per x che tende ad x_0 , in simboli

$$(11) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x) = \lim_{\substack{|x - x_0| \rightarrow 0 \\ x \in E}} f(x) = l \in \mathbf{R}^k$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in E$ è tale che $0 < |x - x_0| < \delta$, allora $|f(x) - l| < \varepsilon$; equivalentemente

$$x \in E \cap B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \implies f(x) \in B_\varepsilon(l).$$

Diremo inoltre, nel caso in cui f è a valori scalari (e non vettoriali!) che

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x) = +\infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in E$ soddisfa $0 < |x - x_0| < \delta$, allora $f(x) > M$.

In maniera analoga si definisce il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Come nel caso di limiti per successioni, anche in questo caso avremo che la validità di (11) è equivalente a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_j(x) = l_j \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, n.$$

Poiché il calcolo dei limiti di funzioni vettoriali si riduce a fare il calcolo componente per componente, anche gli enunciati spesso possono essere ridotti al caso di funzioni a valori scalari e non vettoriali.

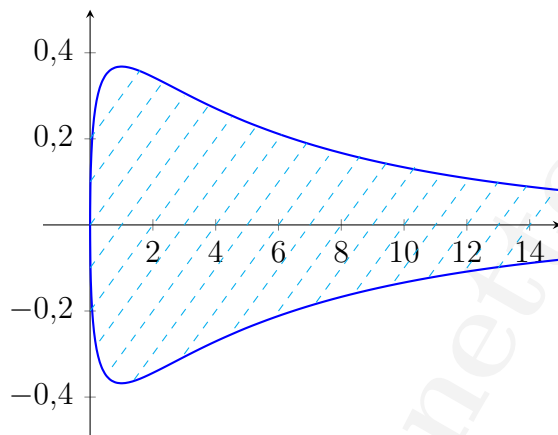
Possiamo definire il limite anche per x che “va all’infinito”, nel caso l’insieme sia illimitato. Se $f : E \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, E illimitato (come ad esempio in Figura 9), possiamo definire

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow +\infty \\ x \in E}} f(x) = l \in \mathbf{R}$$

dicendo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che

$$\text{se } |x| > N \text{ e } x \in E \quad \text{allora} \quad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Figura 9



Ciò significa che se $x \notin \bar{B}_N(0)$, ma $x \in E$, allora $f(x) \in B_\varepsilon(l)$.

Vale la seguente utile proposizione, che riduce lo studio dei limiti allo studio di limiti di successioni.

Proposizione 4.2. *Data $f : E \rightarrow \mathbf{R}^k$ e x_0 punto di accumulazione per E , abbiamo che*

$$(12) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x) = l$$

se e solo se per ogni successione $(x_h)_{h \in \mathbf{N}}$ convergente a x_0 , la successione $f(x_h)_{h \in \mathbf{N}}$ converge ad l , cioè

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} f(x_h) = l.$$

Come visto per le successioni, anche per il limite di funzioni valgono le seguenti proprietà;

1. $f(x) \rightarrow l \in \mathbf{R}^k$ se e solo se per ogni $j = 1, \dots, k$ si ha che $f_j(x) \rightarrow l_j$;
2. se $f(x) \rightarrow l$ e $g(x) \rightarrow l'$, allora $f(x) + g(x) \rightarrow l + l'$ (a meno di forme indeterminate);
3. se $f(x) \rightarrow l$ e $\lambda \in \mathbf{R}$, allora $\lambda f(x) \rightarrow \lambda l$.

Analogamente al caso unidimensionale si definiscono estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo per funzioni $f : E \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ (attenzione! solo per funzioni f a valori scalari e non vettoriali).

5. SPAZI METRICI E TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

In questo paragrafo accenniamo a qualche risultato in un ambiente più generale di $\mathbf{R}^n$, un generico spazio dotato di una distanza (definita in (3)).

Definizione 5.1 (Spazio metrico). *Uno spazio metrico è una coppia (X, d) , X è un insieme e $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ è una distanza.*

Si sono già visti alcuni esempi di spazio metrico nell'Esempio 1.6.

Definizione 5.2 (Spazio metrico completo). *Uno spazio metrico (X, d) , X si dice completo se ogni successione di Cauchy è convergente in X .*

Una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ in (X, d) è di Cauchy se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \quad \text{per ogni } n, m \geq \nu.$$

Si osservi che non sempre le successioni di Cauchy in uno spazio (X, d) sono convergenti (ad un elemento dello spazio dello X).

