La successione $\{\mathrm{sen}\, n\vartheta\}_{n\in\mathbf{N}}$

$\boxed{\text{La successione } a_n := \mathrm{sen}\, n\vartheta \text{ non ammette limite per } \vartheta \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.}$

Si supponga per assurdo che tale limite esista, sia $a \in [-1,1]$.
Supponiamo per semplicità che $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Diversamente si potrebbe scrivere

$$\vartheta = 2k\pi + (\vartheta - 2k\pi) = 2k\pi + \tilde{\vartheta}$$

dove $k \in \mathbf{Z}$ è l'unico intero tale che $\tilde{\vartheta} \in [0, 2\pi)$. A questo punto si avrebbe

$$\begin{aligned} \mathrm{sen}\, n\vartheta &= \mathrm{sen}\, n\big(2k\pi + (\vartheta - 2k\pi)\big) = \\ &= \mathrm{sen}\, 2kn\pi \cos n\tilde{\vartheta} + \cos 2kn\pi\, \mathrm{sen}\, n\tilde{\vartheta} = \mathrm{sen}\, n\tilde{\vartheta}. \end{aligned}$$

Supponiamo quindi $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Si ha

$$\mathrm{sen}\,(n+1)\vartheta - \mathrm{sen}\,(n-1)\vartheta = 2\cos n\vartheta\ \mathrm{sen}\,\vartheta.$$

Passando al limite si deduce che

$$\lim_n \cos n\vartheta = 0$$

a patto che $\mathrm{sen}\,\vartheta$ non sia zero, cioè per

$$\vartheta \neq 0, \qquad \vartheta \neq \pi.$$

Si ha

$$\mathrm{sen}\,(n+1)\vartheta = \mathrm{sen}\, n\vartheta \cos\vartheta + \cos n\vartheta\ \mathrm{sen}\,\vartheta$$

e passando al limite si deduce che

$$a = a\cos\vartheta.$$

A questo punto poiché ϑ non può essere zero si ha che $\cos\vartheta \neq 1$ e quindi l'unica possibilità perché sia valida l'uguaglianza è che a sia zero.
A questo punto passando al limite nell'espressione

$$\cos^2 n\vartheta + \mathrm{sen}^2\, n\vartheta = 1$$

si ottiene $0 = 1$.

$\boxed{\text{La successione } \{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} \text{ è densa in } [-1,1] \text{ per } \vartheta/\pi \notin \mathbf{Q}.}$

Proposizione. *Siano α, β numeri reali con $\alpha \neq 0$ e $\beta > 0$ tali che α/β sia irrazionale. Allora per ogni $N \in \mathbf{N}$, $N > \beta$, esistono $p, q \in \mathbf{Z}$ con $|p| < N$ tali che*

$$0 < |p\,\alpha + q\,\beta| \leqslant \frac{1}{N}.$$

Osservazione - Si osservi che se α/β è razionale non è detto che valgano le disuguaglianze, o almeno non è detto che valgano entrambe. Siano ad esempio $\alpha = 1$ e $\beta = 2$. Per ogni $p, q \in \mathbf{Z}$ si ha che $q\,\beta$ è un intero pari, mentre $p\,\alpha$ è pari se p è pari, mentre è dispari se p è dispari. In ogni caso la distanza tra $p\,\alpha$ e $q\,\beta$ è un intero e la seconda disuguaglianza non può valere per un N arbitrario, a meno che $p\,\alpha + q\,\beta$ non sia zero. Ma in tal modo non varrebbe la prima disuguaglianza.

Dimostrazione - Dato $p \in \mathbf{Z}$ si consideri il numero intero

$$q := -\left[\frac{p\,\alpha}{\beta}\right] \tag{1}$$

($[a]$ denota la parte intera di a.) Chiaramente si ha che

$$-\left[\frac{p\,\alpha}{\beta}\right] \leqslant q < -\left[\frac{p\,\alpha}{\beta}\right] + 1\,.$$

Poiché $\beta > 0$ si ricava che

$$0 \leqslant p\alpha + q\beta < \beta. \tag{2}$$

Si considerino ora: $N \in \mathbf{N}$ arbitrario ed $M \in \mathbf{N}$ tale che

$$\frac{\beta}{M} \leqslant \frac{1}{N},$$

dopodiché gli $M+1$ numeri $p = 0, 1, ..., M$ e si scelgano i corrispondenti valori di q dati da (1). Si ottengono dunque $M+1$ numeri della forma $p\alpha + q\beta$ soddisfacenti (2). Poiché questi numeri sono $M+1$, ce ne devono essere sicuramente due che distano tra loro meno di β/M e, di conseguenza, $1/N$. Dunque esistono due interi distinti p_1 e p_2 compresi tra 0 ed M tali che, denotati con q_1 e q_2 i corrispondenti valori definiti in (1), si ha

$$|p_1\alpha + q_1\beta - p_2\alpha - q_2\beta| \leqslant \frac{1}{N}$$

da cui posto $p = p_1 - p_2$, $q = q_1 - q_2$ si trova che

$$|p\,\alpha + q\,\beta| \leqslant \frac{1}{N}.$$

Rimane da vedere che $p\,\alpha + q\,\beta$ non si annulla. Innanzitutto si osservi che, poiché p_1, p_2 sono distinti, si ha che $p \neq 0$. Allora, supponendo per assurdo che $p\,\alpha + q\,\beta$ sia zero si otterrebbe

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{q}{p}$$

il che è impossibile per la scelta fatta di α e β. $\square$

Osservazione Ovviamente p e q possono essere scelti in modo tale che

$$0 < p\,\alpha + q\,\beta \leqslant \frac{1}{N}.$$

Infatti, nell'eventualità che $p\,\alpha + q\,\beta$ fosse negativo è sufficiente cambiare segno sia a p che a q.

