Corsi di laurea in fisica ed astronomia
Prova scritta di Analisi Matematica 2

Padova, 15.6.2017

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx+n} x^n \qquad \text{per } x \geqslant 0\,.$$

2. Si studi il seguente integrale improprio al variare di $\alpha > 0$

$$\int_1^{+\infty} \left(\big(1 + \operatorname{sen} x\big)\ \operatorname{tg} \frac{1}{x} \right)^{\alpha} dx\,.$$

3. Definito

$$F(x,y) = \left(\frac{\alpha\, x\, y + 2\beta\, x}{(1-x^2)^2}, \frac{1}{1-x^2} \right)$$

si trovi il dominio massimale $D \subset \mathbf{R}^2$ di F, si dica da quante componenti connesse è composto D e se tali (o tale) componenti sono semplicemente connesse.
Si trovino poi i valori reali di α e β per i quali il campo $F : D \to \mathbf{R}^2$ è conservativo e per tali valori se ne trovino i potenziali.

4. Si dica se esistono, ed eventualmente li si trovi, il massimo e il minimo della funzione

$$f(x,y) = e^{-xy}(x^2 + y^2)$$

definita nell'insieme

$$D = \big\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, x^2 + y^2 \leqslant 4 \big\}.$$

Si studi poi lo stesso problema con f definita nell'insieme

$$E = \big\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, x^2 + y^2 \leqslant 4 \big\} \cup \big\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, x|y| \leqslant 2, x \geqslant \sqrt{2} \big\}$$

analizzando dapprima $\displaystyle\lim_{\substack{|(x,y)| \to +\infty \\ (x,y) \in E}} f(x,y)$.

Soluzione della traccia del 15.6.2017

1. Ogni termine della serie è non negativo e si osservi che

$$e^{-nx+n}x^n = e^{-nx}(e\,x)^n = \Big(\frac{e\,x}{e^x}\Big)^n .$$

Applichiamo il criterio della radice n-esima: si ha che

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(e^{-nx}(e\,x)^n\Big)^{1/n} = \frac{e\,x}{e^x}$$

Si faccia attenzione al seguente fatto: $e^x \geqslant e\,x$ per ogni $x \geqslant 0$ e vale l'uguaglianza se e solo se $x = 1$. Infatti derivando la funzione $f(x) = e^x - e\,x$ e imponendo $f' = 0$ si ottiene

$$f'(x) = e^x - e = 0 \qquad \text{per } x = 1.$$

In tale punto f ha minimo e poiché $f(1) = 0$ si deduce che

$$\frac{e\,x}{e^x} < 1 \qquad \text{per ogni } x \neq 1 \qquad \text{e} \quad \frac{e\,x}{e^x} = 1 \quad \text{solo se } x = 1.$$

Per cui la serie converge in $[0,1)\cup(1,+\infty)$ e non converge in 1. La convergenza è uniforme e totale in

$$[0,a]\cup[b,+\infty) \qquad \text{per ogni } a\in(0,1),\ \text{per ogni } b>1$$

poiché

$$\sup_{x\in[0,a]}\frac{e\,x}{e^x} = \frac{e\,a}{e^a} \qquad \text{e} \qquad \sup_{x\in[b,+\infty)}\frac{e\,x}{e^x} = \frac{e\,b}{e^b}.$$

Infine si osservi che si può anche dire chi è la somma della serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{e\,x}{e^x}\Big)^n = \frac{1}{1-e^{-x+1}x} = \frac{e^x}{e^x - e\,x} \qquad \text{per } x\in[0,1)\cap(1,+\infty)\,.$$

2. L'integrale converge per $\alpha > 1$ e diverge a $+\infty$ per $\alpha \in (0,1]$. Vediamo perché. Si ha che la funzione integranda è non negativa e limitata nell'insieme $[1,+\infty)$, per cui

$$0 \leqslant \int_1^c \bigg(\Big(1+\operatorname{sen}x\Big)\ \operatorname{tg}\frac{1}{x}\bigg)^\alpha dx < +\infty \qquad \text{per ogni } c\in(1,+\infty)\,.$$

