

Funzioni di n variabili a valori vettoriali

ULTIMO AGGIORNAMENTO: 26 MAGGIO 2020

1. DIFFERENZIALE PER FUNZIONI DA $\mathbf{R}^n$ IN $\mathbf{R}^k$

Una funzione $F : A \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ può essere vista come una k -upla di funzioni scalari $F_1, F_2, \dots, F_k : A \rightarrow \mathbf{R}$. Quindi si possono definire le derivate direzionali per F semplicemente definendole componente per componente e in particolare le derivate parziali. Si può ottenere così una matrice $k \times n$, detta matrice *jacobiana* e denotata con DF o JF , delle derivate prime in un punto $x_o \in A$, definita da

$$DF(x_o) = JF(x_o) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_o) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_o) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_o) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_o) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x_o) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x_o) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x_o) & \frac{\partial F_k}{\partial x_2}(x_o) & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(x_o) \end{pmatrix}.$$

Si osservi che le righe di tale matrice altro non sono che i gradienti delle F_i e se $k = 1$ $DF(x_o)$ coincide con $\nabla F(x_o)$.

Si osservi che la matrice hessiana di una funzione C^2 altro non è che la matrice jacobiana della funzione vettoriale ∇f .

Diremo che F è differenziabile in x_o se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ tale che

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|F(x_o + h) - F(x_o) - L(h)|}{|h|} = 0.$$

Ragionando componente per componente ci si riduce, come nel caso scalare, a mostrare che

$$L(h) = DF(x_o) \cdot h$$

e che il fatto che F sia differenziabile in x_o diventa equivalente a dire che

$$F(x) = F(x_o) + DF(x_o) \cdot (x - x_o) + o(|x - x_o|).$$

Diremo che $F \in C^1(A)$ se F è continua, ammette tutte le derivate parziali $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n$, e queste sono continue in A .

Derivazione per funzioni composte - Siano A un aperto di $\mathbf{R}^n$, B un aperto di $\mathbf{R}^k$, $F : A \rightarrow B$ e $G : B \rightarrow \mathbf{R}^m$. Si supponga che F sia differenziabile in $x_o \in A$ e G sia differenziabile in $y_o \in B$, $y_o = F(x_o)$. Vogliamo vedere quali sono le derivate della funzione $H : A \rightarrow \mathbf{R}^m$, definita da $H := G \circ F$, in termini delle derivate di F e G . Vale il seguente risultato.

Proposizione 1.1. *Siano F, G, H e le ipotesi su F e G come sopra. Si ha che H è differenziabile in x_o e*

$$(1) \quad DH(x_o) = DG(y_o) \cdot DF(x_o).$$

Dimostrazione - L'enunciato significa che la matrice jacobiana della composizione tra F e G , cioè $D(G \circ F)$, nel punto x_o è il prodotto delle matrici jacobiane di G nel punto y_o e di F nel punto x_o .

Volendo scrivere l'espressione (1) in componenti si ha che

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(x_o) = \sum_{h=1}^k \frac{\partial G_i}{\partial y_h}(y_o) \frac{\partial F_h}{\partial x_j}(x_o),$$

quindi è questa uguaglianza che dobbiamo mostrare. Sappiamo che

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(x_o) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} H_i(x_o + te_j).$$

Chiamando $\gamma(t)$ la curva $t \mapsto (F_1(x_o + te_j), \dots, F_k(x_o + te_j))$ si ha che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} H_i(x_o + te_j) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} G_i(F(x_o + te_j)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} G_i(\gamma(t)) = \\ &= \langle \nabla G_i(\gamma(0)), \gamma'(0) \rangle = \sum_{h=1}^k \frac{\partial G_i}{\partial y_h}(\gamma(0)) \gamma'_h(0) = \\ &= \sum_{h=1}^k \frac{\partial G_i}{\partial y_h}(y_o) \frac{\partial F_h}{\partial x_j}(x_o). \quad \square \end{aligned}$$

Vediamo alcuni esempi.