Corollario *Siano α e β come nella proposizione di sopra. Allora per qualunque $x \in \mathbf{R}$ e qualunque $\varepsilon > 0$ esistono $p, q \in \mathbf{Z}$, $p \geqslant 0$, tali che*

$$0 < |p\,\alpha + q\,\beta - x| < \varepsilon.$$

Dimostrazione - Fissato $\varepsilon > 0$ si consideri $N > 2/\varepsilon$ e siano $p_o, q_o \in \mathbf{Z}$, dati dalla proposizione e dall'osservazione precedenti. Di conseguenza

$$0 < p_o\,\alpha + q_o\,\beta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si consideri ora $x \in \mathbf{R}$ arbitrario: denotata con δ la quantità $p_o\,\alpha + q_o\,\beta$ si consideri k la parte intera di $x/\delta - 1$ cosicché

$$\frac{x}{\delta} - 2 < k \leqslant \frac{x}{\delta} - 1,$$

da cui

$$x - 2\delta < k\delta \leqslant x - \delta.$$

Cioè

$$|kp_o\alpha + kq_o\beta - x| < 2\delta < \varepsilon.$$

Ponendo $p = kp_o$ e $q = kq_o$ si conclude nel caso in cui $p_o\alpha + q_o\beta > 0$. Nel caso in cui $p_o\,\alpha + q_o\beta < 0$ definiamo $\delta := -(p_o\,\alpha + q_o\,\beta)$. Scegliendo ancora k in modo tale che

$$\frac{x}{\delta} - 2 < k \leqslant \frac{x}{\delta} - 1,$$

si deduce che

$$2\delta - x > -k\delta \geqslant \delta - x$$

cioè nuovamente

$$|kp_o\alpha + kq_o\beta - x| < 2\delta < \varepsilon.$$

Infine si osservi che si può sempre supporre $p_o \geqslant 0$, eventualmente cambiando segno sia a p_o che a q_o. $\square$

Veniamo ora alle densità.

Osservazione - La funzione $x \mapsto \operatorname{sen} x$ è lipschitziana di costante 1, cioè

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leqslant |x - y| \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbf{R}.$$

Per mostrarlo è sufficiente mostrare che il rapporto incrementale è compreso tra -1 e 1 e questo segue dal fatto che la derivata della funzione è limitata da 1.

Densità - Sia $\eta \in [-1, 1]$ e $x \in \mathbf{R}$ tale che $\operatorname{sen} x = \eta$. Si considerino $\alpha = \vartheta$ e $\beta = 2\pi$. Preso $k \in \mathbf{N}$ esistono allora $p_k, q_k \in \mathbf{Z}$ tali che

$$0 < |p_k\,\vartheta + 2q_k\pi - x| < \frac{1}{k}.$$

Dall'osservazione precedente si ha

$$|\operatorname{sen} p_k\vartheta - \eta| = |\operatorname{sen} p_k\vartheta - \operatorname{sen} x| = |\operatorname{sen} p_k\vartheta - \operatorname{sen}(x - 2q_k\pi)| \leqslant$$
$$\leqslant |p_k\vartheta - (x - 2q_k\pi)| < \frac{1}{k}.$$

Quindi si ha una successione di interi p_k tali che

$$\lim_{k\to+\infty} \operatorname{sen} p_k\vartheta = \eta.$$

Ora si osservi che non può accadere che le due successioni $\{p_k\}_k$ e $\{q_k\}_k$ siano limitate: se lo fossero si potrebbero estrarre due sottosuccessioni convergenti

$$p_{k_j} \to \bar{p} \in \mathbf{Z}\,, \qquad q_{k_j} \to \bar{q} \in \mathbf{Z}\,,$$

e a questo punto, poichè p_k e q_k sono interi, si avrebbe che $p_{k_j} = \bar{p}$ e $q_{k_j} = \bar{q}$ definitivamente, mentre

$$|p_k\,\vartheta + 2q_k\pi - x| > 0 \qquad \text{per ogni } k \in \mathbf{N}.$$

Di conseguenza, essendo $p_k > 0$, $p_k \to +\infty$. Si può quindi estrarre una sottosuccessione $\{p_{k_j}\}_{j\in\mathbf{N}}$ crescente e divergente tale che

$$\lim_{j\to+\infty} \operatorname{sen} p_{k_j}\vartheta = \eta. \qquad \square$$

Esercizio - Si osservi come la successione $\{\operatorname{sen} n\vartheta\}_{n\in\mathbf{N}}$ è densa in $[-1, 1]$ se ϑ/π non è un numero razionale, mentre la non esistenza del

limite della stessa successione è garantita per ϑ/π non intero.
Si trovi un valore di ϑ del tipo

$$\vartheta = \frac{p}{q}\pi, \qquad \text{con } p, q \in \mathbf{Z},\ (q \neq 1)$$

per il quale $\lim_n \operatorname{sen} n\vartheta$ non esista e per il quale l'insieme $\{\operatorname{sen} n\vartheta\}_{n\in\mathbf{N}}$ non sia denso in $[-1, 1]$.