La formula di Stirling

La formula che vogliamo mostrare è

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1\,.$$

Per mostrare la seguente formula servono alcuni requisiti, alcuni dei quali non visti al corso, e un po' di pazienza anche perché non tutti i dettagli sono sviluppati:

i) sotto certe condizioni (che varranno nel caso che ci interessa) vale $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_a^b g(x,t)\,dx = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\,dx$;

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ (mostrato in un'appendice del capitolo sugli integrali impropri);

iii) serie di Taylor e convergenza delle serie di potenze (in particolare quella della funzione esponenziale);

Si consideri la funzione $f_t(x) = x^t e^{-x}$ e la funzione

$$F(t) := \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\,dx \qquad \text{per } t \in (-1,+\infty).$$

Si è già visto nelle dispense di teoria che $F(0) = F(1) = 1$ e che $F(t+1) = (t+1)F(t)$ da cui

$$F(n) = n! \quad \text{se } n \in \mathbf{N}\,.$$

Valutando le prime due derivate (qui si usa un teorema che assicura, sotto certe condizioni, che

$$\frac{d}{dt}\int_a^b g(x,t), dx = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(x,t), dx \quad)$$

si ha (va verificato che $F'(t)$ e $F''(t)$ hanno senso per ogni $t \in (-1,+\infty)$)

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\log x\,dx$$
$$F''(t) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}(\log x)^2\,dx\,.$$

Poiché F'' è positiva si ha che F è convessa ed ha al più un solo punto di minimo. Valutando $F(1/2)$ si ha che

$$F(1/2) := \int_0^{+\infty} \sqrt{x}\, e^{-x}\, dx = \sqrt{x}\, e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}\, dx = \qquad (x = y^2)$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{2y}\, 2y\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{4}} < 1\,.$$

Poiché $F(0) = F(1) = 1$ si deduce che l'unico punto di minimo è compreso tra 0 e 1.
Come già visto si ha che

$$\frac{d}{dx} f_t(x) = 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad x = t$$

e il suo valore massimo è $t^t e^{-t}$. Dividiamo allora per il suo valore massimo e facciamo il seguente cambio di variabile nell'integrale che definisce F: $y = x - t$. Si ottiene

$$F(t) = t^t e^{-t} \int_{-t}^{+\infty} \frac{e^{-(y+t)+t\log(y+t)}}{t^t e^{-t}}\, dy = t^t e^{-t} \int_{-t}^{+\infty} e^{-y+t\log\frac{y+t}{t}}\, dy =$$
$$= t^t e^{-t} \int_{-t}^{+\infty} e^{-\left(\frac{y}{t} - \log\frac{y+t}{t}\right)t}\, dy\,.$$

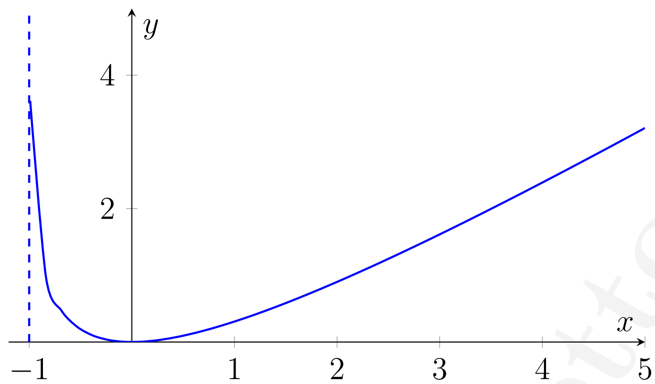
Ora si ponga $\eta = y/t$: si ottiene

$$F(t) = t^{t+1} e^{-t} \int_{-1}^{+\infty} e^{-(\eta - \log(1+\eta))t}\, d\eta\,. \tag{1}$$

Si consideri la funzione

$$\psi(\eta) = \eta - \log(1+\eta).$$

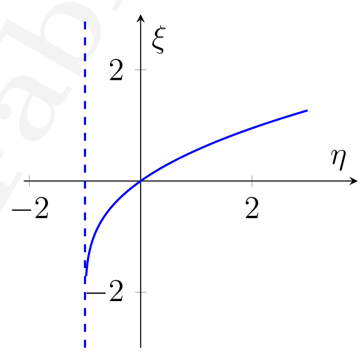
Si verifica facilmente che ψ si annulla solo in $\eta = 0$, per il resto è positiva dove è definita e il suo grafico è quello mostrato in figura.