Esempi 1.2. -

1. Il primo esempio, che già conosciamo, è il caso in cui si hanno due funzioni, $F : (a, b) \rightarrow A$ e $G : A \rightarrow \mathbf{R}$, A aperto di $\mathbf{R}^n$. Allora la matrice jacobiana di $H = G \circ F$ è una matrice 1×1 ed è data, per $t \in (a, b)$, da

$$\begin{aligned} DH(t) &= DG(F(t)) \cdot DF(t) = \langle \nabla G(F(t)), F'(t) \rangle = \\ &= \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}(F(t)), \dots, \frac{\partial G}{\partial x_n}(F(t)) \right) \cdot \begin{pmatrix} F'_1(t) \\ \vdots \\ F'_n(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Verifichiamo la formula appena trovata per la funzione

$$H : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad H := G \circ F$$

dove

$$\begin{aligned} F : \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R}^3, & F(x, y) &= (x^2 + y^2, 1, e^{x+y}), \\ G : \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{R}^2, & G(u, v, z) &= (uvz, u + v + z). \end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned} DF(x, y) &= \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix} \\ DG(u, v, z) &= \begin{pmatrix} vz & uz & uv \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Poiché $H(x, y) = ((x^2 + y^2)e^{x+y}, x^2 + y^2 + 1 + e^{x+y})$ si ha anche

$$DH(x, y) = \begin{pmatrix} (2x + x^2 + y^2)e^{x+y} & (2y + x^2 + y^2)e^{x+y} \\ 2x + e^{x+y} & 2y + e^{x+y} \end{pmatrix}$$

e si verifica che quest'ultima matrice è anche data da

$$\begin{aligned} DG(F(x, y)) \cdot DF(x, y) &= \\ &= \begin{pmatrix} e^{x+y} & (x^2 + y^2)e^{x+y} & x^2 + y^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Consideriamo adesso un caso in cui non conosciamo espressamente le funzioni. Si supponga di avere

$$G : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{e} \quad f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

e di voler derivare la funzione

$$H(x) := G(x, f(x)).$$

Se si vuole vedere H come composizione di G con qualche altra funzione bisognerà introdurre la funzione vettoriale

$$F(x) = (x, f(x)).$$

Si avrà da (1)

$$DH(x) = DG(F(x, y)) \cdot DF(x, y)$$

dove DH è una funzione scalare, la derivata di H , DG è un vettore, il gradiente di G , DF ancora un vettore (la derivata di una curva). Allora l'espressione appena scritta diventa

$$\begin{aligned} H'(x) &= \nabla G(x, f(x)) \cdot F'(x) = \\ &= \left\langle (G_x(x, f(x)), G_y(x, f(x))), (1, f'(x)) \right\rangle = \\ &= \frac{\partial G}{\partial x}(x, f(x)) + f'(x) \frac{\partial G}{\partial y}(x, f(x)) = \\ &= G_x(x, f(x)) + f'(x) G_y(x, f(x)). \end{aligned}$$

Se volessimo derivare ulteriormente applichiamo quanto appena visto alla formula appena trovata. Chiamando $\tilde{H}$ la funzione H' , $\tilde{G}$ la funzione G_x e $\hat{G}$ la funzione G_y si ha

$$\begin{aligned} \tilde{H}'(x) &= \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}(x, f(x)) + f'(x) \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y}(x, f(x)) + \\ &+ f'(x) \left[\frac{\partial \hat{G}}{\partial x}(x, f(x)) + f'(x) \frac{\partial \hat{G}}{\partial y}(x, f(x)) \right] + f''(x) \hat{G}(x, f(x)) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} H''(x) &= G_{xx}(x, f(x)) + f'(x) G_{xy}(x, f(x)) + \\ &+ f'(x) G_{xy}(x, f(x)) + (f'(x))^2 G_{yy}(x, f(x)) + f''(x) G_y(x, f(x)). \end{aligned}$$

4. Consideriamo ora $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ e $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ e la funzione

$$H : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{definita da} \quad H(x) = g(F(x, y, z)).$$

Usando la formula (1) si ha

$$DH(x, y, z) = Dg(F(x, y, z)) \cdot DF(x, y, z)$$

che di fatto è

$$\nabla H(x, y, z) = g'(F(x, y, z)) \nabla F(x, y, z)$$

cioè

$$\begin{aligned}
 H_x(x, y, z) &= g'(F(x, y, z))F_x(x, y, z) \\
 (2) \quad H_y(x, y, z) &= g'(F(x, y, z))F_y(x, y, z) \\
 H_z(x, y, z) &= g'(F(x, y, z))F_z(x, y, z).
 \end{aligned}$$