Esempio 5.3. -

1. L'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali munito della distanza euclidea è uno spazio metrico completo.

2. L'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali munito della distanza euclidea è uno spazio metrico, ma non è completo.

Esempio: la successione $\{q_n\}_n$ definita da $q_n = (1 + n^{-1})^n$ è tale che $q_n \in \mathbf{Q}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, ma $q_n \rightarrow e \notin \mathbf{Q}$, cioè il limite “cade” al di fuori dell'insieme $\mathbf{Q}$.

In generale, dato un qualunque numero irrazionale x è possibile trovare una successione di razionali $\{q_n\}_n$ convergente a x in $\mathbf{R}$.

3. L'insieme $X = C^0([0, 1])$ munito della distanza

$$d_1(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

è uno spazio metrico non completo.

Infatti si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = x^n$ (definite in $[0, 1]$). Si supponga, senza perdita di generalità, che $m > n$. Si ha allora che

$$|f_n(x) - f_m(x)| = x^n |1 - x^{m-n}| \leq x^n,$$

da cui, per ogni $m \geq n$, si ha che

$$d_1(f_n, f_m) := \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

e quindi chiaramente $\{f_n\}_n$ è di Cauchy in (X, d_1) , ma il limite delle f_n è una funzione discontinua: in conclusione $(f_n)_n$ non converge in X .

EX - Si mostri che lo spazio $C^0([0, 1])$ non è uno spazio metrico completo se munito di una delle distanze

$$d_p(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx, \quad p \in [1, +\infty).$$

Date due funzioni $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, continue, ricordiamo la distanza introdotta nell'Esempio 1.6.4

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|.$$

Proposizione 5.4. *L'insieme $X = C^0([0, 1])$ munito della distanza d_∞ è uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione - Si consideri una successione $\{f_n\}_n$ che sia di Cauchy in X rispetto alla distanza d_∞ ; quindi per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbf{N}$ per il quale

$$(13) \quad \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \quad \text{per ogni } n, m \geq \nu.$$

Ciò implica che, per ogni $x \in [0, 1]$ fissato, la successione $\{f_n(x)\}_n$ è di Cauchy in $\mathbf{R}$, e quindi esiste un limite puntuale di f_n che chiameremo f . A questo punto fissato x arbitrario da (13) si ha che

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \quad \text{per ogni } n, m \geq \nu$$

e passando al limite, per $m \rightarrow +\infty$, si ottiene

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad \text{per ogni } n \geq \nu.$$

Poiché ciò è indipendente dalla scelta di x otteniamo che l'ultima disuguaglianza vale per ogni $x \in [0, 1]$, cioè

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad \text{per ogni } n \geq \nu.$$

Questo è equivalente a dire che

$$(f_n)_n \text{ converge uniformemente a } f \text{ in } [0, 1]$$

e da quanto visto riguardo la convergenza uniforme di funzioni continue, si conclude che $f \in C^0([0, 1])$. $\square$

EX - Lo spazio $X = C^0((0, 1))$ dotato della distanza d_∞ è uno spazio metrico completo?

EX - Sia $X = C^1([0, 1])$ lo spazio delle funzioni continue e derivabili in $[0, 1]$ con derivata continua in $[0, 1]$.

Si dimostri che X munito della distanza

$$d(f, g) := d_\infty(f, g) + d_\infty(f', g')$$

è uno spazio metrico completo.

In uno spazio metrico è possibile definire una nozione di limite e di continuità di una funzione in maniera analoga a quella definita in $\mathbf{R}^n$.

Limite di una successione - Data una successione $\{x_n\}_n \subset X$, (X, d) spazio metrico, diciamo che $\{x_n\}_n$ ha limite $\bar{x} \in X$ se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, \bar{x}) = 0.$$

Limite in un punto per una funzione - Data una funzione $F : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$, X e Y spazi metrici, diciamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_o} F(x) = y_o \in Y$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\text{per ogni } x \in X, 0 < d_X(x, x_o) < \delta \implies d_Y(F(x), y_o) < \epsilon.$$

Continuità in un punto per una funzione - Diciamo che F è continua in $x_o \in X$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_o} F(x) = F(x_o).$$

Esempi - Due casi importanti nei quali considereremo funzioni continue sono i seguenti: $X = [a, b]$ e $Y = \mathbf{R}^k$ (funzioni vettoriali di una variabile che chiameremo curve), $X = \mathbf{R}^n$ e $Y = \mathbf{R}$ (funzioni scalari di più variabili).

