Corsi di laurea in fisica ed astronomia
Prova scritta di Analisi Matematica 2

Padova, 10.7.2017

Si svolgano i seguenti esercizi facendo attenzione a **giustificare** le risposte.
Delle affermazioni non motivate e giustificate non si terrà conto nella valutazione.
Non è consentito l'uso di alcun dispositivo elettronico, di appunti o di libri.

1. Si studi la serie di funzioni al variare di $x \in \mathbf{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(x^2 + \frac{1}{n} \right)^n .$$

2. Si studino i seguenti integrali impropri al variare di $\alpha, \beta, \gamma > 0$

$$\int_2^{+\infty} \frac{\log t}{(t-1)^\alpha} dt, \quad \int_1^2 \frac{\log t}{(t-1)^\beta} dt, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\log t}{(t-1)^\gamma} dt .$$

3. Sia Γ la curva intersezione dei due insiemi

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 4x^2 + y^2 - 1\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z - \sqrt{3}x = 0\} .$$

Si trovi la lunghezza di Γ e la si parametrizzi con il parametro d'arco.

4. Data la funzione

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2}y^2z^2 - 2z^2 - \frac{y^3}{3}$$

se ne trovino gli eventuali punti stazionari e se ne discuta, se possibile, la loro natura.

Soluzione della traccia del 10.7.2017

1. Ogni termine della serie è non negativo. Per $|x| \geq 1$ si ha che $x^2 + \frac{1}{n} \geq 1$ per cui la serie non può convergere e, poiché a termini positivi, diverge a $+\infty$.

Per $|x| < 1$: poiché

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(x^2 + \frac{1}{n} \right) = x^2 < 1 \quad (1)$$

si ha che esiste $\delta \in (0, 1)$ tale che

$$0 < x^2 + \frac{1}{n} < 1 - \delta < 1 \quad \text{definitivamente.}$$

Per cui, per confronto con la serie $\sum_n (1 - \delta)^n$, la serie converge. Oppure, direttamente dal criterio della radice n -esima, poiché

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(x^2 + \frac{1}{n} \right)^n} = x^2,$$

si conclude che la serie converge puntualmente per ogni $x \in (-1, 1)$ e diverge positivamente in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

I due casi nei quali $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(x^2 + \frac{1}{n} \right)^n} = 1$, cioè $x = -1$ e $x = 1$, vanno studiati separatamente. Si ottiene che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

da cui la serie non può convergere (in quanto la successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ non è infinitesima) ed anzi diverge a $+\infty$.

Non può convergere uniformemente in $(-1, 1)$ altrimenti convergerebbe anche negli estremi, infatti

$$\sup_{x \in (-1, 1)} \left(x^2 + \frac{1}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad \text{che non è infinitesima.}$$

Però converge uniformemente e totalmente in ogni intervallo $[a, b] \subset (-1, 1)$. Infatti

$$\sup_{x \in [a, b]} \left(x^2 + \frac{1}{n} \right)^n = \max \left\{ \left(a^2 + \frac{1}{n} \right)^n, \left(b^2 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}.$$

2. Prima di tutto si osservi che le funzioni integrande sono non negative, nel primo caso la funzione integranda è limitata, per cui l'unico problema è che va integrata in un insieme illimitato; nel secondo caso la funzione va integrata in un insieme limitato, ma potrebbe essere illimitata vicino ad 1.

Analizziamo il primo dei tre integrali, che converge per ogni $\alpha > 1$. La conclusione

si ottiene con il criterio del confronto asintotico nel modo seguente: fissato $\alpha > 1$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\alpha - \varepsilon > 1$, basta scegliere, ad esempio, $\varepsilon = (1 - \alpha)/2$. Scelto tale ε si ha che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\log t}{(t-1)^\alpha}}{\frac{1}{(t-1)^{\alpha-\varepsilon}}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log t}{(t-1)^\alpha} (t-1)^{\alpha-\varepsilon} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log t}{(t-1)^\varepsilon} = 0$$

per cui, poiché

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(t-1)^{\alpha-\varepsilon}} dt < +\infty$$

si conclude che anche l'integrale $\int_2^{+\infty} \frac{\log t}{(t-1)^\alpha} dt$ è convergente. Per $0 < \alpha \leq 1$ è chiaramente divergente poiché

$$\frac{\log t}{(t-1)^\alpha} \geq \frac{\log t}{t-1} \geq \frac{1}{t-1}.$$

Altro modo di studiarlo è il seguente: poiché la funzione

$$t \mapsto \frac{\log t}{(t-1)^\alpha} \quad \text{è definitivamente decrescente}$$

è possibile applicare il criterio integrale per la convergenza delle serie e studiare la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{(n-1)^\alpha},$$

che ha lo stesso carattere di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{n^\alpha},$$

e a questo punto usare il criterio di condensazione. La serie considerata avrà anche lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 2^n \frac{n \log 2}{2^{n\alpha}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n \log 2}{2^{n(\alpha-1)}}$$

la quale converge per $\alpha > 1$ e diverge positivamente per $0 < \alpha \leq 1$.