Volendo derivare ulteriormente, prendiamo ad esempio la prima di (2) e deriviamola rispetto a tutte e tre le variabili. Si ha

$$\begin{aligned}
 H_{xx}(x, y, z) &= g''(F(x, y, z))(F_x(x, y, z))^2 + g'(F(x, y, z))F_{xx}(x, y, z) \\
 H_{xy}(x, y, z) &= g''(F(x, y, z))F_y(x, y, z)F_x(x, y, z) + g'(F(x, y, z))F_{xy}(x, y, z) \\
 H_{xz}(x, y, z) &= g''(F(x, y, z))F_z(x, y, z)F_x(x, y, z) + g'(F(x, y, z))F_{xz}(x, y, z).
 \end{aligned}$$

Si osservi che prendendo la seconda di (2) e derivandola rispetto ad x si ottiene quanto appena ottenuto derivando la prima rispetto ad y .

Gli argomenti trattati da qui in poi non verranno fatti nell'attuale corso di ANALISI 2, li farete nel prossimo corso di analisi, ANALISI 3.

Li lascio, visto che comunque vi potrebbero essere utili il prossimo semestre

2. TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE: CASO GENERALE

Si considerino A aperto di $\mathbf{R}^{m+n}$, n ed m interi positivi, e una funzione

$$F : A \subset \mathbf{R}^{m+n} \rightarrow \mathbf{R}^n.$$

Per comodità denoteremo i punti di $\mathbf{R}^{m+n}$ con una coppia (x, y) intendendo che $x \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^n$, per cui $(x, y) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$. Si fissi un punto dell'insieme A , che denoteremo con $(\bar{x}, \bar{y})$ e si supponga che

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = (0, \dots, 0).$$

Si consideri la matrice jacobiana di F nel punto $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ data da

$$DF(\bar{z}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\bar{z}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m}(\bar{z}) & \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\bar{z}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}(\bar{z}) \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(\bar{z}) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m}(\bar{z}) & \frac{\partial F_n}{\partial y_1}(\bar{z}) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(\bar{z}) \end{pmatrix}.$$

Per semplicità denoteremo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{z}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\bar{z}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m}(\bar{z}) \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(\bar{z}) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m}(\bar{z}) \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{z}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\bar{z}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}(\bar{z}) \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}(\bar{z}) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(\bar{z}) \end{pmatrix}.$$

Si noti che

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{z}) & \quad \text{è una matrice } n \times m, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{z}) & \quad \text{è una matrice } n \times n, \\ DF(\bar{z}) & \quad \text{è una matrice } n \times (m+n),\end{aligned}$$

quindi l'unica, a priori, quadrata è $\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{z})$.

Teorema 2.1 (delle funzioni implicite). *Nella situazione appena descritta si consideri l'insieme*

$$\mathcal{Z} = \{(x, y) \in A \mid F(x, y) = (0, \dots, 0)\}.$$

Si supponga inoltre che $F \in C^1(A)$ e che

$$\det \left(\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \right) \neq 0$$

Allora esistono un intorno U di $\bar{x}$, un intorno V di $\bar{y}$ e una funzione $f : U \rightarrow V$ tali che

$$F(x, f(x)) = (0, \dots, 0) \quad \text{per ogni } x \in U$$

e inoltre l'insieme

$$\mathcal{Z} \cap (U \times V)$$

è il grafico della funzione f . Inoltre f risulta di classe C^1 in U e vale

$$Df(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \right) \quad \text{per ogni } x \in U.$$

Dimostrazione - Senza dimostrazione. □

Si faccia attenzione all'ordine delle due matrici nell'ultima espressione che ci fornisce la matrica jacobiana di f : visto che la prima è $n \times n$ e la seconda è $n \times m$ l'ordine non può essere che quello e non può essere invertito.

3. INVERTIBILITÀ LOCALE

Definizione 3.1. *Siano A, B due aperti di $\mathbf{R}^n$. Una mappa $\phi : A \rightarrow B$ è un omeomorfismo tra A e B se*

- i) ϕ è biiettiva,
- ii) ϕ è continua,
- iii) ϕ^{-1} è continua.