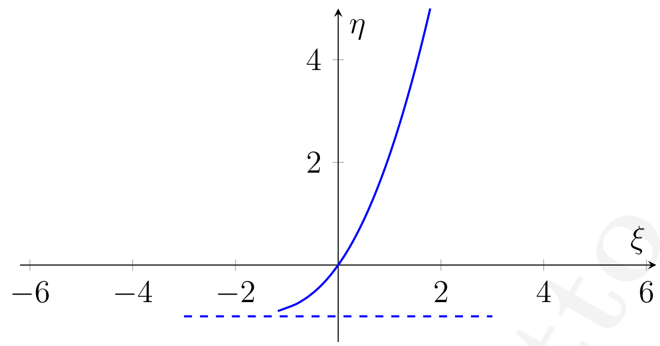
Allora possiamo imporre

$$\eta - \log(1+\eta) =: \frac{\xi^2}{2}.$$

A questo punto si hanno diverse scelte per esplicitare ξ in termini di η. Scegliamo la funzione $\xi(\eta)$ il cui grafico è riportato nella figura che segue.



Definiamo allora $\varphi(\xi) = \eta$, φ l'inversa della funzione appena definita, il cui grafico è



Scrivendo l'espressione (1) in termini di ξ si ottiene

$$F(t) = t^{t+1}e^{-t}\int_{-1}^{+\infty} e^{-(\eta-\log(1+\eta))t}\,d\eta =$$
$$= t^{t+1}e^{-t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}t}\varphi'(\xi)\,d\xi\,.$$

Ora, per far sì che ci sia un quadrato ad esponente di e imponiamo l'ulteriore cambio di variabile

$$u = \sqrt{t}\,\xi$$

e quindi si ottiene

$$F(t) = t^{t+1/2}e^{-t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\varphi'\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\,du\,.$$

Ora si osservi che

- $\eta \mapsto \psi(\eta) = \eta - \log(1+\eta)$ è analitica (in particolare lo è in $\eta = 0$
- $\eta \mapsto \sqrt{\eta}$ **non** è analitica in $\eta = 0$, ma $\eta \mapsto \sqrt{\psi(\eta)}$ lo è comunque. Infatti

$$\psi(\eta) = \eta - \left[\eta - \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^3}{3} + \dots\right] = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\eta^n.$$

Possiamo quindi sviluppare in serie attorno a 0 la quantità $\varphi'\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)$ e scrivere ($\varphi'(0)=1$)

$$\begin{aligned} F(t) &= t^{t+1/2}e^{-t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\varphi'\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)du = \\ &= t^{t+1/2}e^{-t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)^n\right]du = \\ &= t^{t+1/2}e^{-t}\left[\sqrt{2\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^n\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}u^n\,du\right] \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzato il fatto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = \sqrt{\pi} \quad \text{e quindi} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds = \sqrt{2\pi}$$

e il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale (usato per le serie).
Valutiamo ora $b_n := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}u^n\,du$ per n pari (per n dispari si vede facilmente che b_n è zero). Intergrando per parti si ha

$$b_{2n} = (2n-1)b_{2n-2}.$$

Poiché $b_0 = \sqrt{2\pi}$ si deduce che

$$b_{2n} = (2n-1)!!\,\sqrt{2\pi}, \qquad n \geqslant 1$$

dove il doppio fattoriale indica

$$\begin{aligned} k!! &:= k\cdot(k-2)\cdot(k-4)\ldots 3\cdot 1 \qquad &\text{se } k \text{ è dispari,} \\ k!! &:= k\cdot(k-2)\cdot(k-4)\ldots 4\cdot 2 \qquad &\text{se } k \text{ è pari.} \end{aligned}$$

Siamo giunti, per ora, all'espressione

$$F(t) = t^{t+1/2}e^{-t}\left[\sqrt{2\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{2n}}{t^n}(2n-1)!!\,\sqrt{2\pi}\right].$$

Calcolando (conto che tralascio) i termini a_n, o alcuni di essi, si ha

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= \frac{2}{3}, \\ a_2 &= \frac{1}{12}, \\ a_3 &= -\frac{4}{170}, \\ a_4 &= \frac{5}{4320}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

per cui

$$F(t) = t^{t+1/2}e^{-t}\left[\sqrt{2\pi} + \frac{1}{12}\frac{1}{t}\sqrt{2\pi} + \frac{1}{288}\frac{1}{t^2}\sqrt{2\pi} + \dots\right].$$

Raccogliendo $\sqrt{2\pi}$ e ricordando che $F(n) = n!$ si ricava che

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left[1 + \frac{1}{12\,n} + \frac{1}{288\,n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right].$$