Per il secondo si osservi prima di tutto che:

$$\log t = \log(1 + (t-1)) = (t-1) + o(t-1) \tag{2}$$

o equivalentemente che

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{\log t}{t-1} = 1.$$

Per cui usando lo sviluppo (2) si ha che

$$\frac{\log t}{(t-1)^\beta} = \frac{1}{(t-1)^{\beta-1}} + \frac{o(t-1)}{(t-1)^\beta}.$$

Il primo termine converge per $\beta - 1 < 1$, cioè, visto che $\beta > 0$, per $0 < \beta < 2$. Per trattare il secondo forse conviene sviluppare ulteriormente il logaritmo come segue

$$\log t = \log(1 + (t - 1)) = (t - 1) - \frac{1}{2}(t - 1)^2 + o((t - 1)^2)$$

per concludere che l'integrale diverge a $+\infty$ per $\beta \geq 2$.

Per il terzo integrale è sufficiente mettere assieme le informazioni sui primi due per concludere che converge per

$$1 < \gamma < 2.$$

3. Eguagliando i due termini

$$4x^2 + y^2 - 1 \quad \text{e} \quad \sqrt{3}x$$

si ottiene

$$\left(2x - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{19}{16}.$$

Per cui imponendo

$$2x - \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{\frac{19}{16}} \cos t \quad \text{e} \quad y = \sqrt{\frac{19}{16}} \sin t$$

si ricavano le prime due componenti della parametrizzazione della curva.

Da, ad esempio, $z = \sqrt{3}x$ si ricava la terza, per cui Γ è parametrizzata da

$$\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{19}{16}} \cos t, \sqrt{\frac{19}{16}} \sin t, \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{19}{16}} \cos t \right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Poiché

$$\gamma'(t) = \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{19}{16}} \sin t, \sqrt{\frac{19}{16}} \cos t, -\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{19}{16}} \sin t \right), \quad t \in [0, 2\pi],$$

e

$$|\gamma'(t)|^2 = \frac{1}{4} \frac{19}{16} \sin^2 t + \frac{19}{16} \cos^2 t + \frac{3}{4} \frac{19}{16} \sin^2 t = \frac{19}{16}$$

si ricava che la lunghezza è data da $2\pi \sqrt{\frac{19}{16}}$.

Il parametro d'arco si ricava da:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{19}{16}} dt \quad \implies \quad s(t) = \sqrt{\frac{19}{16}} t$$

da cui

$$t(s) = \sqrt{\frac{16}{19}} s$$

per cui la parametrizzazione in dipendenza da s è data da

$$\eta(s) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{19}{16}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{16}{19}}s, \sqrt{\frac{19}{16}} \cos \sqrt{\frac{16}{19}}s, -\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{19}{16}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{16}{19}}s \right),$$

$$s \in \left[0, 2\pi\sqrt{\frac{19}{16}} \right].$$

4. La funzione è derivabile in tutto $\mathbf{R}^3$, quindi cerchiamo gli eventuali punti di massimo e minimo tra i punti critici. Valutiamo quindi le derivate parziali e studiamo il sistema delle derivate uguagliate a zero. Si ha

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0 \\ f_y(x, y, z) = yz^2 - y^2 = 0 \\ f_z(x, y, z) = zy^2 - 4z = 0 \end{cases}$$

che risolto fornisce i punti

$$P_1 = (1, 0, 0), \quad P_2 = (1, 2, \sqrt{2}), \quad P_3 = (1, 2, -\sqrt{2}),$$

$$P_4 = (2, 0, 0), \quad P_5 = (2, 2, \sqrt{2}), \quad P_6 = (2, 2, -\sqrt{2}).$$

La matrice hessiana di f è

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x-3 & 0 & 0 \\ 0 & z^2-2y & 2yz \\ 0 & 2zy & y^2-4 \end{pmatrix}$$

Valutata nei punti stazionari fornisce

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$H_f(P_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4\sqrt{2} \\ 0 & 4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_f(P_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4\sqrt{2} \\ 0 & -4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_f(P_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$H_f(P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4\sqrt{2} \\ 0 & 4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_f(P_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4\sqrt{2} \\ 0 & -4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Il punto P_4 è chiaramente un punto di sella, visto che un autovalore è positivo e uno negativo.

Per quanto riguarda i punti P_2 e P_3 si ha che le matrici hessiane $H_f(P_2)$ e $H_f(P_3)$ hanno determinante positivo e traccia negativa, da cui si deduce che almeno un autovalore è positivo e almeno un autovalore è negativo, di conseguenza anche questi punti sono di sella.

Per quanto riguarda il punto P_1 , dalla matrice hessiana relativa non si può dedurre nulla, ma guardando la funzione ristretta all'asse y si ha

$$\varphi(y) := f(1, y, 0) = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 - \frac{y^3}{3}$$

che ha chiaramente un flesso in $y = 0$. Per cui il punto P_4 è di sella.

Per i punti P_5 e P_6 si ha che sia il determinante che la traccia sono negativi, il che non aiuta a concludere. Ma un autovalore è sicuramente positivo: l'elemento $(H_f(P_5))_{11} = (H_f(P_6))_{11} = 1$ è infatti un autovalore, come si può facilmente verificare risolvendo l'equazione

$$(1 - \lambda) \left[(-2 - \lambda)(-\lambda) - (4\sqrt{2})^2 \right] = (1 - \lambda) \left[\lambda^2 - 2\lambda - 32 \right] = 0.$$

Si conclude che anche tali punti sono di sella.