Definizione 5.5. Dato uno spazio metrico (X, d) , una mappa $F : X \rightarrow X$ è detta contrazione se esiste $\alpha \in (0, 1)$ tale che

$$d(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

Osservazione 5.6. - Si osservi che se $f : I \rightarrow \mathbf{R}$, I intervallo di $\mathbf{R}$, è una funzione di classe C^1 e $|f'(x)| \leq \alpha$ con $\alpha \in (0, 1)$, allora f è una contrazione.

Osservazione 5.7. - Si osservi che una contrazione è una mappa continua in ogni punto di X .

Il seguente risultato è noto come teorema delle contrazioni o del punto fisso. Data una mappa $F : X \rightarrow X$, X spazio metrico (ma potrebbe essere un generico insieme) si dice punto fisso un elemento $\bar{x} \in X$ tale che

$$F(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Teorema 5.8 (Teorema del punto fisso di Banach-Caccioppoli). *Siano (X, d) uno spazio metrico completo e $F : X \rightarrow X$ una contrazione. Allora esiste ed è unico un punto fisso per F .*

Dimostrazione - Si scelga un punto $x_o \in X$ arbitrario e si definisca per ricorrenza la successione $x_1 := F(x_o)$ e

$$x_{n+1} := F(x_n) \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}.$$

Si osservi che, scelto $k \in \mathbf{N}$, si ha

$$\begin{aligned} d(x_{k+1}, x_k) &= d(F(x_k), F(x_{k-1})) \leq \alpha d(x_k, x_{k-1}) \leq \\ &\leq \alpha^2 d(x_{k-1}, x_{k-2}) \leq \dots \leq \alpha^k d(x_1, x_o). \end{aligned}$$

Ora verifichiamo che $\{x_n\}_n$ è di Cauchy: si fissino $n, p \in \mathbf{N}$. Si ha

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) = \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \\ &\leq d(x_1, x_o) \sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha^k = d(x_1, x_o) \alpha^n [1 + \alpha + \dots + \alpha^{p-1}] \leq \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_o) \end{aligned}$$

per ogni $p \in \mathbf{N}$. Poiché $\alpha \in (0, 1)$ si conclude che $\{x_n\}_n$ è di Cauchy, poiché X è completo esiste $\bar{x} \in X$ tale che $x_n \rightarrow \bar{x}$. Dalla continuità di F e dalla definizione di $\{x_n\}_n$

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

si ottiene passando al limite che $F(\bar{x}) = \bar{x}$. Rimane da verificare che $\bar{x}$ è l'unico punto fisso di F . Sia $\bar{y} \in X$ un punto fisso per F : allora

$$0 \leq d(\bar{x}, \bar{y}) = d(F(\bar{x}), F(\bar{y})) \leq \alpha d(\bar{x}, \bar{y})$$

che è possibile solo se $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. □

Esempio 5.9. -

1. Si consideri l'equazione $x = \cos x$ per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. È chiaro che tale equazione ha una (e una sola) soluzione. Poiché la derivata

della funzione coseno varie tra -1 e 1 tale funzione è una contrazione (dovremmo considerare $x \in [-\pi/2 + \epsilon, \pi/2 - \epsilon]$ con ϵ arbitrario, ma piccolo e positivo, altrimenti non si trova la soluzione. (in realtà la cosa non cambia se ci si allarga anche fino a $[-\pi/2, \pi/2]$)).

Per gioco si può provare a scegliere un numero arbitrario in $[-\pi/2, \pi/2]$, ad inserire il valore di x in una calcolatrice, e a questo punto premere il tasto “cos” diverse volte. Si noterà che dopo tre o quattro battute il valore si stabilizzerà, indipendentemente dalla scelta del valore di x .

2. L'equazione in $\mathbf{R}$ ($a, b \in \mathbf{R}$)

$$x = ax + b$$

ha soluzione unica per ogni $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 1$. Supponiamo per semplicità $a > 0$: se $a \in (0, 1)$ la mappa $l(x) = ax + b$ è una contrazione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$; se $a > 1$ basta considerare

$$\frac{1}{a}x - \frac{b}{a} = x$$

e ragionare sulla mappa $m(x) = a^{-1}x - ba^{-1}$, che è una contrazione.