Il problema per cui tale integrale è improprio e solo dovuto al fatto che l'insieme di integrazione è illimitato. Poiché si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Big(\big(1+\operatorname{sen}x\big)\ \operatorname{tg}\frac{1}{x}\Big)^\alpha}{\big(\frac{1+\operatorname{sen}x}{x}\big)^\alpha} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)^\alpha = 1 \qquad \text{per ogni } \alpha > 0$$

per il criterio del confronto asintotico si conclude che l'integrale dato e

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x + 1}{x}\right)^\alpha \, dx$$

hanno lo stesso carattere. Limitiamoci quindi a studiare quest'ultimo.
Per $\alpha = 1$ la cosa è abbastanza immediata, è sufficiente scrivere

$$\frac{\operatorname{sen} x + 1}{x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{1}{x}$$

per rendersi conto che

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx \quad \text{converge,} \qquad \text{mentre } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \, dx = +\infty$$

per cui l'integrale dato diverge a $+\infty$. Per $\alpha > 1$ si ha che

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x + 1}{x}\right)^\alpha \, dx \leqslant 2^\alpha \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \, dx < +\infty.$$

Rimane il caso $\alpha \in (0,1)$. La quantità

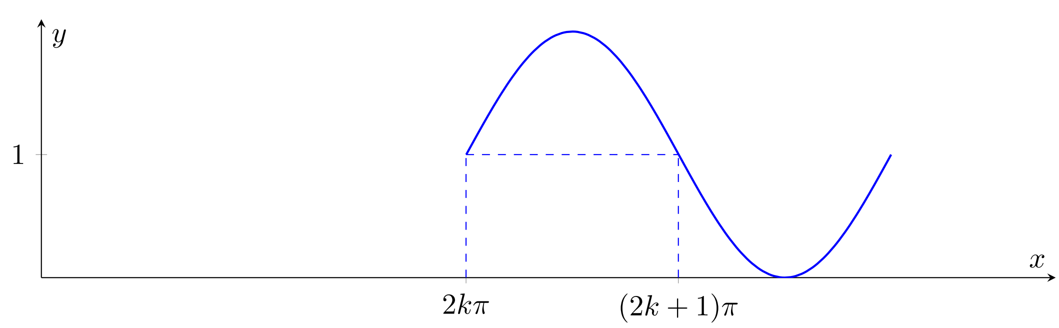
$$\frac{1 + \operatorname{sen} x}{x} < 1 \qquad \text{definitivamente}$$

per cui, poiché $\alpha \in (0,1)$, si ha che

$$\left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{x}\right)^\alpha > \frac{1 + \operatorname{sen} x}{x} \qquad \text{definitivamente.}$$

Poiché per $\alpha = 1$ si è già visto che l'integrale diverge (e la quantità considerata è asintotica all'integranda $\big((1 + \operatorname{sen} x) \ \operatorname{tg} \frac{1}{x}\big)^\alpha$) per confronto si conclude.
Altro modo di vederlo è il seguente: In questo caso si osservi che (si veda anche la figura)

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x + 1}{x}\right)^\alpha \, dx \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{1}{x^\alpha} \, dx \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^\alpha \pi^\alpha} = +\infty$$



dove si è stimato

$$\operatorname{sen} x + 1 \geqslant 1 \quad \text{per } x \in [2k\pi, (2k+1)\pi], \qquad \operatorname{sen} x + 1 \geqslant 0 \quad \text{per } x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi).$$

3. Innanzitutto l'espressione F è definita per $1 - x^2 \neq 0$, per cui F è definita nell'insieme

$$\begin{aligned}
D &= A_1 \cup A_2 \cup A_3, \\
A_1 &= \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, x < -1\big\}, \\
A_2 &= \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, -1 < x < 1\big\}, \\
A_3 &= \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, x > 1\big\},
\end{aligned}$$

e A_1, A_2, A_3 sono le tre componenti connesse di D, ognuna delle quali è semplicemente connessa.
Si osservi che il campo è irrotazionale per

$$\alpha = 2 \quad \text{e} \quad \text{qualunque valore di } \beta \in \mathbf{R}\,,$$

infatti

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\alpha\, x}{(1-x^2)^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{2\, x}{(1-x^2)^2}.$$

Per cui, essendo F di classe C^1, il campo non può essere conservativo per valori di α diversi da 2. Integrando la seconda componente del campo rispetto a y si ottiene che il potenziale (in uno degli insiemi A_i) deve avere la forma

$$f(x,y) = \frac{y}{1-x^2} + g(x)$$

e derivandola rispetto a x si ricava che il potenziale (o i potenziali) è dato da

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{y+\beta}{1-x^2} + c_1 \qquad \text{in } A_1, \\
f(x,y) &= \frac{y+\beta}{1-x^2} + c_2 \qquad \text{in } A_2, \\
f(x,y) &= \frac{y+\beta}{1-x^2} + c_3 \qquad \text{in } A_3,
\end{aligned}$$

con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$ costanti, a priori diverse. Si osservi che f può essere scritta in maniera più compatta come

$$f(x,y) = \frac{y+\beta}{1-x^2} + c_1\chi_{A_1}(x,y) + c_2\chi_{A_2}(x,y) + c_3\chi_{A_3}(x,y)$$

dove χ_E, E insieme, è la funzione definita da

$$\chi_E(x,y) = 1 \quad \text{se } (x,y) \in E\,, \qquad \chi_E(x,y) = 0 \quad \text{se } (x,y) \notin E\,.$$