Una mappa $\phi : A \rightarrow B$ è un *diffeomorfismo di classe C^k* , $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$, tra A e B se

- i) ϕ è biiettiva,
- ii) $\phi \in C^k(A; \mathbf{R}^n)$,
- iii) $\phi^{-1} \in C^k(B; \mathbf{R}^n)$.

Con una forzatura qualche volta con *diffeomorfismo di classe C^0* si intende un omeomorfismo.

Una mappa $\phi : A \rightarrow B$ è un *diffeomorfismo locale in $x_o \in A$* di classe C^k , $k \in \mathbf{N}$, se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_o) \subset A$ e

$\phi|_{B_r(x_o)} : B_r(x_o) \rightarrow \phi(B_r(x_o))$ è un *diffeomorfismo di classe C^k* .

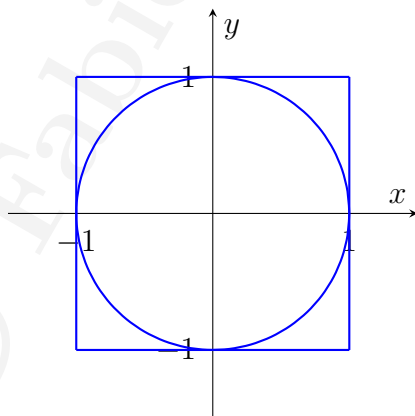
Esempio 3.2. - Vediamo alcuni esempi di omeomorfismi.

1. - Le funzioni $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $\phi(x) = x^3$, e $\psi : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbf{R}$, $\psi(x) = \tan x$, sono omeomorfismi e diffeomorfismi di classe C^1 .

La funzione $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $\varphi(x) = x^2$ è un diffeomorfismo locale in ogni punto $x \neq 0$.

2. - Le due curve disegnate in figure, la circonferenza di raggio 1 che chiameremo $\mathbf{S}^1$ e il bordo del quadrato di lato 2 che chiameremo Q , sono omeomorfe. È sufficiente considerare la mappa

$$\phi : Q \rightarrow \mathbf{S}^1, \quad \phi(x, y) = \frac{(x, y)}{|(x, y)|}$$



Un'analogia mappa si può considerare anche in $\mathbf{R}^3$ (e in qualunque altra dimensione) considerando

$$\phi(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{|(x, y, z)|}$$

dove (x, y, z) sta sul bordo del cubo di lato 2 e $\phi(x, y, z) \in \mathbf{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

3. - Si consideri l'insieme (un cilindro)

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1\}.$$

La mappa

$$\phi : \mathbf{S}^2 \rightarrow \Sigma, \quad \phi(x, y, z) = \left(\frac{x}{|(x, y)|}, \frac{y}{|(x, y)|}, z \right)$$

è un omeomorfismo.

Definizione 3.3 (Inverse di una funzione). *Data $f : X \rightarrow Y$, X e Y insiemi. Una funzione $g : Y \rightarrow X$ è detta inversa destra di f se*

$$f(g(y)) = y \quad \text{per ogni } y \in Y;$$

una funzione $h : Y \rightarrow X$ è detta inversa sinistra di f se

$$h(f(x)) = x \quad \text{per ogni } x \in X.$$

Osservazione 3.4. - Sia data $f : X \rightarrow Y$. Se f ammette inversa destra $g : Y \rightarrow X$ allora f è suriettiva e g è iniettiva. Infatti f è suriettiva se preso $y \in Y$ esiste $x \in X$ tale che $f(x) = y$. È sufficiente considerare $x = g(y)$.

Inoltre, dati $y_1, y_2 \in Y$ supposto che

$$g(y_1) = g(y_2)$$

si ha che

$$y_1 = f(g(y_1)) = f(g(y_2)) = y_2.$$

Analogamente si mostra che se f ammette inversa sinistra $h : Y \rightarrow X$ allora f è iniettiva e h è suriettiva.

Esempio 3.5. - Date $f : \mathbf{R} \rightarrow [0, +\infty)$ definita da $f(x) = x$ e $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $g(y) = \sqrt{y}$ si ha che g è un'inversa destra di f , infatti

$$f(g(y)) = y \quad \text{per ogni } y \in [0, +\infty).$$

Si osservi che g non è inversa sinistra di f , che g è iniettiva, che f è suriettiva.