3. Il ragionamento si estende parzialmente a sistemi lineari del tipo

$$x = A \cdot x + b, \quad A \text{ matrice } n \times n, \quad b \in \mathbf{R}^n$$

con $x \in \mathbf{R}^n$. In questo caso il fatto che la mappa $L(x) = A \cdot x + b$ sia o meno una contrazione dipende dalla distanza che si mette su $\mathbf{R}^n$ e conseguentemente dalla norma che si mette nello spazio delle matrici $n \times n$. Se la norma di A è minore di 1 allora la mappa L è una contrazione, ma se la norma di A è maggiore di 1 non è detto che la norma di A^{-1} sia minore di 1! Ciò è vero solo in dimensione 1 (caso banale dell'esempio precedente).

Scelta una norma in $\mathbf{R}^n$, chiamiamola $\|\cdot\|$, si definisce la norma su una matrice A $n \times n$ come

$$\|A\|_{M^{n \times n}} := \sup_{x \in \mathbf{R}^n, \|x\| \leq 1} \|A \cdot x\|.$$

Ora si consideri il seguente esempio: la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che $\|A\|_{M^{n \times n}} = \max\{|a|, |b|\}$. Siano ad esempio $a > b > 0$: allora $\|A\|_{M^{n \times n}} = a$. La norma di

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$$

è il massimo tra a^{-1} e b^{-1} , cioè b^{-1} , per cui $\|A^{-1}\|_{M^{n \times n}} \neq \|A\|_{M^{n \times n}}^{-1}$.

4. Sia $f(x, y) = (f_1(x), f_2(y))$ oppure $f(x, y) = (f_1(y), f_2(x))$. Se f_1 e f_2 sono derivabili ognuna nel proprio dominio e tali derivate sono limitate da una costante minore di 1 si ripete quanto osservato

nell'Osservazione 5.6. Ad esempio, si consideri la funzione

$$f : Q \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad f(x, y) = \left(\frac{1}{3}(y + y^2), \frac{1}{4}(2 - x + x^2 - x^3) \right)$$

dove $Q = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

EX - Mostrare che $f(Q) \subset Q$ e che quindi f è una contrazione.

Di conseguenza esisterà un unico punto $(x, y) \in Q$ che soddisfa entrambe le equazioni

$$x = \frac{1}{3}(y + y^2), \quad y = \frac{1}{4}(2 - x + x^2 - x^3).$$

5. Come funziona la calcolatrice?

Si consideri una funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^2 e la mappa

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Si ha che $F'(x) = \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}$. Per cui se

$$(14) \quad \left| \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2} \right| \leq \alpha < 1$$

F è una contrazione. Vediamo il significato di F : arriva dal cosiddetto metodo di Newton per trovare (numericamente, cioè al calcolatore) gli zeri di una funzione f . L'idea è di considerare un punto arbitrario x_o , di prendere la retta tangente al grafico di f nel punto x_o (come mostrato in figura), trovare lo zero della retta tangente, che chiamiamo x_1 , e ripartire da x_1 reiterando il procedimento. Cioè x_1 è la soluzione dell'equazione

$$f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) = 0$$

e quindi

$$x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)} = F(x_o).$$

Quindi F prende x_o e ci restituisce il punto di intersezione tra l'asse delle ascisse e la retta tangente al grafico di f nel punto x_o .

Analogamente, valutando la retta tangente al grafico di f nel punto x_1 , si ottiene

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = F(x_1)$$

e così via. La successione $x_{n+1} = F(x_n)$ converge, a patto che valga (14). Facciamo un esempio e scegliamo $f(x) = x^2 - a$ con a positivo.

Vogliamo valutare la radice quadrata di a e trovarla con un processo iterativo (come fa la calcolatrice). Si ha

$$\frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2} = \frac{2(x^2 - a)}{4x^2}.$$