4. La funzione è differenziabile, per cui cerchiamo eventuali punti critici interni annullando le derivate parziali. Si ha il seguente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -ye^{-xy}(x^2+y^2) + 2xe^{-xy} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -xe^{-xy}(x^2+y^2) + 2ye^{-xy} = 0 \end{cases}$$

che è equivalente a

$$\begin{cases} 2x = y(x^2+y^2) \\ 2y = x(x^2+y^2) \end{cases}$$

Si osservi che tale sistema è risolto per $(x,y) = (0,0)$ e inoltre che non vi possono essere soluzioni del tipo $(0,y)$ con $y \neq 0$ o $(x,0)$ con $x \neq 0$. Di conseguenza le eventuali soluzioni (x,y) soddisfano la condizione $x = y = 0$ oppure la condizione $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Analizziamo il secondo caso: supponendo che sia x che y non siano nulle si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2) \\[2ex] \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2) \end{cases}$$

da cui la condizione $x = y$. Inserendo questa informazione nel sistema si ottiene

$$x^2+y^2 = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 1,\ y = 1 \text{ oppure } x = -1,\ y = -1.$$

Per cui i punti stazionari per f in D sono

$$(0,0), \qquad (1,1), \qquad (-1,-1)\,.$$

Vediamo di parametrizzare il bordo: può essere parametrizzata da

$$\gamma(t) = \big(2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t\big), \qquad \text{con } t \in [0, 2\pi].$$

Si ottiene

$$f\big(\gamma(t)\big) = 4\,e^{-4\cos t\,\mathrm{sen}\, t}.$$

Derivando e uguagliando a zero si ottiene

$$\frac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big) = 16\,e^{-4\cos t\,\mathrm{sen}\, t}\big(\mathrm{sen}^2\, t - \cos^2 t\big) = 0$$

che fornisce $t = \pi/4$, $t = 3\pi/4$ $t = 5\pi/4$, $t = 7\pi/4$, valori che corrispondono ai punti

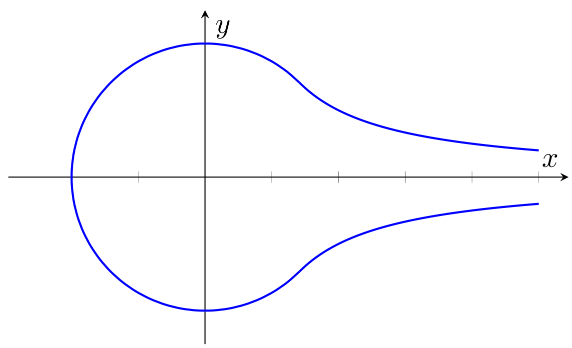
$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}), \qquad (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), \qquad (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \qquad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

Valutando f nei vari punti candidati si ottiene

$$
\begin{aligned}
&f(0,0) = 0,\\
&f(1,1) = f(-1,-1) = 2\,e^{-1},\\
&f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 4\,e^{-2},\\
&f(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 4\,e^{2},
\end{aligned}
$$

per cui $(0,0)$ è di minimo e $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ e $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ sono di massimo.

Per l'analogo problema nell'insieme E, si osservi che l'insieme è illimitato (si veda in figura il suo bordo), per cui l'esistenza di massimo e minimo assoluti per f in E non è garantita.



Da quanto visto precedentemente si ha che

$$f(x,y) \geqslant 0 \qquad \text{per ogni } (x,y) \in E, \text{ e } f(x,y) = 0 \text{ solo per } (x,y) = (0,0)$$

Si conclude che f sicuramente ammette minimo assunto nel punto $(0,0)$.
Per quanto riguarda il massimo, questo non esiste, in quanto

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\,\to\,+\infty \\ x\,\in\,E}} f(x,y) = +\infty.$$

Infatti ci si accorge, dalle limitazioni che definiscono E, che xy è compreso tra -2 e 2, per cui

$$e^{-2} \leqslant e^{-xy} \leqslant e^{2}.$$

In maniera analoga

$$0 \leqslant y^2 \leqslant \frac{2}{x^2}\,,$$

per cui

$$e^{-2}x^2 \leqslant f(x,y) \leqslant e^{2}\left(x^2 + \frac{2}{x^2}\right)$$

da cui di deduce che il limite è $+\infty$.