Teorema 3.6 (Invertibilità locale). *Siano A e B due aperti di $\mathbf{R}^n$, $f : A \rightarrow B$ un'applicazione di classe C^1 in A , $x_o \in A$. Si supponga che*

$$\det(Df(x_o)) \neq 0.$$

Allora f è un diffeomorfismo locale in x_o di classe C^1 . Inoltre

$$Df^{-1}(y_o) = (Df(x_o))^{-1} \quad \text{dove } y_o = f(x_o).$$

Osservazione 3.7. - Il teorema appena enunciato dice due cose: prima, se una funzione di classe C^1 ha jacobiano (cioè determinante della matrice jacobiana) non nullo è localmente invertibile; seconda, la sua inversa locale è di classe C^1 .

Dimostrazione - S consideri la funzione

$$\begin{aligned} F : A \times \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ (x, y) &\mapsto y - f(x). \end{aligned}$$

Usando le notazioni del teorema delle funzioni implicite si ha che

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_o, f(x_o)) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_o)$$

ha determinante non nullo e inoltre

$$F(x_o, f(x_o)) = 0.$$

Per il teorema delle funzioni implicite esistono allora un intorno U di x_o , un intorno V di $f(x_o)$ e una mappa $\phi : V \rightarrow U$, $\phi \in C^1(V)$, tali che

$$F(x, y) = F(\phi(y), y) = 0 \quad \text{per ogni } y \in V,$$

cioè

$$y - f(\phi(y)) = 0 \quad \text{per ogni } y \in V.$$

Ciò implica che ϕ è l'inversa destra di f , cioè

$$f(\phi(y)) = y \quad \text{per ogni } y \in V$$

e, per l'Osservazione 3.4, ϕ è iniettiva. A questo punto definendo $\phi : V \rightarrow \phi(V)$ la mappa è una biiezione di classe C^1 e ϕ è l'inversa di $f|_{\phi(V)}$. Eventualmente restringendo ϕ possiamo supporre che $\phi(V)$ sia una palla $B_r(x_o)$ per qualche $r > 0$ e $U = \phi^{-1}(B_r(x_o))$.

A questo punto $\phi : V \rightarrow U$ è l'inversa cercata limitatamente a U . Si osservi che

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(y)) &= y & \text{per ogni } y \in V, \\ f^{-1}(f(x)) &= x & \text{per ogni } x \in U. \end{aligned}$$

Se denotiamo con Id_n la matrice identità tra $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{R}^n$, dalla prima delle due identità appena scritte e dalla formula (1) si ottiene

$$\text{Id}_n(y) = D(f^{-1})(y) \cdot Df(f^{-1}(y))$$

da cui

$$Df^{-1}(y) = (Df(f^{-1}(y)))^{-1} \quad \text{per ogni } y \in V. \quad \square$$

Si confronti la formula appena ottenuta con la formula della derivata della funzione inversa quando $n = 1$.

Esempio 3.8. - Vediamo due esempi già incontrati nel corso delle nostre lezioni.

1 - La mappa (coordinate polari) già vista

$$f(\rho, \vartheta) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta)$$

definita in $[0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ e a valori in $\mathbf{R}^2$ sono un diffeomorfismo locale in ogni punto (ρ, ϑ) con $\rho \neq 0$. Infatti la matrice jacobiana, come già visto, è data da

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

e ha determinante ρ . Si osservi come la mappa definita in $(0, +\infty) \times \mathbf{R}$ sarebbe lo stesso un diffeomorfismo locale, ma non globale perché non iniettiva e perciò restringiamo la variabile ϑ ad un intervallo di lunghezza 2π .

2 - La mappa (esponenziale complesso)

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

definita in $\mathbf{R}^2$ e a valori in $\mathbf{R}^2$ (se si pensa (x, y) come $z = x + iy$ questa è l'esponenziale complesso) ha matrice jacobiana

$$\begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo (uguale a e^{2x}) per cui è un diffeomorfismo locale in ogni punto ed in particolare è localmente invertibile. Come nell'esempio precedente la funzione non è globalmente invertibile e per averla invertibile globalmente bisogna restringere la variabile y ad un intervallo di lunghezza 2π (così si definisce il logaritmo complesso).