Questa quantità è minore di $1/2$ se $x^2 \geq a$. Quindi la mappa

$$(15) \quad F(x) = x - \frac{x^2 - a}{2x},$$

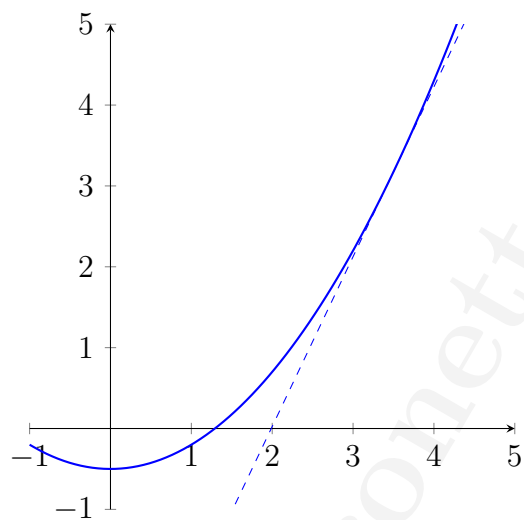
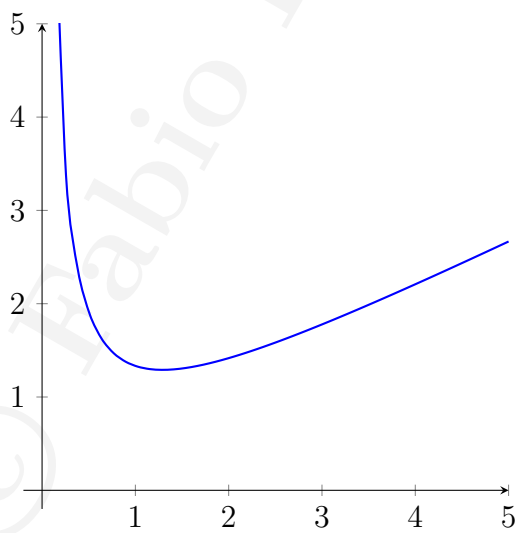
il cui grafico è mostrato in Figura 6, contrae. Si osservi come $F(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$, per cui F mappa $[\sqrt{a}, +\infty)$ in se stesso e quindi

F è una contrazione nell'insieme $[\sqrt{a}, +\infty)$.

Attenzione: F non è una contrazione su $(0, +\infty)$. Ora la cosa buffa è che F è definita in un dominio che a priori non conosciamo poiché non sappiamo il valore esatto di $\sqrt{a}$, che è quello che vogliamo trovare. Ma il processo iterativo funziona ugualmente: scegliendo $x_o > 0$ in maniera arbitraria, se x_o fosse minore di $\sqrt{a}$ la funzione F mappa x_o in un valore “grande”, cioè in x_1 maggiore di $\sqrt{a}$, e a questo punto partendo da x_1 F contrae. In conclusione la successione definita per ricorrenza

$$x_o > 0 \quad \text{arbitrario} \quad x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

converge ad un numero che sarà lo zero di $x^2 - a$, cioè $\sqrt{a}$. La calcolatrice parte da un x_o (non proprio a casaccio) e iterando F ci restituisce una buona approssimazione del numero $\sqrt{a}$.

Figura 5 - Grafico di $x^2 - a$ Figura 6 - Grafico della F definita in (15)

6. Si considerino $y_o \in \mathbf{R}$, $a, f, y \in C^0([0, T])$. La mappa $L : C^0([0, T]) \rightarrow C^0([0, T])$ definita da

$$Ly(t) := y_o + \int_0^t [a(s)y(s) + f(s)] ds$$

è una contrazione tra lo spazio metrico $C^0([0, T])$ (dotato della distanza d_∞) e se stesso, a patto che T sia sufficientemente piccolo. Infatti

$$\begin{aligned} |Lx(t) - Ly(t)| &\leq \left| \int_0^t a(s)(x(s) - y(s)) ds \right| \leq \\ &\leq \int_0^t |a(s)| |x(s) - y(s)| ds \leq \\ &\leq \max_{s \in [0, t]} |x(s) - y(s)| \int_0^t |a(s)| ds = \\ &\leq \left(\int_0^T |a(s)| ds \right) d_{\infty, [0, T]}(x, y) \end{aligned}$$

da cui

$$d_{\infty, [0, T]}(x, y) \leq \alpha d_{\infty, [0, T]}(x, y)$$

con $\alpha = \int_0^T |a(s)| ds \leq T \|a\|_{\infty, [0, T]}$. In conclusione la mappa L è una contrazione a patto che T sia abbastanza piccolo. In tal caso esiste un'unica funzione continua y tale che

$$y(t) = y_o + \int_0^t [a(s)y(s) + f(s)] ds.$$

Poiché a, y, f continue, y risulta di classe C^1 e quindi l'uguaglianza di sopra implica

$$y'(t) = a(t)y(t) + f(t), \quad y(0) = y_o.$$